DARIEL AMADOR

economía financiera

I-2024

Aviso

Estos apuntes se basan en el curso Economía Financiera impartido en el primer ciclo lectivo del año 2024 por el profesor Ph.D Miguel Cantillo Simón. Gran parte de las ideas son una reproducción literal de las clases de ese curso así como discusiones y ejercicios analizados en clases.

Otra pequeña parte son apuntes propios y explicaciones personales, aunque la enorme mayoría es extraído del material compartido por el curso.

Esta versión es de July 5, 2025

Hecho en LaTeX

Contents

Decisiones Bajo Riesgo

La economía es el estudio de cómo las personas y las sociedades eligen asignar recursos escasos y distribuir la riqueza entre sí y a lo largo del tiempo. Por lo tanto, es necesario comprender los objetos de elección y el método de elección. Aquí nos enfocamos en la teoría de cómo las personas toman decisiones cuando se enfrentan a la incertidumbre. Más adelante, una vez que se comprenda la teoría de la elección y los objetos de elección, los combinaremos para producir una teoría de la toma de decisiones óptima bajo incertidumbre. En particular, estudiaremos la asignación de recursos en una sociedad económica donde los precios proporcionan un sistema de señales para la asignación óptima.

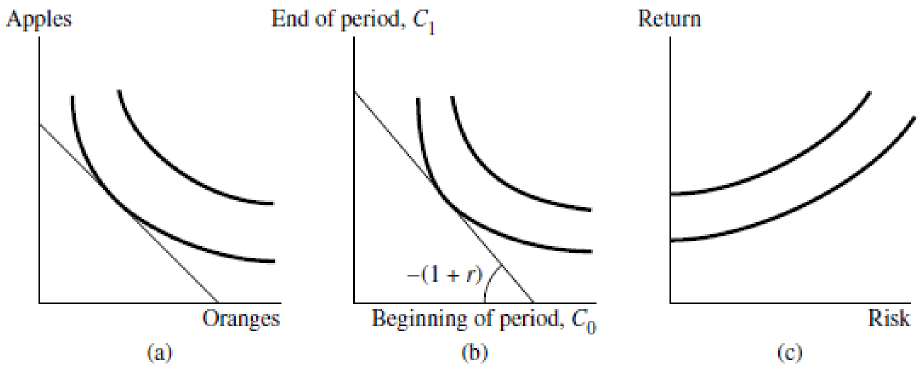


Figure 1: Curvas de indiferencia para varios tipos de elecciones o decisiones: a) consumo de bienes bajo certeza b) consumo y ahorro bajo certeza c) riesgo y rendimiento

La teoría de la elección del inversor es solo una parte de lo que se conoce como teoría de la utilidad. La mayoría de los estudiantes ya están familiarizados con el tratamiento de la teoría de precios microeconómica de las elecciones entre varios paquetes de productos perecederos, como manzanas y naranjas en un instante en el tiempo. Las curvas de indiferencia resultantes se muestran en la Figura 1(a).

Otro tipo de elección disponible para las personas es si consumir ahora o ahorrar (invertir) y consumir más en una fecha posterior. Esta es la teoría de la utilidad de las elecciones a lo largo del tiempo, que es fundamental para entender las tasas de interés. Este tipo de decisión de consumo/inversión de un período se ilustra en la Figura 1(b).

Nuestra principal preocupación aquí es la elección entre alternativas riesgosas atemporales, a las que llamamos teoría de la elección del inversor. La teoría comienza con nada más que cinco supuestos sobre el comportamiento de las personas cuando se enfrentan a la tarea de clasificar alternativas riesgosas y el supuesto de no saciedad (es decir, codicia). La teoría termina al parametrizar los objetos de elección como la media y la varianza del rendimiento y al mapear los intercambios entre ellos que proporcionan igual utilidad a los inversores. Estos mapeos son curvas de indiferencia para elecciones atemporales (o de un período) bajo incertidumbre. Se muestran en la Figura 1(c).

1. Utilidades esperadas

1.1 Construcción de la utilidad esperada

Vamos a repasar un concepto ya visto y otros dos nuevos.

- Utilidad ordinal: usualmente es usada para comparar y ordenar canastas de consumos. Sirve para situaciones en donde no hay riesgo. Este concepto ya se vio.
- Utilidad cardinal: la diferencia con la utilidad ordinal es que aquí sirve para analizar situaciones bajo riesgo o incertidumbre; hay dos opciones riesgos y hay que decidir entre una y otra.
- Utilidad esperada: es la utilidad que se espera de las utilidades cardinales. Se emplea para el análisis de riesgo, acciones, etc.

Hoy se va a ver cómo se construye esa utilidad esperada, qué supuestos hay que hacer y excepciones a estos.

1.1.1 Canasta de consumo

Suponga una canasta de consumo $x_i \in \mathbb{R}^n_+$. Esta es una canasta que puede estar conformada por varios elementos.

Ejemplo 1.1 — Un desayuno. Una posible combinación de productos para el desayuno puede ser representada mediante canastas de consumo, como las siguientes x_1 y x_2:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \text{ (tortilla)} \\ 2 \text{ (huevo)} \\ 2 \text{ (café)} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \text{ (tortilla)} \\ 1 \text{ (huevo)} \\ 3 \text{ (café)} \end{bmatrix}$$

■

Ante la existencia de múltiples canastas de consumo, estas pueden ser ordenadas mediante las preferencias.

1.1.2 Preferencias

1.1.2.1 Preferencias débiles $\succsim$

Las posibilidades de ordenación mediante las preferencias débiles son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\succsim x_2 && x_1 \text{ es débilmente preferida a } x_2 \\
x_1 &\not\succsim x_2 && x_1 \text{ no es débilmente preferida a } x_2
\end{aligned}
$$

A partir de las preferencias débiles, se puede pasar a las preferencias estrictas y las relaciones de indiferencia

1.1.2.2 Preferencias estrictas $\succ$

$$
\begin{aligned}
x_1 &\succ x_2 && x_1 \text{ es estrictamente preferida a } x_2 \\
x_1 &\not\succ x_2 && x_1 \text{ no es estrictamente preferida a } x_2
\end{aligned}
$$

La preferencia estricta conlleva implicaciones lógicas. Si:

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow x_1 \succsim x_2 \wedge x_2 \not\succsim x_1$$

Es decir que la preferencia estricta implica la preferencia débil sólamente en una dirección.

1.1.2.3 Indiferencia $\sim$

$$x_1 \sim x_2 \; x_1 \text{ es indiferente a } x_2$$

La implicación lógica necesaria para la construcción de la indiferencia es que:

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 \succsim x_2 \wedge x_2 \succsim x_1$$

Es decir, la manera en la que se han construido estas preferencias es a partir de las preferencias débiles, pasando por las preferencias estrictas y así llegando hasta la indiferencia. En otros libros de texto se hace en otro órdenes, es una cuestión de gustos.

Ahora lo que sigue es imponer condiciones de regularidad a las preferencias.

1.2 Condiciones de regularidad de las preferencias

Aquí no hay una intuición económica tan profunda.

R1 $x_1 \succsim x_1$ la canasta se puede comparar consigo misma $\rightarrow$ reflexividad

R2 Si se tienen las series x_n y y_n que convergen respectivamente:

$$
\begin{aligned}
x_n &\rightarrow x \\
y_n &\rightarrow y
\end{aligned}
$$

Esto implica que si:

$$x_n \succsim y_n \forall n \Rightarrow x \succsim y$$

Es decir, si x_n es preferida a y_n entonces en el límite x es preferida a y. Es una especie de continuidad de las preferencias; si toda la serie se prefirió a x sobre y, ya llegando al final las preferencias no podrían cambiar.

1.3 Utilidad ordinal

Fue desarrollada por Wilfredo Pareto en 1906. Lo que se plantea es que se puede plantear una relación entre preferencias y utilidades. Esto se hace generando una función $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\underset{\text{preferencia}}{x \succ y} \Leftrightarrow \underset{\text{desigualdad}}{V(x) > V(y)}$$

Si entonces x es preferido a y entonces la función de utilidad es mayor para x que para y.

La función de utilidad ordinal permite mapear las preferencias y con esto ordenar conjuntos o canastas de consumo. Por otro lado, esta utilidad ordinal **no** sirve para situaciones de riesgo. Las canastas que se pueden ordenar no tienen ningún riesgo asociado.

1.3.1 Supuestos para la utilidad ordinal

En algunos libros se les llama axiomas pero nosotros les vamos a llamar supuestos porque no siempre se cumplen.

A1 Comparabilidad (completitud): $\forall x_1, x_2$ tiene que cumplirse alguno de los siguientes casos:
- $x_1 \succ x_2$
- $x_2 \succ x_1$
- $x_1 \sim x_2$

Es decir, que dadas dos canastas, siempre debe ser posible compararlas entre sí.

Hay una ruptura de este supuesto que se llama *la Superparadoja de San Petersburgo*.

A2 Transitividad (consistencia): si $x_1 \succ x_2 \wedge x_2 \succ x_3 \Rightarrow x_1 \succ x_3$.

Existen situaciones donde esto no se cumple. Un ejemplo es el *Teorema de imposibilidad de Arrow*. Esta fue la tesis doctoral de Kenneth Arrow y es importante entenderla.

Teorema 1.1 — Teorema de imposibilidad de Kenneth Arrow. Bajo las condiciones de regularidad (reflexividad y la convergencia) y los supuestos o axiomas (comparabilidad o completitud y transitividad o consistencia), existe $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow V(x_1) > V(x_2)$$

Ejemplo 1.2 — Kreps (2013) cap.1 para la demostración. ■

No se va a demostrar este teorema pero se supone que ya ha sido visto.

Ejemplo 1.3 Suponga que se tiene la siguiente transformación monotónica creciente:

$$\tilde{v} = F(v)$$

Tal que:

$$v = x$$
$$\tilde{v} = \ln x$$

Las dos funciones de utilidad ordinal van a escoger las mismas canastas de productos. Esto permite ver que las funciones de utilidad ordinales admiten transformaciones crecientes y mantienen el mismo orden de las preferencias originales. ■

Todo hasta el momento ha sido materia vista antes, ahora es momento de empezar con la materia propiamente nuestra. Hay que empezar a construir utilidades cardinales, y para esto es necesario estudiar las loterías.

1.4 Loterías

Definición 1.1 — Lotería. Una lotería es un repago de probabilidades de premios.

Ejemplo 1.4 — Una lotería básica. Suponga que se tiene una lotería ℓ_1 que asigna una probalidad α a ganar el premio o la canasta x_1 y con el complemento de probabilidad $1-\alpha$ la canasta x_2.

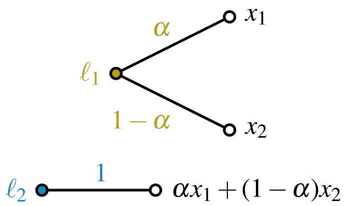
$$\ell_1 \begin{cases} \alpha & x_1 \\ 1-\alpha & \quad x_2 \end{cases}$$

Esto se podría escribir $\ell(x_1, x_2, \alpha)$ o $G(x_1, x_2, \alpha)$. También podría ser que los premios o canastas x_i sean a su vez otras loterías y así sucesivamente.

■

2. Aversión al riesgo

Ahora hay que ver tres conceptos similares pero distintos entre sí: riesgo, ambigüedad e incertidumbre. Cada uno de estos tres conceptos tiene definiciones técnicas. Suponga que se quiere comparar dos loterías:



¿Cuál de estas loterías es más riesgosa? $\rightarrow$ la primera, porque me puede dar dos posibles resultados con su respectiva probabilidad mientras que la segunda es una lotería degenerada (con probabilidad igual a 1).

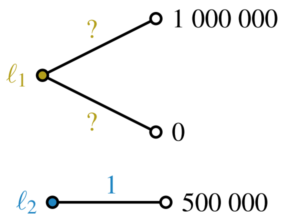
El α puede ser objetivo, por ejemplo: si se tira una moneda al aire la probabilidad de cada resultado es de $\frac{1}{2}$ mientras que si se tira un dado es de $\frac{1}{6}$. Es una probabilidad que se sabe cuál es, es una probabilidad objetiva. Esto lo desarrollaron Von Neumann y Morgenstern en 1944.

Pero el α podría ser subjetivo, por ejemplo: la probabilidad de una recesión. Sería subjetiva porque depende del modelo que se emplee, de las variables que se incluyan. No implica que sea arbitraria sino que depende de cada investigador. Esto fue desarrollado por Savage en 1958.

Definición 2.1 — Aversión al riesgo. Implica que $\ell_2 > \ell_1$: se prefiere una lotería sin riesgo a una con riesgo.

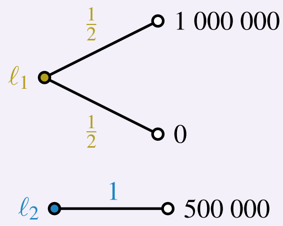
2.0.1 Ambigüedad

Definición 2.2 — Ambigüedad. Si se tienen las siguientes loterías:



Note que en este caso no se tiene información alguna sobre las probabilidades de la primer lotería. Hay menos información en los casos de ambiguedad que en los casos de riesgo. Fue estudiado en 1961 por Ellsberg. Preferia la lotería 2 ℓ_2 es ser averso a la ambiguedad.

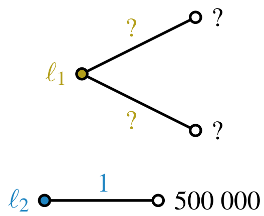
Ejemplo 2.1 — Loterías y riesgo. Suponga que se tienen las siguientes loterías:



La gente que prefiere la lotería 2 ℓ_2 son aversos al riesgo, y los que prefieren la primera ℓ_1 son amantes del riesgo.

■

Definición 2.3 — Incertidumbre. Si se tienen las siguientes loterías:



Note que en este caso no se tiene información alguna sobre las probabilidades de la primer lotería ni tampoco de los pagos. Un ejemplo de esto son los emprendedores que se embarcan sin saber exactamente qué rentas económicas pueden obtener. Hay menos información en los casos de ambiguedad que en los casos de riesgo. Fue estudiado en 1921 por Knight. Preferia la lotería 2 ℓ_2 es ser averso a la incertidumbre. También Epstein (1999).

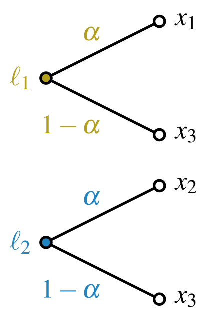
2.1 Supuestos adicionales en las preferencias

Se parte de supuestos ya vistos:

- Completitud
- Transitividad

Pero como ahora se trabajará con riesgo, se introducen supuestos adicionales sobre las loterías:

A3 Independencia (de alternativas irrelevantes): suponga que se tienen las siguientes preferencias sobre canastas (pueden ser loterías) $x_1 \succ x_2$:



En este caso en las dos loterías se tiene con la misma probabilidad x_1 y x_2 pero también se tiene x_3 con la misma probabilidad. Esto implica que $\ell_1 \succ \ell_2$ o $\ell(x_1, x_3, \alpha) \succ \ell(x_2, x_3, \alpha)$ y x_3 es una alternativa irrelevante.

Ejemplo 2.2 — Salida a un restaurante. Suponga que en un restaurante se ofrecen los siguientes 2 menús del día:

- Aperitivos: ambos menús ofrecen el mismo aperitivo
- Un menú ofrece salmón y el otro lomito
- Postres: ambos menús ofrecen el mismo postre

Si salmón $\succ$ lomito entonces se escogería el menú cuya opción de plato fuerte tiene el lomito, dado que solo se estaría observndo la diferencia marginal entre ambos menús: el plato fuerte. Fuera de ahí, ambos son idénticos y se escoge con base en lo que los diferencia.
Ahora, suponga que se le revela información adicional: se le indica que el aperitivo (de ambos menús) es ceviche de salmón. Cambia la elección? $\rightarrow$ estudiar *la paradoja de Allais* sobre las alternativas irrelevantes. ■

A4 Continuidad (medibilidad): se le conoce como el axioma de Arquímedes.

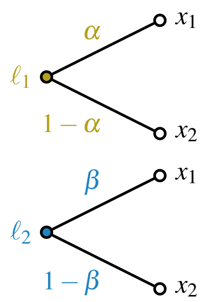
Ejemplo 2.3 Suponga que se tienen 3 loterías tal que $\ell_1 \succ \ell_2 \succ \ell_3$. Este axioma plantea que existe un único número $\pi \in (0,1)$ tal que $\ell_1 \sim \ell[\ell_1, \ell_3, \pi]$ es decir que la lotería 2 sea indiferente a una lotería donde se están dando ℓ_1 y ℓ_3 con una probabilidad π. Por ejemplo:

- ℓ_1: Ferrari
- ℓ_2: iPhone
- ℓ_3: chicle

Lo que dice es que va a haber una lotería que combine el Ferrari y el chicle tal que se esté indiferente con el iPhone.
Pero ahora suponga $\ell_3 =$ muerte dolorosa. Cambiarían las cosas? $\rightarrow$ Hay algo que se llama *preferencias lexicográficas*. Es como cuando una persona prefiere la vida como mínimo antes que cualquier cosa material. Por ejemplo, muy pocas personas se jugarían esa lotería solo por ganar un Ferrari.
Es decir, que cuando hay preferencias lexicográficas esto falla, y por lo tanto las canastas o loterías no pueden ser tan cualitativamente diferentes entre sí. ■

A5 Dominancia (ranqueo): La dominancia es otro supuesto de la utilidad. Aquí no hay excepciones a este axioma o supuesto; siempre se cumple.

Definición 2.4 — Dominancia. Si $x_1 \succ x_2$ y se tienen las siguientes loterías:



Si

$$\underbrace{\ell(x_1, x_2, \alpha) \succ \ell(x_1, x_2, \beta)}_{\text{preferencias}} \Leftrightarrow \underbrace{\alpha > \beta}_{\text{desigualdades}}$$

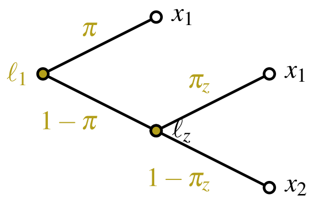
Es decir, se puede pasar de preferencias subjetivas al mundo de las desigualdades. α, β son números que se pueden calcular, y con esto calcular la utilidad esperada o la utilidad cardinal.

2.1.1 Consecuencias de los supuestos

La combinación de los supuestos **A3**-**A5** (supuestos sobre las loterías) tiene como consecuencia la siguiente:

Suponga que se tienen las siguientes loterías:

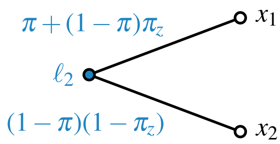
- Lotería compuesta: uno de los premios es jugar otra lotería



Observe que: $\ell_z = \ell(x_1, x_z, \pi_z)$ y $\ell_1(x_1, \ell_z, \pi)$. Además:

$$\begin{aligned}\text{Prob}\,[x_1] =& \pi_1 + (1-\pi)\pi_z \\ \text{Prob}\,[x_2] =& (1-\pi)(1-\pi_z)\end{aligned}$$

- Lotería directa: se dan los premios directamente



Y aquí: $\ell_z = \ell(x_1, x_2, \pi + (1-\pi)\pi_z)$

Ambas loterías dan los mismos premios con las mismas probabilidades. Sin embargo, podría haber personas que les guste la emoción de jugar más loterías, sin embargo, desde un punto de vista económico $\ell_1 \sim \ell_2$: solo interesan los resultados finales. Esto es consecuencia de los supuestos **A3**-**A5**.

Es decir, una persona normal debería ser indiferente entre ambas loterías. No hay gusto ni disgusto por jugar más o menos loterías (como a la gente que le gusta ir al casino).

2.2 Construcción de la utilidad esperada

Ya se tiene la suficiente información para empezar a construir la utilidad cardinal. Esto es lo más importante y lo que sirve para las tareas. Esta demostración se puede hacer de varias maneras pero se va a ver la más sencilla. Son 5 pasos:

I. **Construir una utilidad "ancestral"**. Esto es, una utilidad sobre loterías $u(\ell_z)$. Imaginar que hay m premios finales o canastas, y dichos premios están ordenados de mejor a peor. Así, por ejemplo:

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ \cdots \succ x_m$$

Esto también podría ser con preferencias débiles, pero lo importante es que al menos una sea preferencia estricta. El supuesto que permite ordenar de mejor a peor es **A1** el de comparabilidad.

a. Definir la utilidad ancestral $u(\ell_z)$ como una probabilidad π_z donde pasa lo siguiente:

$$\ell_z \sim \ell(x_1, x_m, \pi_z)$$

O sea, se define la lotería ℓ_z y esta es indiferente a una lotería ℓ donde están los premios x_1, x_m y la probabilidad π_z. Además, se sabe que π_z existe y es único por el supuesto

o axioma **A4**. Ojo que ni siquiera se está diciendo el tipo de lotería que es ℓ_z, pero el supuesto **A4** dice que se puede hacer.
Se están agarrando el mejor y peor premio: x_1 y x_m respectivamente.

Recordar que las probabilidades tienen que estar entre 0 y 1.

b. Queda por ver si esta utilidad ancestral $u(\ell_z)$ se comporta como una verdadera función de utilidad en el sentido de Pareto. (Ver paso #4.) $\downarrow$ *Luego pasa al paso #2.

II. **Construir el caso especial** $u(x_i) \equiv$ **cardinal**. **Este es el paso más importante***. En el primer paso, se creó una utilidad sobre una lotería arbitraria. Hay casos especiales de las loterías dependiendo de los pagos específicos. Entonces, la utilidad cardinal es un caso específico de la utilidad ancestral $\rightarrow$ ya no se considerarán loterías, sino utilidad sobre canastas, que son un caso particular de loterías.
Es decir, se quiere que deje de ser una utilidad sobre una lotería y que pase a ser una utilidad sobre el repago final. Es aquí en donde se llama utilidad cardinal. Sin pérdida de generalidad, se definen las utilidades cardinales

$$u(x_1) \equiv 1 \qquad u(x_m) \equiv 0$$

La característica de x_1 es que era el mejor premio, digamos el Maseratti. Entonces tiene que ser que indiferente entre una lotería de x_1, x_m y digamos π_1, o sea: $x_1 \sim \ell(x_1, x_m, \pi_1)$, pero, ¿qué tiene que ser cierto de π_1? $\rightarrow$ que π_1 tiene que ser igual a la utilidad de x_1 con número igual a 1 para que sea indiferente, o sea que le den el premio con total seguridad para que usted lo acepte, por lo que $\pi_1 = u(x_1) = 1$, es decir, hay que dar el premio con 100% de seguridad para que lo acepte.
Ahora hay que ver la utilidad cardinal del peor premio x_m. Entonces en la lotería m ℓ_m, por lo que: $x_m \sim \ell(x_1, x_m, \pi_m)$ y como es el peor premio, aunque le de una mínima probabilidad, preferiría la otra lotería, por lo que en realidad tiene que darle 0 chance a pegar el premio para que así realmente esté indiferente entre ambas loterías.

Entonces la utilidad cardinal del mejor premio es igual a 1. La utilidad cardinal del premio es igual 0. Esto es así porque son los valores para la distribución de probabilidad que me garantizan indiferencia entre una y otra lotería.

Entonces las utilidades cardinales, dado que son la distribución de probabilidad que garantiza la indiferencia entre una y otra lotería, tiene que estar entre 0 y 1, por lo que $0 \leq u(x_i) \leq 1$.
Cuando se hacen utilidades cardinales se tienen dos grados de libertad y aquí se están usando esos dos grados de libertad: la utilidad del primer premio es 1 y la del último premio es 0.

III. **Expresar la utilidad ancestral en términos de utilidades cardinales**. Esto se puede desagregar en pasos:

a. Lo que sí se sabe acerca de la utilidad cardinal $u(\ell_z)$ es que tiene que ser indiferente con la utilidad de x_1, x_m y π_z (recordando el paso 1.1), o sea:

$$u(\ell_z) \sim u(x_1, x_m, \pi_z)$$

b. Ahora se va a suponer que se va a tomar un caso específico: ℓ_z es una lotería directa de $\ell(x_i, x_j, \pi) = \ell_z$. Ahora se va a manipular hasta llegar a algo más familiar.
Lo primero que hay que decir es que x_i va a ser indiferente con la lotería:

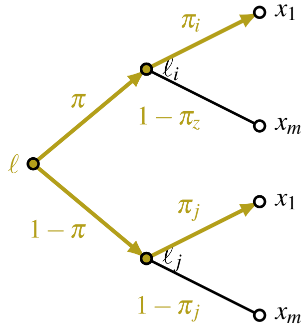
$$x_i \sim \ell(x_1, x_m, \pi_i) \qquad x_j \sim (x_1, x_m, \pi_j)$$
$$\ell_z = \underbrace{\ell(x_i, x_j, \pi)}_{\text{lotería directa}}$$

Pero se había dicho que una lotería directa es equivalente a una lotería compuesta siempre que las probabilidades calcen. Entonces esto debería ser equivalente con una lotería compuesta:

$$x_i \sim \ell(x_1, x_m, \pi_i) \qquad x_j \sim (x_1, x_m, \pi_j)$$
$$\ell_z = \underbrace{\ell(x_i, x_j, \pi)}_{\text{lotería directa}} \sim \underbrace{\ell\left[\ell(x_1, x_m, \pi_i), \ell(x_1, x_m, \pi_j), \pi\right]}_{\text{lotería compuesta}}$$

Las loterías compuestas tienen como uno de los premios, otra lotería. ¿Por qué esta indiferencia es cierta? $\rightarrow$ Porque se había dicho que x_i, x_j eran indiferentes con sus respectivas otras loterías.
Esta lotería compuesta tiene como repagos al final x_1, x_m y la probabilidad de x_1 es $\underbrace{\pi_i\pi + (1-\pi)\pi_j}_{\text{sale del árbol}}$.

$$\text{Prob}(x_i) = \pi \cdot \pi_i + (1-\pi) \cdot \pi_j$$



Entonces, dado que ya se tiene una lotería compuesta equivalente a la directa, ahora se vuelve a hacer otra lotería directa:

$$\ell_z = \underbrace{\ell(x_i, x_j, \pi)}_{\text{lotería directa}} \sim \underbrace{\ell\left[\ell(x_1, x_m, \pi_i), \ell(x_1, x_m, \pi_j), \pi\right]}_{\text{lotería compuesta}} \sim \underbrace{\ell\left[x_1, x_m, \pi \cdot \pi_i + (1-\pi) \cdot \pi_j\right]}_{\text{Otra lotería directa}}$$

Todas estas loterías son equivalentes entre sí. Esta lotería z ℓ_z es equivalente a las otras loterías directas pero la que interesa es la última.

$$\begin{aligned}\pi_z =& u(\ell_z) = \pi \cdot \pi_i + (1-\pi)\pi_j \\ =& \pi \cdot u(x_i) + (1-\pi) u(x_j)\end{aligned}$$

Es decir, se llega a una expresión en donde se puede sustituir en términos de utilidades cardinales. Con esto se ha logrado desarrollar la utilidad esperada.
Entonces, en general, la utilidad esperada es igual a la suma de todas las utilidades cardinales por la probabilidad (subjetiva u objetiva) de todos los repagos:

$$\begin{aligned}v = E\left[u(x)\right] &= \sum u(x_i) \cdot \text{Prob}(x_i) \\ &= \int u(x) f(x)\, dx\end{aligned}$$

Recordando que ya se dijo que π se interpreta como una utilidad cardinal.
*Porque se reciben los premios finales.

Entonces, la utilidad ancestral $u(\ell_z)$ se puede escribir como:

$$u(\ell_z) = \sum u(x_i) \cdot \text{Prob}(x_i)$$

El repago de las utilidades cardinales multiplicado por la probabilidad del repago. Esto es el final al que hay que llegar. Esto es el mapa de lo que se va a hacer.
Construir la utilidad esperado en base a loterías: es una suerte de paso intermedio. Para cualquier lotería z se define la utilidad esperada como $u(z) \equiv \pi_z$ donde π_z:

$$\ell(x_1, x_m, \pi_z) \sim z$$

Por qué se puede llegar a esto? Cuáles supuestos permiten hacer esto? $\rightarrow$ π_z existe y es único por el axioma **A4** continuidad.

IV. *Esto se puede ver como la segunda parte del paso #1. Hay que verificar que esto en efecto funcione como una utilidad en el sentido de Pareto. Hay que saber cuál es la naturaleza de una utilidad $\rightarrow$ es un número que represente las preferencias. Esto es lo que hay que verificar que se cumpla. Considere dos loterías w, z tal que $w \succ z$.

$$w \sim \ell(x_1, x_m, \pi_w) \succ z \sim \ell(x_1, x_m, \pi_z)$$
$$\ell(x_1, x_m, \pi_w) \succ \ell(x_1, x_m, \pi_z)$$

A partir de esto, qué se puede decir acerca de π_w y π_z? $\rightarrow$ Usando el principio de dominancia o ranqueo se tiene que:

$$\pi_w \equiv u(w) > \pi_z \equiv u(z)$$

por **A5**. Por lo que entonces la utilidad esperada es realmente una utilidad $w \succ z \Leftrightarrow u(w) > u(z)$. Esto se parece mucho a lo de Pareto: la utilidad esperada se parece mucho a la utilidad ordinal, pero todavía no hemos llegado a la utilidad cardinal. A partir de las preferencias sobre las loterías, se puede llegar a un número que mapee esas preferencias, la única diferencia es que ahora la utilidad es sobre loterías, no sobre canastas.

Note que aquí $w \sim \ell(x_1, x_m, \pi_w)$ equivale a la notación $\ell_w \sim \ell(x_1, x_m, \pi_w)$. Porque desde el inicio se dijo que w, z eran loterías. Así que ambas notaciones son válidas, sin embargo se puede ahorrar escribir tanto.

V. *Esto también viene explicado en el paso tercero, esto es de acuerdo con el video (otra manera de explicarlo, está más detallado en el paso 3).Construcción de la utilidad esperada (en base a repagos finales): En el paso tercero se hizo la utilidad esperada en base a loterías. En este paso se van a hacer la utilidad esperada en base a repagos finales. Considere dos repagos finales x_i, x_j y π es una probabilidad. Se sabe por el supuesto **A4** que:

$$x_i \sim \ell(x_1, x_m, \underset{\substack{\text{utilidad}\\\text{cardinal}}}{\pi_i}) \rightarrow u(x_i) = \pi_i$$

$$x_j \sim \ell(x_1, x_m, \underset{\substack{\text{utilidad}\\\text{cardinal}}}{\pi_j}) \rightarrow u(x_j) = \pi_j$$

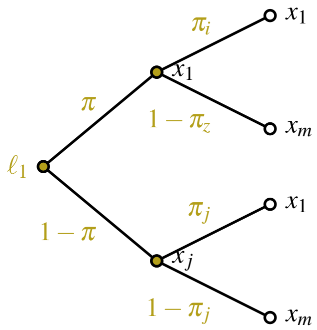
Ahora se van a aplicar loterías compuestas y directas:

$$\underset{\text{lotería compuesta}}{\ell(x_i, x_j, \pi)}$$

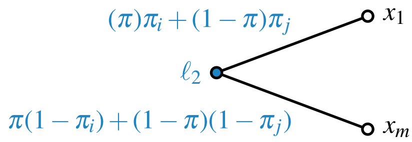
$$\underset{\text{lotería directa}}{\ell(x_1, x_m, \pi\pi_i + (1-\pi)\pi_j}$$

Estas dos loterías son equivalentes porque dan los mismos repagos finales. Observe:

- $\ell(x_i, x_j, \pi)$



- $\ell(x_1, x_m, \pi\pi_i + (1-\pi)\pi_j$



Entonces ambas loterías son equivalentes:

$$\ell_1(x_i, x_j, \pi_) \sim \ell_2(x_1, x_m, \pi\pi_i + (\overset{*}{1} - \pi)\pi_j)$$

$$\Leftrightarrow \pi\dot{\pi}_i + (1-\pi)\pi_j = \pi u(x_i) + (1-\pi)u(x_j) = E[u] = \pi$$

* Lo que se quiere es estudiar qué significa esta condición. Entonces se va a reescribir esta condición. Aquí definimos que π_i y π_j como utilidades cardinales, entonces se ha rescrito como una utilidad esperada. Entonces se ha construido la utilidad esperada en base a las utilidades cardinales de los repagos individuales.

Esto quiere decir que entonces:

$$u(x_1) \cdot [\pi\pi_i + (1-\pi)\pi_j] + u(x_m)\,[]$$

$$\pi \equiv E[u] = \pi u(x_i) + (1-\pi)u(x_j)$$

Es decir, las utilidades cardinales multiplicadas por la probabilidad de que se de ese repago.

Utilidad cardinal: *cardo* viene del latín medir. La utilidad cardinal permite no sólo ordenar sino también medir. La utilidad cardinal además permite la siguiente transformación:

$$\tilde{u} = a + bu$$

donde $b > 0$ y aún así preserva decisiones de u. Es decir, que todo el análisis hecho hasta arriba se puede cambiar por $\tilde{u}$ y se mantiene el mismo resultado. Sin embargo, las transformaciones que se pueden hacer son lineales positivas, en contraposición a la utilidad ordinal que admite transformaciones monótonas. Es decir, que la utilidad cardinal es más 'delicada' a la hora de aplicar transformaciones.

Dado que a, b son arbitrarios, sin pérdida de generalidad, se tienen dos grados de libertad porque se podía decir que $u(x_1) = 1$ y $u(x_m) = 0$. Al poder hacer transformaciones lineales positivas siempre se puede calcular un a, b tal que eso sea cierto.

¿Por qué no podría ser $u(x_1) = 0$ y $u(x_m) = 1$? $\to$ se violaría un tema económica que habíamos supuesto que $x_1 \succ x_m$. Se estaría violando al suponer que $b < 0$, y tiene que ser positivo para preservar las preferencias.

El paso primero se pudo haber definido de esta otra manera:

$$\tilde{u} = a + b\pi_z \quad b > 0$$

Es decir, que esta utilidad conserva todas las propiedades, y nosotros vimos el caso particular donde $a = 0$ y $b = 1$, pero con a, b arbitrarios (siempre y cuando $b > 0$) sigue cumpliendo esto.

La importancia de esto es que dice que la utilidad cardinal admite transformaciones lineales positivas. Otra forma de decirlo es con los grados de libertad: se tienen 2: a y b.

Ejemplo 2.4 — Relaciones de utilidades.

1. Una utilidad ordinal que admite transformaciones monotónicas:

$$v_1 = \sqrt{xy}$$
$$v_2 = \frac{-1}{xy}$$

Piense en que x son naranjas y y manzanas. ¿Son estas utilidades equivalentes? $\rightarrow$ La función $f(\cdot)$ que combina estas dos es $f(\cdot) = \frac{-1}{v_1^2}$ y su primera derivada $f'(\cdot) = \frac{2}{v_1^3} > 0$ es positiva, y como se admiten transformaciones monotónicas crecientes, por lo que v_1 y v_2 son equivalentes desde el punto de vista ordinal porque mantienen las mismas elecciones de canastas de productos.

2. Una utilidad cardinal que solo admite transformaciones positivas

$$u_1$$
$$u_2 = a + bu_1 \quad \text{donde } b > 0$$

Esta es una transformación que se puede hacer porque es positiva, pero la transformación anterior no se podría, aquí sí se puede con este ejemplo porque es una transformación lineal.

3. Utilidades esperadas: ¿qué tipo de transformación se le puede hacer las utilidades esperadas? $\rightarrow$ ¿una transformación positiva o solo lineal? Las utilidades esperadas se construyen con las utilidades cardinales.
En las utilidades anteriores se tenían manzanas y naranjas, pero por ejemplo, si fueran acciones, habría un riesgo asociado, por lo que hay que sacar una utilidad esperada con cada una de las acciones. Entonces lo que habría que hacer es $\rightarrow$ sacar la utilidad esperada de invertir en cada una:

$$v = E[\text{Google}] = 20$$
$$v = E[\text{Amazon}] = 15$$

En este caso se comprarían acciones de Google porque tiene una mayor utilidad esperada. La utilidad esperada sirve para ver cuál canasta riesgosa es preferida a la otra. Note que si se elevan al cuadrado mantienen esas mismas elecciones, por lo que las utilidades esperadas admiten cualquier transformación monotónica.
Esto quiere decir que la utilidad esperada se parece mucho a la utilidad ordinal: llevan a tomar una decisión. La que sí es diferente es la utilidad cardinal, ahí sí importa la magnitud y luego se emplean en la construcción de las utilidades esperadas.

■

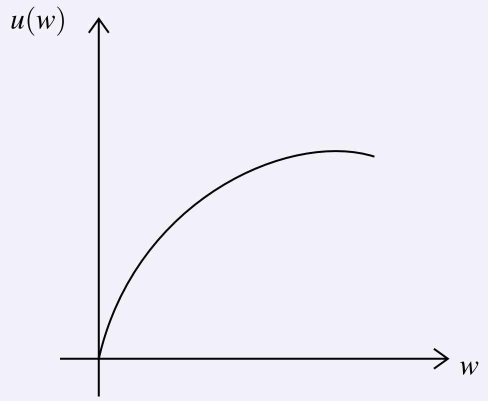
Ahora se va a hacer un ejemplo muy sencillo de una combinación entre utilidades y rendimientos.

Ejemplo 2.5 — Combinación. Suponga que la utilidad de riqueza $u(w)$ sea igual :

$$u(w) = \frac{w^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma}$$

Esto se llama una utilidad de potencia porque es w elevado a una potencia ≥ 1, pero también se le llama isoelástica o CRRA.

Por ejemplo, suponga que si $\gamma = \frac{1}{2}$ entonces $u(w) = \frac{w^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}} = 2(\sqrt{w}-1)$, pero ignorando las constantes $u(w) = \sqrt{w}$ conforme aumenta la riqueza la utilidad marginal es menor, lo cual se ve así:

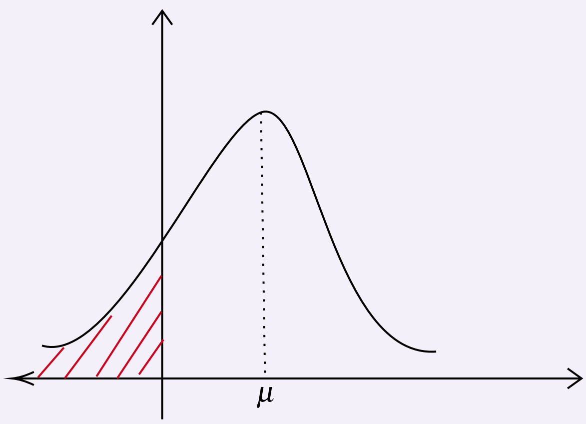


Hay una utilidad marginal positiva pero decreciente de la riqueza.

Esto es una función general, pero ahora supongamos que la riqueza tiene una distribución log normal $w \sim$ log normal. Esto es lo que tiene sentido económicamente.

Suponga que se invierte en una acción de Google: suponga que vale \$1 000. ¿Qué precios futuros podría tener esa acción? $\rightarrow$ podría bajar de precio, lo máximo hasta 0. No podría bajar menos de 0 porque más bien la empresa pagaría para que le reciban la acción. La responsabilidad limitada significa que no puede perder más allá de lo que se invirtió, los \$1 000, porque las empresas tienen esa responsabilidad limitada. El precio máximo podría ser infinito, se podría indefinir, pero lo importante es que no podría ser negativa.

Entonces se tiene la riqueza, que es lo que se invierte. Si se dijera que $w \sim N(\mu, \sigma^2)$, esta riqueza se distribuiría así:



Su punto más alto de esta densidad sería en μ, pero con una distribución normal hay una zona donde hay valores negativos, y económicamente eso no podría ser.

Por lo tanto, una distribución normal de las acciones, riqueza o consumo no tiene sentido porque hay regiones donde tienen precio negativo. Por eso, en finanzas se suele usar una distribución log normal en lugar a una distribución normal. Se toma el logaritmo de la distribución normal para que solo tome valores positivos: se tiene una distribución siempre positiva. Esto implica que siempre $w > 0$. Y el valor esperado de w cuando tiene una distribución normal es :

$$E[w] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Es es el primer momento muestral o media de la distribución log normal. ■

Ahora vamos a ver unas propiedades de la distribución log normal.

2.3 Propiedades de la distribución log normal

$$w \sim \text{log normal}$$
$$\ln w \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Ahora, considere w^a, si w tiene distribución normal, ¿qué distribución va a tener w^a? $\rightarrow$ tome el logaritmo natural de eso:

$$\ln w^a = a \ln w$$

Cuando se tiene una distribución normal y se multiplica por una constante, esa distribución sigue siendo normal pero se desplaza, por lo que:

$$a \ln w \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$$

Por lo tanto, w^a también tiene distribución log normal pero con parámetros un poco diferentes. Ahora hay que ver su valor esperado:

$$E[w^a] = \exp\left\{a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right\}$$

Ahora imagine la situación siguiente:

2.3.1 Combinación $u(w)$, CRRA y w log normal

Entonces suponga que se tiene una **utilidad cardinal** dada por:

$$u(w) = \frac{w^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad \gamma > 0$$

Y suponga que $w \sim$ log normal donde $\ln w \sim N(\mu, \sigma^2)$. Y se va a sacar la utilidad esperada bajo esta situación:

$$E[u(w)] = \frac{\overbrace{E\left[w^{1-\gamma}\right]}^{a=1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{1}{1-\gamma} = v$$
$$v = \frac{\exp\left\{(1-\gamma)\mu + \frac{(1-\gamma)^2\sigma^2}{2}\right\}}{1-\gamma} - \frac{1}{1-\gamma}$$

Las partes constantes salen de la operación de la esperanza y se calcula el resto. Note que se está haciendo lo mismo con w^a solo que ahora $a = 1-\gamma$.

¿Qué tipo de transformaciones se le pueden aplicar a esta utilidad esperada? $\rightarrow$ se le pueden aplicar transformaciones monótonas. Y en particular, se le aplicará la siguiente:

$$\tilde{v} = \mu + \frac{(1-\gamma)\sigma^2}{2}$$

Y esto ya permite hacer cálculos para determinar la utilidad esperada con distintos tipos de acciones. Vamos a suponer que $\gamma = 1.2$ y así:

$$\tilde{v} = \mu - 0.1\sigma^2$$

Entonces si se invierte en Amazon o en Google interesan dos variables: la media y la varianza. A mayor media más feliz se está, pero más varianza implica estar menos contento. Esto tiene que ver con la aversión al riesgo.

Vamos a ver un ejemplo de utilidad esperada.

Suponga que se tiene:

$$\tilde{v_1} = \mu - 0.1\sigma^2$$

Datos del 11/03/2019. Se tienen los siguientes datos:

Ticker	σ	σ^2	μ
APPL	20.17%	0.0406	-2.19%
AMZN	22.80%	0.0519	5.07%
GOOG	18.80%	0.0353	1.57%

Y con esta información se pueden calcular las utilidades esperadas:

Ticker	σ	σ^2	μ	$\tilde{v_1}$
APPL	20.17%	0.0406	-2.19%	-2.59%
AMZN	22.80%	0.0519	5.07%	4.58%
GOOG	18.80%	0.0353	1.57%	1.31%

No es problema que la utilidad esperada sea negativa. Las utilidades marginales sirven para ordenar: la mejor opción a invertir serían Amazon, luego Google y de último Apple.

Se ordenaron acciones que tienen riesgo asociado. En la práctica, lo ideal sería mezclar las tres y diversificar.

Ejercicio 2.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿Qué es el supuesto de la independencia de las preferencias relevantes?* $\rightarrow$ Se conoce como análisis marginal. Si yo tengo dos loterías, basta con ver en lo que las diferencia para tomar una decisión sobre ellas. Usualmente son dos loterías que tienen dos elementos comunes y me fijo en la diferencia entre ellas para tomar la decisión.
2. *¿Qué es el supuesto de comparabilidad?* $\rightarrow$ Un agente puede comparar canastas y decir si prefiere una a la otra o si es indiferente.
3. *Hable acerca del supuesto de transitividad.* $\rightarrow$ si tengo tres canastas y $1 \succ 2$ y $2 \succ 3$, entonces $1 \succ 3$.

■

2.4 Excepciones a los supuestos Von Neumann-Morgensten

Vamos a repasar los supuestos que se usaban para construir la utilidad cardinal y la utilidad esperada.

A1 Comparabilidad: $\forall x_1, x_2$ se cumple que $x_1 \succ x_2$ o $x_2 \succ x_1$ o $x_1 \sim x_2$.

A2 Transitividad o consistencia: $x_1 \succ x_2$ y $\succ x_2 \succ x_3$ entonces $x_1 \succ x_3$. Esto tiene que ver con la racionalidad.

A partir de aquí los supuestos sobre sobre loterías y no sobre repagos finales (aunque estos son casos especiales de una lotería). Son supuestos añadidos para crear una utilidad cardinal (porque los primeros dos sirven para crear una utilidad ordinal).

A3 Independencia: si $\ell_1 \succ \ell_2$ entonces $\ell(\ell_1, \ell_z, \alpha) \succ \ell(\ell_2, \ell_z, \beta)$. Hay que fijarse en el efecto marginal: qué se piensa de ℓ_2 respecto a ℓ_1 que es la diferencia entre ambas loterías. Ya se había visto una crítica de Krebs, porque ese análisis marginal no considera que hay alternativas irrelevantes.

A4 Continuidad: si $\ell_1 \succsim \ell_2 \succsim \ell_3$ (se está poniendo como preferencias débiles, pero lo importante es que haya al menos una preferencia estricta) entonces existe un único $\pi \in [0,1]$ tal que $\ell_2 \sim \ell(\ell_1, \ell_3, \pi)$. Esta es importante porque a partir de aquí se empiezan a construir las utilidades cardinales. Una violación a este supuesto son las preferencias lexicográficas, y así podría no haber una probabilidad que logre esa indiferencia (como con la muerte dolorosa o siempre preferir el mejor premio como un Maseratti).

A5 Dominancia: si $\ell_1 \succ \ell_2$ entonces $\ell(\ell_1, \ell_2, \alpha) \succ \ell(\ell_1, \ell_2, \beta) \Leftrightarrow \alpha > \beta$. Permite cuantificar las preferencias, pues antes solo se podían ordenar pero ahora se les pone un número.

Hay un dicho que dice *la excepción creó (o prueba la) a la regla.* $\rightarrow$ el sentido de este dicho es que la excepción dice hasta donde llega la regla, donde se quiebra.

Entonces vamos a ver las distintas excepciones de las reglas:

- **A1** Superparadoja de San Petersburgo
- **A2** Teorema de imposibilidad de Arrow
- **A3** Paradoja de Allais
- **A4** Preferencias lexicográficas
- **A5** Suponemos que nunca se viola y siempre funciona

Vamos a ver detalladamente cada una.

2.4.1 Superparadoja de San Petersburgo

Primero hay que ver la paradoja de San Petersburgo. Esto lo explicó Bernoulli en 1713. Había un casino que ofrecía 2^n *ducados* si la moneda sale cara n veces seguidas. Pero pagaban 0 si la moneda sale cruz la primera vez. Vamos a ver una tabla de posibles escenarios:

Repago	Probabilidad	Explicación	n
0	$\frac{1}{2}$	sale cruz la primera vez	0
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	cara la primera cruz la segunda	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2^n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$	cara n veces cruz la última	n

Y el valor esperado sería:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

Bernoulli encontró que el repago esperado de apostar era infinito, pero la cuota de entrada no era infinito, por lo que es un juego al que uno debería entrar. ¿Pero cuál es la solución? $\rightarrow$ la gente no estaba dispuesta a pagar infinito por varias razones: primero la gente no vive infinitamente, pero más importante es que la gente es aversa al riesgo.

Si se tiene una utilidad cardinal de la riqueza que es $u(x) = \ln x$, entonces la utilidad espera $E[u(x)] < \infty$ porque ese extra no se valora de la misma manera.

Pero Carl Menger en 1853 se preguntó qué pasaba si el repago era $u^{-1}(2^n)$. Por ejemplo si se tiene una utilidad logarítmica entonces:

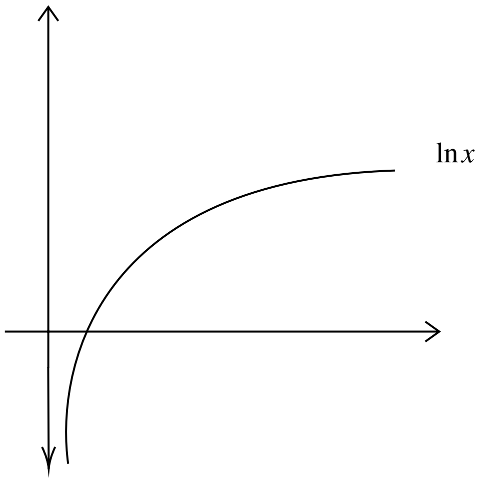
$$\begin{aligned} u^{-1}(2^n) &= \exp\{2^n\} \\ \ln\left\{u^{-1}(2^n)\right\} &= 2^n = u(\cdot) \end{aligned}$$

Entonces bajo una situación como esta, la utilidad esperada:

$$\begin{aligned} E[u(x)] &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u\left[u^{-1}(2^n)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^n \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Entonces resulta que la utilidad esperada se va a infinito, y esto se llama la superparadoja de San Petersburgo.

Por ahora regresemos al caso $u(x) = \ln x$. Se sabe que la primera derivada es positiva (es creciente) pero la segunda es negativa (cóncava (hacia abajo)). El dominio de una función logarítmica es $\mathbb{R}^+$ y el rango es $\mathbb{R}$.



Es una utilidad que tiene ciertos problemas:

- ¿Tiene techo o piso? $\rightarrow$ no tiene ni techo ni piso. Arrow propuso que las utilidades deben tener techo o piso. Porque antes lo que pasaba era que al sacar la inversa del pago $u\left[u^{-1}(2^n)\right] = 2^n$ y como la utilidad no tenía techo, la utilidad esperada se podía ir a $+\infty$. Si la utilidad cardinal no tiene techo ya no se puede hacer esto.
  Hay que recordar que se dijo que se tenía una utilidad $u = \ln x$ y la inversa sería $x = u^{-1} = \exp\{2^n\}$.

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ x = u^{-1} &= \exp\{2^n\} \\ \rightarrow \ln[\exp\{2^n\}] &= 2^n \end{aligned}$$

Esto solo se puede hacer porque la utilidad cardinal no tiene techo. Si la utilidad tiene techo ya no se puede hacer esto.

Este es el truco del supuesto: esa es la idea de Menger. Idealmente las utilidades cardinales deberían tener un piso o un techo: si se usa una utilidad logaritmica hay que verificar que los pagos no exploten como en la superparadoja, porque se tendrían utilidades esperadas que van a infinitas.
Esto genera un problema aquí: un agente tiene una utilidad logaritmica $u = \ln x$ y se tienen dos casinos A y B que pagan (respectivamente):

$$u = \ln x \begin{cases} A. \ \exp\{2^n\} \\ B. \ \exp\{2 \cdot 2^n\} \end{cases}$$

¿Cuál es la utilidad esperada en cada uno de los casinos si la utilidad es logarítmica? $\rightarrow$ En el casino A la utilidad esperada es infinita y en el casino B sería infinita también: no habría comparabilidad, no se pueden comparar si ambas utilidades esperadas dan infinito.
Sin embargo, el casino B da un mejor repago.

Se trata de evitar que las utilidades esperadas den $+\infty$ lo cual implicaría que no se pueden comparar entre sí.

2.4.2 Teorema de la imposibilidad de Arrow

Tiene que ver con la transitividad. Este teorema dice que cuando hay tres elecciones para elegir y se hace una elección popular, no se puede hacer una función social que permita ordenar las opciones de forma que no se rompa el supuesto.

En situaciones donde hay 3 o más opciones, no hay función social democrática que sea racional.

Una manera de solucionarlo sería con una decisión no democrática (dictatorial) o tener menos de 3 agentes o 3 opciones posibles a elegir. La figura del agente representativo sería problemático a la luz de esto. Esto es relevante para las ciencias sociales como las ciencias políticas.

Ejemplo 2.6 — Elecciones en Estados Unidos. Suponga que en Estados Unidos se tienen los siguientes tipos de votantes y sus respectivas preferencias:

$$v_1 : \text{Clinton} \succ \text{Sanders} \succ \text{Trump}$$
$$v_2 : \text{Sanders} \succ \text{Trump} \succ \text{Clinton}$$
$$v_2 : \text{Trump} \succ \text{Clinton} \succ \text{Sanders}$$

Ahora, una función social podría ser el número de votos en la segunda ronda electoral. En esa segunda ronda solo hay dos candidatos que se pelean entre ellos. Si pasan Clinton y Sanders:

1. $\underset{v_1+v_3}{\text{Clinton}}\ v.\underset{v_2}{\text{Sanders}} \Rightarrow C \succ S$
2. $\underset{v_1+v_2}{\text{Sanders}}\ v.\underset{v_3}{\text{Trump}} \Rightarrow S \succ T$

Por transitividad uno esperaría que $C \succ T$, sin embargo:

3. $\underset{v_2+v_3}{\text{Trump}}\ v.\underset{v_1}{\text{Sanders}} \Rightarrow T \succ C$

> Es decir, que se viola el supuesto de la transitividad. Esta función social da el mismo peso a todos los votos pero no cumple con la transitividad: la función social podría cumplir la transitividad si le da todo el peso a uno solo de los votantes. Solo una decisión dictatorial cumple con la transitividad. $\rightarrow$ es un problema bastante serio.
> ■

2.4.3 Paradoja de Allais

Esto tiene que ver con la independencia de alternativas irrelevantes. Afecta el supuesto de la independencia. Suponga que se tienen las siguientes loterías:

En este caso, la mayoría prefirió la lotería 2 a la lotería 1, incluyendo al profe. Pero ahora analice la siguiente situación con otras dos loterías:

Ahora en este caso hay muchas menos personas que quieren la lotería 4, y casi todos prefieren la lotería 3 (incluyendo al profe). La paradoja es que la lotería 1 es igual a una lotería compuesta:

$$\ell_1 = \ell[\ell_3, 0, 0.1]$$
$$\ell_2 = \ell[\ell_4, 0, 0.1]$$

Esto es por la equivalencia de los repagos finales. Y la teoría dice que:

$$\ell_3 \succ \ell_4 \Rightarrow \ell_1 \succ \ell_2$$

Pero está sucediendo al revés, $\ell_1 \succ \ell_2$ se está violando. Esto es algo que pasa con relativa frecuencia. No hay una explicación de esto todavía, pero lo más importante es observar que la lotería 3 es diferente a la lotería 4: la lotería 3 tiene certeza a ganarse los 10 millones, pero en la lotería 4 entra un tema de aversión al riesgo y aversión al remordimiento.

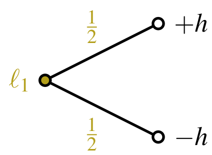
Existe una probabilidad donde se puede ganar 0, y es algo que se puede recordar toda la vida: eso es aversión al remordimiento y puede ser lo que está distinguiendo a una de la otra.

Ahora vamos a ver la aversión al riesgo.

2.5 Aversión al riesgo

Suponga que:

1. Se tiene una riqueza inicial w_0
2. Se tiene una lotería



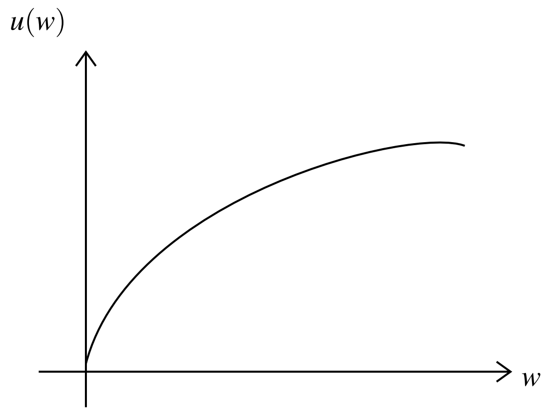
Aquí la mayoría de personas no tomarían esta lotería, no estarían dispuestos. La manera de verlo sería así: si no se toma la lotería la utilidad cardinal sería $u(w_0)$, y esto sería mayor que la utilidad esperada de la lotería:

$$\begin{aligned} u(w_0) &> \frac{1}{2}u(w_0+h)+\frac{1}{2}u(w_0-h) \\ u(w_0) &> \frac{u(w_0+h)+u(w_0-h)}{2} \\ 2(w_0) &> u(w_0+h)+u(w_0-h) \end{aligned}$$

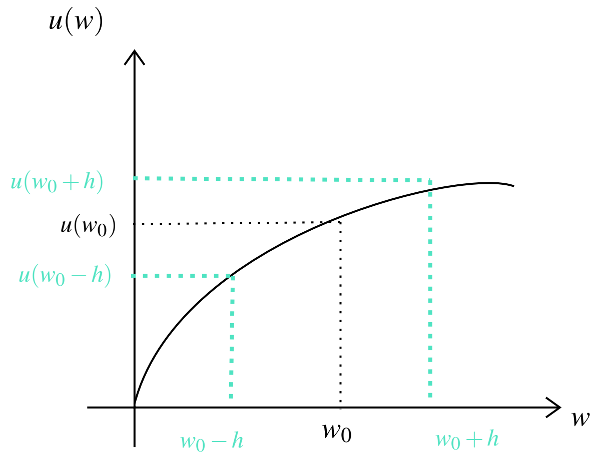
Esto se puede reescribir de manera tal que se puede entender mejor qué es lo que significa:

$$\underbrace{u(w_0)-u(w_0-h)}_{\substack{\text{utilidad}\\ \text{marginal}}} > u(w_0+h)-u(w_0)$$

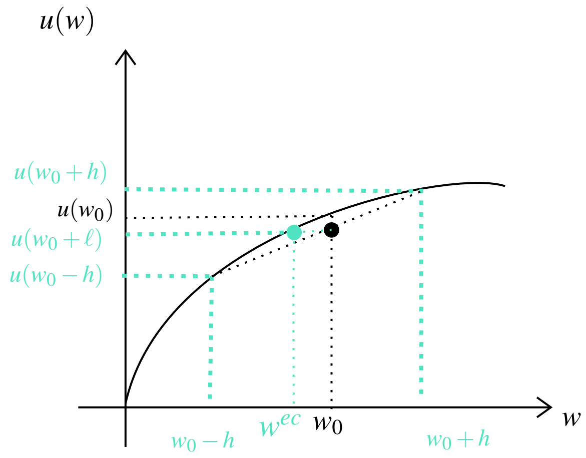
Ahora esto sí ya tiene una interpretación económica: las utilidades marginales decrecientes. La intuición de por qué las utilidades marginales son decrecientes es que: hay saciedad, cada vez se necesita menos de eso. Esto también pasa en las utilidades cardinales. Gráficamente esto se ve así:



Una utilidad marginal decreciente se ve como lo gráfica anterior: es una curva cóncava. Pero ahora hay que ver gráficamente como son las utilidades esperadas.
Una lotería provoca la siguiente situación:



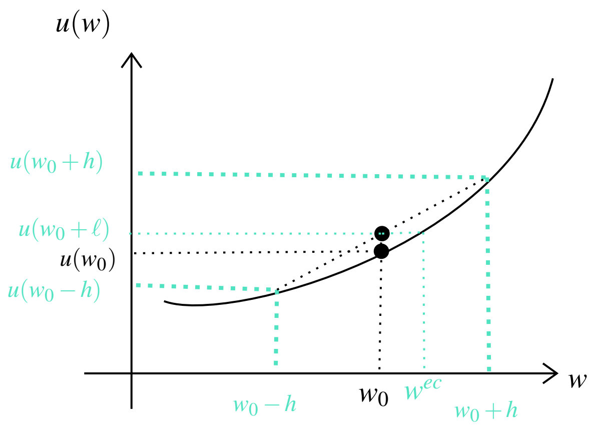
Eso que tenemos ahí sería la utilidad cardinal y los puntos de la lotería, pero ahora hay que ver cómo graficar la utilidad esperada de la lotería. La manera en que se grafica sería como una línea entre los dos puntos.



Nos interesa el punto en medio (negro) que sería la utilidad esperada de la lotería $E[u(w_0+\ell)]$ y lo que gráficamente se está viendo que la utilidad esperada de la riqueza más la lotería es menor que la utilidad de no tener la lotería $E[u(w_0+\ell)] < u(w_0)$.
Interesa otro concepto: donde la utililidad esperada de la lotería intersecta con la utilidad cardinal: es el nivel de riqueza que yo necesitaría para tener la misma utilidad que el nivel de riqueza más la lotería. El equivalente cierto w^{ec} es el nivel de riqueza que para mí es igual a la lotería. En este caso $w^{ec} < w_0$. Por eso $\pi = w_0 - w^{ec}$ que es una prima de seguro.

Definición 2.5 — Equivalente cierto. Es lo que estaría dispuesto a pagar (podría ser un accidente y un seguro) para salir del riesgo.

Ahora vamos a ver una utilidad cardinal de una persona que sea amante al riesgo. Una utilidad cardinal que es amante al riesgo se ve así:



Ahora en este caso más bien $w_{ec} > w_0$ y tenemos que $w^{ec} - w_0$ sería lo que estaría dispuesto a pagar por jugar la lotería: es en sí mismo una lotería $\rightarrow$ el máximo que pagaría por comprar una lotería.
De hecho esto pasaba en la tarea: personas que están dispuestas a pagar una lotería y también a pagar un seguro.

2.6 Actitudes ante el riesgo

Suponga que se tienen las loterías $\ell_1(a,b,\alpha)$ y $\ell_2(\alpha a + (1-\alpha)b, 0, 1)$. La segunda lotería me paga el premio de fijo, no hay riesgo. Ahora:

- Si una persona $\ell_1 \succ \ell_2$ es amante al riesgo: $u'' > 0$. Esto significa que la utilidad marginal es creciente en la riqueza.

- Si una persona $\ell_1 \sim \ell_2$ es neutral al riesgo: $u'' = 0$. Esto significa que la utilidad marginal es lineal en la riqueza.
- Si una persona $\ell_2 \succ \ell_1$ es aversa al riesgo: $u'' < 0$. Esto significa que la utilidad marginal es decreciente en la riqueza.

2.6.1 Aversión al riesgo

Se van a ver varias definiciones se lo que significa ser averso al riesgo:

1. Una persona al riesgo sería entonces aquella que prefiere una lotería con el valor esperado a una lotería general con probabilidades positivas para los distintos estados de la naturaleza.

$$\ell\left[\alpha a + (1-\alpha)b, 0, 1\right] \succ \ell(a, b, \alpha)$$

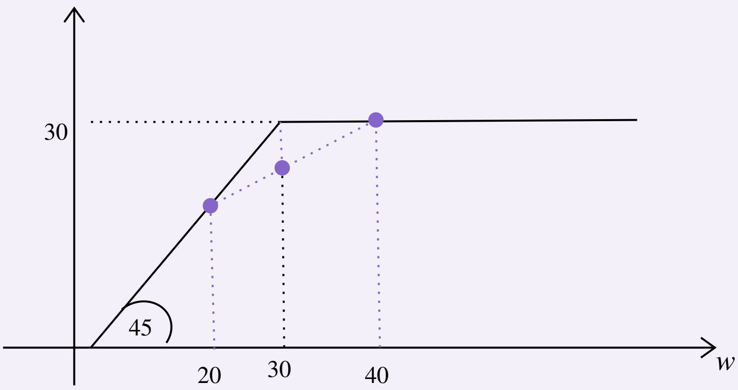
2. Pero también hay más definiciones de aversión al riesgo. Una es que existe un ruido ε que tiene un valor esperado igual a 0 $E[\varepsilon] = 0$ tal que la utilidad mía inicial es mayor que la utilidad esperada $E[u(w_0 + \varepsilon)] = 0$. Así:

$$u(w_0) > E[u(w_0 + \varepsilon)] = 0$$

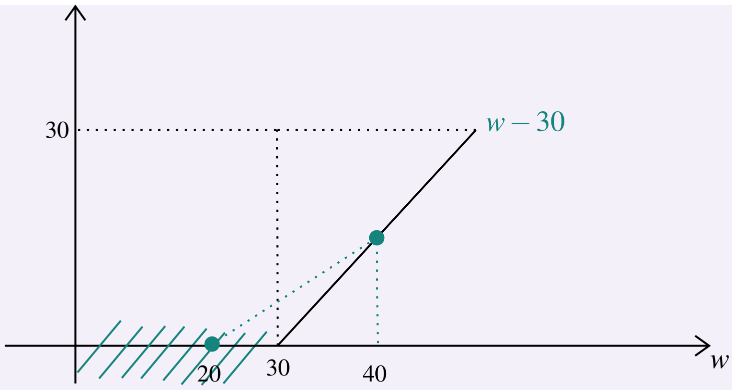
Así, se tiene una utilidad cardinal. En la primera habían solo preferencias, pero ya con esta definición se introducen utilidades cardinales.

3. $u(w)$ es cóncava. Ni siquiera tiene que ser diferenciable la función.

Ejemplo 2.7 — Función cóncava no diferenciable. Un banco presta \$30 millones de USD y el empresario debe hacer un único pago al final del préstamo. El empresario tiene un riqueza w del negocio. Ahora, hay que ver los repagos que le quedan al banco y al empresario:



Esto es el repago de una deuda riesgosa.
Si la riqueza del empresario, al final del préstamo, es mayor a 30, el empresario le va a poder pagar al banco. Pero si al final del préstamo termina con menos riqueza que la riqueza inicial, no le podría pagar, el banco le embargaría la garantía que el empresario dio. Si el empresario queda, por ejemplo, con \$ 20 millones, eso es lo más que podría recuperar el banco.
Esta función de repago no es diferenciable en todos sus puntos. Sin embargo, uniendo dos puntos cualesquiera en la función de repago, la línea que une los puntos queda por debajo de la función de repago, con lo cual es una función cóncava y por ende hay aversión al riesgo.
Ahora hay que ver la del empresario.



El empresario tiene su riqueza inicial 30, y si su riqueza final termina por debajo de 30, todo se lo recoge el banco y se queda en 0. Pero si termina por encima de 30 le van a quedar la riqueza final menos los 30 $w-30$.
Esta función tampoco es diferenciable, pero es convexa y por ende el repago esperado está por encima. Entonces si le ofrecieran una lotería donde puede perder 10 con probabilidad $\frac{1}{2}$ y ganar 10 con probabilidad $\frac{1}{2}$ sí jugaría esa lotería.
Esto es una estrategia que hacen las empresas quebradas que se llama *apostar por la resurrección*. Por eso es importante intervenir una empresa o un banco cuando está en situaciones como estas.
El eje y se tiene el repago final. Además, por la responsabilidad limitada no se podrían quitar de las acciones por ejemplo.

■

Vamos a ver más definiciones de aversión al riesgo.

4. u es diferenciable dos veces y $u'' < 0$. Esta es la forma más fácil pero tiene supuestos por detrás.
5. Esta tiene un contenido económico más interesante, y aunque la matemática se parece a la anterior, la intuición económica aquí es más interesante.

$$\underbrace{E\left[u(w_p+\pi_e+\varepsilon)\right]}_{\text{riesgo}} = \underset{\text{no riesgo}}{u(w_0)} \quad \pi_e > 0 \tag{2.1}$$

Entonces note que del lado derecho de la igualdad no se toma riesgo y del lado izquierdo sí te toma riesgo. Aquí lo que se está diciendo es que se está dando un premio por jugar: hay una prima por invertir $\rightarrow$ yo estoy dispuesto a jugar pero solo si me ofrecen un extra por jugar. Pero si

$$E\left[u(w_0+\varepsilon)\right] = u(w_0-\pi_i) \quad \pi_0$$

más bien se dice que la gente está dispuesta a pagar una prima para evitar la lotería riesgosa.

- π_e: prima para invertir
- π_i: prima de seguro para salir del riesgo

Luego, $w_0-\pi_i =$ equivalente cierto.

Ahora vamos a ver la aversión al riesgo absoluta, relativa y sus significados mediante la aproximación Arrow-Pratt. Para esto vamos a usar la expresión 2.1.

2.7 Aproximación Pratt-Arrow

Este es el mismo Kenneth Arrow que hemos venido viendo. Se tiene la siguiente situacióN:

$$\overset{LHS}{E\left[u(w+\varepsilon)\right]} = \overset{RHS}{u(w-\pi_i)} \quad E\left[\varepsilon\right] = 0$$

Ahora se van a hacer aproximaciones de ambos lados de la ecuación:

- LHS: lo que se va a hacer es una aproximación de la utilidad cardinal mediante una expansión de Taylor alrededor de w.

$$u(w+\varepsilon) = u(w) + \varepsilon u'(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}u''(w) + \frac{\varepsilon^3}{6}u'''(w+\alpha\varepsilon)$$

Esto es una aproximación de Taylor exacta. Entonces esto dice que:

$$u(w+\varepsilon) \simeq u(w) + \varepsilon u'(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}u''(w)$$

Ahora se va a sacar la utilidad esperada:

$$\begin{aligned} u(w+\varepsilon) &\simeq u(w) + \varepsilon u'(w) + \frac{\varepsilon^2}{2}u''(w) \\ E\left[u(w+\varepsilon)\right] &\simeq u(w) + 0 + \frac{\overbrace{\sigma_\varepsilon^2}^{E[\varepsilon^2]}}{2}u''(w) \end{aligned}$$

- RHS: aquí se hace lo mismo

$$u(w-\pi_i) \simeq u(w) - \pi_i u'(w)$$

Esto es una aproximación de Taylor súper mala. Pero se sigue ahí planteando la igualdad entre el lado izquierdo y el lado derecho:

$$\begin{aligned} u(w) + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}u''(w) &= u(w) - \pi_i u'(w) \\ \cancel{u(w)} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}u''(w) &= \cancel{u(w)} - \pi_i u'(w) \\ \pi_i u'(w) &= \frac{-\sigma_\varepsilon^2}{2}u''(w) \end{aligned}$$

$$\boxed{\pi_i = \frac{-\sigma_\varepsilon^2}{2}\frac{u''(w)}{u'(w)}}$$

Esto es la aproximaxión Arrow-Pratt.

Aquí lo primero que interesa es $\frac{u''(w)}{u'(w)}$ que es el concepto económico de la aversión al riesgo absoluta ARA_i:

$$ARA_i = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Ahora hay que ver el signo de la aversión al riesgo absoluta:

- La segunda derivada de la utilidad cardinal $u''(w)$ es negativa si es aversa al riesgo
- La primera derivada de la utilidad cardinal $u'(w)$ es positiva

Por lo tanto $ARA_i = \frac{\overbrace{u''(w)}^{-}}{\underbrace{u'(w)}_{+}} > 0$, porque el signo de menos al frente lo compensa y lo hace positivo.

Aquí lo que sorprende de la aversión al riesgo absoluta es que la segunda derivada está "aflatada" por la primera derivada.

La utilidad cardinal admite transformaciones lineales positivas. Si a la función $u(x) = \ln x$ se le aplica la tranformación $\tilde{u} = 1000\ \ln x$ desplaza a la segunda derivada, pero no cambia la posición frente al riesgo porque al haberse aplicado una transformación lineal positiva, no cambia el signo, por lo que, la única forma para poder comparar dos agentes que tienen esas transformaciones lineales positivas, es que se "deflata" por la primera derivada, para no dejarse influir por ese b de la transformación lineal.

Ejemplo 2.8 — Aversión al riesgo absoluta y la segunda derivada 'deflatada'. Suponga un agente con una función de utilidad u. Ahora, suponga otro agente con una función de utilidad $\tilde{u}$ que es una transformación lineal de u. Así:

$$u$$
$$\tilde{u} = a + b\ u$$

Si $b = 1\ 000$ entonces:

$$\tilde{u} = a + 1000\ u$$

Entonces, para comparar la aversión al riesgo de estos agentes:

$$\tilde{u}' = 1000\ u'$$
$$\tilde{u}'' = 1000\ u''$$

Y así, para ver la aversión al riesgo absoluta:

$$\frac{\tilde{u}''}{\tilde{u}'} = \frac{\cancel{1000}\ u''}{\cancel{1000}\ u'}$$

■

Esta aproximación sirve para ruidos relativamente pequeños y simétricos.

Ahora vamos a ver un teorema para comparaciones sobre aversiones al riesgo.

2.7.1 Teorema de Pratt (1964): comparaciones sobre la aversión al riesgo

Suponga que se tiene a dos personas.

Teorema 2.1 — Teorema de Pratt (1964). #1 Es globalmente más averso al riesgo que la persona #2 si cualquiera de estas condiciones se cumplen. Todas estas condiciones van a ser equivalentes:

1. La aversión al riesgo absoluta de la persona #1 ARA_1 para cualquier nivel de riqueza es mayor que la de la persona #2

$$ARA_1(w) > ARA_2(w) \quad \forall\, w$$

2. $\exists G$ tal que $G' > 0 \wedge G'' < 0$ es una función cóncava (con utilidad marginal decreciente) tal que:

$$u_1(w) = G[u_2(w)]$$

Esto quiere decir que u_1 es una *concavización* de u_2. Entonces lo que se está haciendo es agarrar la utilidad de la segunda persona (que es cóncava) y se le está transformando y se la está haciendo más cóncava y entonces queda como la de #1.

3. $\pi_{i1} > \pi_{i2}$ donde π_i es la prima de seguro. El individuo #1 está dispuesto a pagar una prima de seguro más alta que el individuo #2.
4. $\pi_{e1} > \pi_{e2}$ donde π_e es la prima de inversión. Al individuo #1 le tienen que pagar una prima para invertir más alta que el individuo #2.
5. $u_2(w)$ es cóncava. Si se le saca la inversa $u_2^{-1}(w)$ es convexa. De esta forma: $\underbrace{u_1}_{\text{cóncava}}\left[\underbrace{u_2^{-1}(w)}_{\text{convexo}}\right]$.

   Pero habíamos dicho que #1 es más averso al riesgo que #2, así que gana la concavidad del #1, y por ende toda la expresión es cóncava. Está relacionada con la condición #2.

Si se pide comparar entre dos agentes y sus aversiones al riesgo basado en sus utilidades, solo se va a tener que verificar una de las 5 condiciones. A veces, dependiendo del contexto, es más fácil encontrar una u otra. Están ordenadas de más fácil a más difícil.

2.8 Aversión al riesgo relativa

La aversión al riesgo relativa se plantea una pregunta diferente: se tiene un riesgo ε que afecta a toda la riqueza, y se tiene una prima π como porcentaje de la riqueza y se está dispuesto a salir de ella. Entonces se tiene:

$$E\left[u(w(1+\varepsilon)\right] = E\left[u(w(1-\pi_i)\right]$$

Esto se puede hacer una aproximación de Taylor y se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\pi_i &\simeq -\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}\cdot w\frac{u''(w)}{u'(w)} \\
\underbrace{RRA}_{\substack{\text{aversión}\\ \text{al riesgo}\\ \text{relativa}}} &\equiv -w\cdot\frac{u''(w)}{u'(w)} \\
&= -w\cdot ARA
\end{aligned}$$

La interpretación es: qué porcentaje de mi riqueza estoy dispuesto a ceder para quitarme de encima un riesgo que afecta toda mi riqueza.

Otra interpretación puede ser la siguiente.

Ejemplo 2.9 — Otra interpretación de la aversión al riesgo relativa. Si la utilidad marginal de un agente es $u'(w) = MU$. Así, entonces la aversión al riesgo relativa se puede expresar como:

$$RRA = \frac{-w}{MU}\cdot\frac{\partial MU}{\partial w}$$

Esto es una elasticidad de la utilidad marginal respecto de la riqueza. ■

Ahora esto se va a conectar con algo que ya se vio: la condición de Arrow para evitar la paradoja de San Petersburgo es que **no hubiera ni techo ni piso**. Esto tiene una condición desde el punto de vista de la aversión al riesgo relativa.

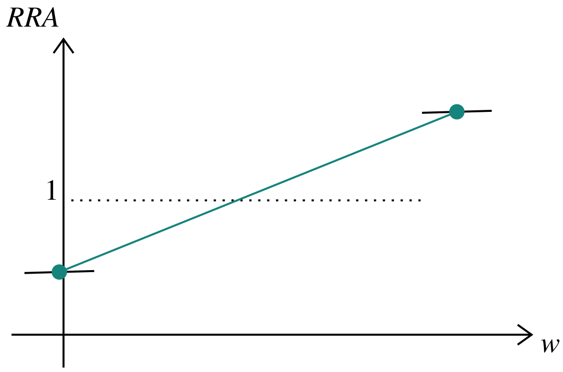
Entonces:

- Para que no haya piso, cuando $w \to 0 \to RRA < 1$
- Para que no haya techo, cuando $w \to +\infty RRA > 1$

Entonces, Arrow dice que la aversión al riesgo relativa como función de la riqueza:

$$\frac{\partial RRA}{\partial w} > 0$$

Es decir, que tiene que ser creciente como función de la riqueza, porque, dadas las condiciones de Arrow, gráficamente se está condicionando a que esto se vea así:



Entonces:

- Aversión al riesgo absoluta: es cuánto estoy dispuesto a pagar para quitarme un riesgo. Entonces, conforme me vuelvo más rico estoy dispuesto a asumir más riesgo (menos averso al riesgo en términos absolutos):
$$\frac{\partial ARA}{\partial w} < 0$$
Los economistas esperan que caiga conforme aumente la riqueza.
- Aversión al riesgo relativa: aquí cambia la definición, porque aquí es más bien me van a quitar un porcentaje de mi riqueza y podría representar mucho más. Entonces, un millonario, que le digan que le van a quitar un 1% es un montón de plata.
Pero aquí más bien los economistas esperan que aumente conforme aumenta la riqueza (por el argumento del rico que ya se explicó).

2.8.1 Aversiones y tolerancias

A manera de resumen:

$$ARA \equiv -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$
$$RRA \equiv -w \cdot \frac{u''(w)}{u'(w)}$$

Ahora se van a definir los inversos de cada una de estas expresiones $T(w)$ y $RT(w)$ (tolerancia al riesto):

$$ARA \equiv -\frac{u''(w)}{u'(w)} \rightarrow \qquad T(w) = \frac{1}{ARA(w)} = -\frac{u'(w)}{u''(w)}$$
$$RRA \equiv -w \cdot \frac{u''(w)}{u'(w)} \rightarrow \qquad RT(w) = \frac{1}{RRA(w)} = \frac{-u'(w)}{wu''(w)}$$

Así: $T(w)$ es la tolerancia (absoluta) al riesgo y $RT(w)$ es la tolerencia relativa.

- $T'(w) > 0$: la tolerancia al riesgo se hace más grande conforme aumenta la riqueza
- $RT'(w) < 0$: la tolerancia relativa al riesgo se hace más pequeña conforme aumenta la riqueza

Esto es lo que los economistas consideran lógico que tiene que pasar. Ahora se va a ver una familia muy grande de funciones de utilidades. Se llaman las utilidad HARA (LRT).

2.9 Funciones HARA (LRT)

Las utilidades HARA son una utilidad de la riqueza o del consumo que está dada por:

$$u(w) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{1-\gamma} \quad b>0$$

Viendo la primera derivada:

$$\begin{aligned}
u'(w) =& \cancel{(1-\gamma)} \cdot \frac{\gamma}{\cancel{1-\gamma}}\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{1-\gamma-1} \cdot \frac{a}{\gamma}\\
=& \cancel{\gamma}\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-\gamma} \cdot \frac{a}{\cancel{\gamma}}\\
=& a\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-\gamma}
\end{aligned}$$

Y ahora hay que ver la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
u''(w) =& -a\cancel{\gamma}\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-\gamma-1} \cdot \frac{a}{\cancel{\gamma}}\\
=& -a^2\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-(\gamma+1)}
\end{aligned}$$

Y con esto se ya se puede calcular la aversión al riesgo absoluta:

$$\begin{aligned}
ARA =& \frac{a^{\cancel{2}}\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-(\gamma+1)}}{\cancel{a}\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-\gamma}}\\
=& a\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-(\gamma+1)--\gamma}\\
=& a\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-\gamma-1+\gamma}\\
=& a\left[\frac{aw}{\gamma}+b\right]^{-1}\\
=& \frac{a}{\frac{aw}{\gamma}+b}\\
=& \frac{a}{\frac{aw+b\gamma}{\gamma}}\\
=& \frac{a\gamma}{aw+b\gamma}\\
=& \frac{1}{\frac{\cancel{a}w}{\cancel{a}\gamma}+\frac{b\cancel{\gamma}}{a\cancel{\gamma}}}\\
=& \frac{1}{\frac{w}{\gamma}+\frac{b}{a}}
\end{aligned}$$

Esta sería la aversión al riesgo absoluta de esta utilidad. La tolerancia al riesgo de esta utilidad sería:

$$T(w) = \frac{w}{\gamma} + \frac{b}{a}$$

Esta es una función de tolerancia al riesgo decreciente sobre la riqueza. Esto tiene sentido si se toma en cuenta que es una función lineal, por eso se les llama *linear risk tolerance (LRT)*.

Estas utilidades HARA tienen esa característica. Ahora note que se había dicho que lo que tenía sentido era que:

$$T'(w) = \frac{1}{\gamma} \; \gamma > 0$$

O sea que el γ tiene que ser positivo.

Vamos a recapitular lo que se ha visto con las utilidades HARA. Habíamos visto que la aversión al riesgo absoluto se definía como $ARA = \dfrac{1}{\frac{w}{\gamma} + \frac{b}{a}}$ y la tolerancia al riesgo $T(w) = \frac{w}{\gamma} + \frac{b}{a}$.

Con respecto a la aversión al riesgo relativo era $RRA = w \cdot ARA = \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + \frac{b}{aw}}$ y la tolerancia relativa al riesgo era $RT(w) = \frac{1}{\gamma} + \frac{b}{a}w$.

Habíamos dicho que la tolerancia al riesgo debía ser creciente conforme aumentaba la riqueza $T'(w) = \frac{1}{\gamma} > 0$ siempre y cuando $\gamma > 0$ (más adelante se va a estudiar que pueden haber casos HARA donde $\gamma < 0$ pero de momento se asume que es positivo).

Luego, con respecto a la tolerancia relativa al riesgo $RT'(w) = \frac{-b}{aw^2}$ y tenía sentido que la primera derivada fuera negativa, o sea, que sea decreciente con respecto a la riqueza. Como se suponía que b tiene que ser mayor a 0 para que esto tenga sentido $b > 0$, por lo que también a tendría que ser mayor a 0 $a > 0$.

Pero, específicamente, si se dice que el límite de la aversión al riesgo relativo cuando la riqueza w tiende a infinito, tiene que ser mayor que 1 según Arrow, para que no se de lo de la paradoja de San Petersburgo:

$$\lim_{w \to +\infty} RRA > 1$$

Y la tolerancia del riesgo relativo, su límite cuando w tiende a infinito:

$$\lim_{w \to \infty} RT = \frac{1}{\gamma} < 1 \;\rightarrow \gamma > 1$$

$\frac{1}{\gamma}$ tiene que ser menor que 1, y esto entonces implica que $\gamma > 1$. Entonces la teoría dice que:

- $b > 0$
- $a > 0$
- $\gamma > 1$

Esto es lo ideal, pero no siempre se va a dar así.

2.9.1 Casos especiales de HARA

Para recordar:

$$u(w) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[\frac{aw}{\gamma} + b\right]^{1-\gamma} \quad b > 0$$

$$T(w) = \frac{w}{\gamma} + \frac{b}{a}$$

Vamos a ver casos especiales:

1. $\gamma = +\infty$: viendo la tolerancia al riesgo sería $T(w) = \frac{b}{a}$, y es constante, y como es el inverso de la aversión al riesgo absoluta también sería constante, y esta aversión al riesgo absoluta constante se llama *CARA*.

$$u(w) = -\exp\{-aw\}$$

Hay que analizar si tiene techo, piso, etc.

2. $\gamma < 0$ implicaría que $T'(w) < 0$ y la tolerancia al riesgo disminuiría en riqueza y más bien *ARA* aumentaría en riqueza. Esto teóricamente no tiene mucho sentido.
3. $\gamma = -1$: este es un caso de gran interés. Es negativa, pero cuando es igual a -1 se tiene $u(w) = c + dw - \frac{e^2}{2}w^2$ y es una utilidad cuadrática. Y con esto $u'(w) = -e < 0$ y para que sea averso al riesgo tendría que ser que $-e < 0$ y esto se cumple cuando $e > 0$. Esto económicamente tampoco tiene mucho sentido pero existe.
4. $\gamma > 0$ y en este caso la tolerancia al riesgo $T'(w) > 0$ y esto económicamente no da problemas.
5. $\gamma = 0$ provoca la tolerancia al riesgo se indefina hacia infinito. Económicamente ser infinitamente tolerante al riesgo significa, no que sea amante al riesgo, si no más bien otra cosa. Viendo la utilidad cardinal con $\gamma = 0$ habría que hacer *L'Hopital*. Pero la idea es que es infinitamente tolerante al riesgo y entonces la aversión al riesgo absoluta $ARA(w) = 0$. No es amante al riesgo, solo lo tolera; son cosas diferentes. Es neutro al riesgo.
6. $b = 0$. Caso de interés. Quedaría la función de utilidad $\frac{w^{1-\gamma}-1}{1-\gamma} = u(w)$ que es la utilidad de potencia. Aquí la tolerancia al riesgo es igual a $T(w) = \frac{w}{\gamma}$ y la tolerancia al riesgo relativo sería $RT(w) = \frac{1}{\gamma}$. Ahora veamos la primera derivada de la función de potencia:

$$\begin{aligned} u'(w) =& \cancel{(1-\gamma)} \cdot \frac{w^{1-\gamma-1}}{\cancel{1-\gamma}} \\ =& w^{-\gamma} \\ u''(w) =& -\gamma w^{-\gamma-1} \end{aligned}$$

Y con esto se puede calcular la aversión relativa al riesgo:

$$\begin{aligned} RRA =& -w \cdot \frac{u''(w)}{u'(w)} \\ =& w \cdot \frac{\gamma w^{-\gamma-1}}{w^{-\gamma}} \\ =& w \cdot \gamma w^{-\gamma-1--\gamma} \\ =& w \cdot \gamma w^{-\gamma-1+\gamma} \\ =& \cancel{w} \cdot \frac{\gamma}{\cancel{w}} \\ =& \gamma \end{aligned}$$

Es decir, que esta función de utilidad tiene la característica de que se llama utilidad de potencia o *isoelástica*, pero también se llaman *CRRA* (aversión al riesgo relativa constante). Esta función de utilidad se usa mucho en economía, y ahora vamos a ver casos especiales de esta.

2.9.2 Utilidades CRRA

Considere la función $u(w) = \frac{w^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ y su aversión al riesgo relativa es $RRA = \gamma$. Ahora, vamos a ver casos especiales:

- $\gamma = \frac{1}{2}$: esto implica que $u(w) = 2\sqrt{w}$. Esta función de utilidad tiene piso y no tiene techo. Note que:

- $u(0) = 2\sqrt{0} = 0 < 1 \;\rightarrow\;$ tiene piso
- $u(+\infty) = 2\sqrt{+\infty} = +\infty > 1 \;\rightarrow\;$ no tiene techo

- $\gamma = 2$ genera $u(w) = c - \frac{1}{w}$. Esta función de utilidad tiene techo y no tiene piso. Note que:
  - $u(0) = c - \frac{1}{0} = -\infty < 1$ no tiene piso
  - $u(+\infty) = c - \frac{1}{+\infty} = c$ tiene techo
- $\gamma = 1$ queda una indefinición $\frac{0}{0}$ y hay que usar $L'Hopital$. Entonces queda $u(w) = \ln w$. Esta función de utilidad no tiene ni techo ni piso. Note que:
  - $u(0) = \ln 0 = -\infty < 1 \;\rightarrow\;$ no tiene piso
  - $u(+\infty) = \ln +\infty > 1 \;\rightarrow\;$ no tiene techo

Estos son posibles casos que podrían salir, pero lo ideal sería que:
- $\gamma > 1$
- $b > 0$
- $a > 0$

Ejercicio 2.2 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿Cuáles condiciones impone la Superparadoja de San Petersburgo a las utilidades?* $\rightarrow$ Arrow dice que las utilidades deben tener piso y techo para que las utilidades esperadas no vayan a infinito.
   Esto se dice que es una condición suficiente, ¿esto qué significa? $\rightarrow$ Cuando imponemos un piso y un techo ya las utilidades no van a dar infinito y no se va a presentar la Superparadoja de San Petersburgo y con esto el axioma de comparabilidad no se verá violada.

   A pesar de esto, utilidades como la logarítmica no funcionan y aún así se usan! Hay que tener cuidado con esto.
2. *¿Qué puede decir acerca de las funciones de utilidad isoelástica o de potencia?* $\rightarrow$ Es de elasticidad constante.
   ¿Pero desde el punto de vista financiero, qué características tiene? $\rightarrow$ Son un caso especial de las funciones HARA cuando $b \rightarrow 0$. Tiene aversión al riesgo relativo constante. Dice que a medida que aumente el ingreso del agente, su aversión relativa al riesgo se mantiene constante y no varía.
   Por eso es que en finanzas se llama CRRA. ¿Estas funciones tienen piso o techo? $\rightarrow$ Depende de los valores de γ. γ es la RRA en esta función y puede tomar varios valores posibles.
   Con las funciones RRA ninguna cumple ambas: que tenga piso o techo; cumplen una u otra. El caso especial de la función logarítmica es que esta no cumple ninguna de las dos.
3. *¿Qué puede decir acerca de la aversión al riesgo absoluta?* $\rightarrow$ Se calcula haciendo la segunda derivada de la utilidad sobre la primera derivada de la utilidad. Dice que durante toda la función va a ser de aversión al riesgo absoluta constante.
4. *¿Qué se sabe acerca de la aversión al riesgo absoluta como función de la riqueza?* $\rightarrow$ Cuando aumenta la riqueza va a disminuir la aversión absoluta al riesgo.

■

3. Definiciones de rendimientos

Una de las problemáticas con lo que hemos venido viendo es que las utilidades son difíciles de percibir y comprender, por lo cual se suele utilizar los repagos y los pagos. Se va a empezar por definir qué son los rendimientos.

Hay que averiguar sobre qué son los siguientes conceptos:

- Ex-dividendo
- Hipótesis de la caminata aleatoria

Estos conceptos son para índices financieros. Están relacionados con la raíz unitaria pero son un poco diferentes aunque sí hay cierta relación.

3.1 Rendimientos

El ejemplo que se venía usando era el de Apple pero ahora sus rendimientos están muy altos y no es algo muy representativo. Vamos a ver *JPM* : JP. Morgan. Este es el banco más valioso de los Estados Unidos y uno de los más valiosos del mundo.

Suponga que:

1. Se compra una acción de la empresa el 30.06.2020 que costó \$94.06. Esta inversión va a ser de un mes.
2. En ese mes, *JPM* declara un dividendo de \$0.90 (por cada acción se reciben 90 centavos de dividendos)
    - Acciones están ex-dividendo 2.07.2020
    - Accionistas reciben pago el 31.07.2020
3. Se venden las acciones el 31.07.2020 a las 6 pm (suponiendo que ya se recibió el dividendo). Se vendieron en \$96.64

Ahora se va a considerar cuál fue el rendimiento de la acción, que aunque parece simple, tiene sus matices.

Definición 3.1 — Rendimiento simple. El rendimiento mensual simple se define como:

$$
\begin{aligned}
\tilde{r}_{m\ c} &= \frac{\text{cuánto se gana vendiendo} + \text{dividendo} - \text{la inversión inicial}}{\text{la inversión inicial}} \\
&= \frac{\$94.64 + \$0.9 - \$94.06}{\$94.06}
\end{aligned}
$$

Este rendimiento se puede dividir conceptualmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{m\ t} =& \frac{\text{cuánto se gana vendiendo} - \text{la inversión inicial}}{\text{la inversión inicial}} + \frac{\text{dividendo}}{\text{la inversión inicial}} \\
=& \underbrace{\frac{\$94.64 - \$94.06}{\$94.06}}_{\substack{\textit{capital gains} \\ \text{plusvalía}}} + \underbrace{\frac{\$0.9}{\$94.06}}_{\substack{\textit{dividend yield} \\ \text{rendimiento del dividendo}}} \\
=& 0.0274 + 0.00956 \\
=& 2.74\% + 0.956\% \\
=& 3.7\% \text{ mensual}
\end{aligned}$$

Usualmente se suelen dar medidas con 4 decimales en economía financiera porque son muy importantes y hacen diferencia.

La razón por la cual es importante hacer esta distinción es porque son diferentes formas de ganancia $\rightarrow$ hay un tratamiento fiscal distinto. En Costa Rica, el *capital gains* paga un impuesto del 15% pero si es *dividend yield* para un 30%. En Estados Unidos también pasa lo mismo, hay un tratamiento diferenciado.

Y esto aplica no solo a las acciones, sino que puede see también en una casa que esté en *AirBnB*: se compra una casa en Barrio Escalante y se alquila a un restaurante: ahí los *capital gains* sería la plusvalía que gane la casa en el tiempo y el *dividend yield* serían los alquileres que se perciban.

Entonces, si el rendimiento mensual simple es de 3.7%, ¿cuánto es el rendimiento anualizado?

Definición 3.2 — Rendimiento anualizado. El rendimiento anual se define como:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_{a,t} =& (1 + r_{m\ t})^{12} - 1 \\
=& (1.037)^{12} - 1 \\
=& 0.5464 \\
=& 54.64\%
\end{aligned}$$

Que sería muy diferente de simplemente multiplicar por doce el rendimiento mensual, aquí es un rendimiento compuesto.

Ese es un rendimiento muy alto, y sería muy diferente del rendimiento donde solo se multiplica por 12.

Ahora se va a ver el rendimiento bruto.

Definición 3.3 — Rendimiento bruto. El rendimiento bruto se define como:

$$\begin{aligned}
R_{a\ t} =& 1 + \tilde{r}_{a\ t} \\
=& 1.5464
\end{aligned}$$

Es cuánto queda en bruto de haber hecho la inversión. Si se inviertieron \$100 dólares en *JPM* al inicio del año, se tendrán \$154.64 dólares.

Y ahora sigue otro rendimiento que también se usa. En Estados Unidos habían techo en las tasas de interés de 9%, sin embargo la inflación llegó al 15 o 16%, entonces los bancos para competir por los depósitos era que pagaban el techo de los intereses, pero lo capitabilizaban cada 6 meses.

Entonces pagaban un 4.5% en junio y en dicimbre pagaban 9% sobre el restante y salía un poco más. Entonces se empezaron a capitalizar más frecuentemente y así sucesivamente y de ahí surgió la idea de la capitalización continua.

Definición 3.4 — Tasa continuamente compuesta. Se define la tasa continuamente compuesta como:

$$\begin{aligned} r_{a\,t} &= \ln R_{a\,t} \\ &= \ln(1+\tilde{r}_{a\,t}) \\ &= 0.4360 \\ &= 43.60\% \end{aligned}$$

Entonces si alguien ofrece una tasa continuamente compuesta, eso es equivalente que recibir al final el 54%. Por lo que si se invierten \$100 al inicio del periodo a una tasa continuamente compuesta del 43.60%, al final se van a tener esos \$164.54, es decir ese 54%.

Esta tasa continuamente compuesta del 43.60% es equivalente a un rendimiento anual simple del 54%.

Esto tiene muchos usos en finanzas y es muy fácil de manipular. Pero ahora se quiere encontrar la tasa continuamente compuesta pero mensual.

Definición 3.5 — Tasa mensualmente compuesta. Se define la tasa mensualmente compuesta como:

$$r_{m\,t} = \frac{r_{a\,t}}{12}$$

Es decir, se divide entre 12 la tasa continuamente compuesta anual.

Definición 3.6

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{m\,t} &= e^{r_{m\,t}} - 1 \\ &= 0.037 \\ &= 3.7\% \end{aligned}$$

Entonces, hasta ahora se ha visto:

- Rendimientos simples: intuitivos pero difíciles de manipular
- Rendimientos brutos: muy simples es solo sumar uno a los rendimientos simples
- Tasa continuamente compuesta: no tan intuitivos pero sí son muy utilizados en finanzas.

Ahora se van a pasar a los conceptos de dominancia.

4. Conceptos de dominancia

Hasta ahora hemos discutido los axiomas de la preferencia del inversor, luego los hemos utilizado para desarrollar funciones de utilidad cardinal, y finalmente empleamos las funciones de utilidad para medir las primas de riesgo y derivar medidas de aversión al riesgo. Claramente, cualquier inversor, sea o no averso al riesgo, buscará maximizar la utilidad esperada de su riqueza. El papel de la utilidad esperada se puede utilizar para introducir la economía de la elección bajo incertidumbre.

Se tiene la pregunta siguiente:

- Se tienen dos inversiones riesgosas con repagos cada una de x (una acción en Apple) y y (una acción en Google): $x \wedge y$
- No se van a usar ni el ARA ni el RRA porque no son cosas observables.
- En su lugar, se va a usar la dominancia:
  - Cuáles son las condiciones de las distribuciones de $x \wedge y$ tal que, por ejemplo, $x \succ y$
  - Solo se supondrá que $u' > 0$ o $u'' < 0$.

Es decir, lo único que se hereda de las utilidades es suponer que la utilidad marginal es positiva, o que se es averso al riesgo.

4.1 Conceptos de dominancia

Se va a ir de más restrictivo a menos restrictivo en distribuciones:

1. Dominancia de estado por estado
2. Dominancia estocástica de primer orden (*first order stochastic dominance*): $u' > 0$. Se le llama DEPO.
3. Dominancia estocástica de segundo orden (*second order stochastic dominance*): $u' > 0 \wedge u'' < 0$. Se le llama DESO. Hay un caso especial de esta dominancia que se llama aumento en riesgo.
   - Aumento en riesgo: $u'' < 0$ solamente se pide la aversión al riesgo y no que esté la utilidad marginal positiva
4. Dominancia estocástica de mayor grado: $u^{(n)} > 0$ para n impar y $u^{(n)} < 0$ para n par. Casi no se usa porque si no se tiene tanta fé en las utilidades, menos en las derivadas de orden superiores.

La dominancia estado por estado implica DEPO y esta a su vez implica DESO, pero DESO no implica DEPO (a esto se refiere con más restrictiva a menos restrictiva).

4.1.1 Dominancia estado por estado

Definición 4.1 — Dominancia estado por estado. Sea s un estado de la naturaleza y S un conjunto de estados de la naturaleza. Si

$$x \underset{D}{\succ} y \text{ si } x_s > y_s \ \forall s \in S$$

La proposición anterior se pudo haber afirmado como $x_s \geq y_s$ pero lo importante es que haya al menos una desigualdad estricta.

La expresión $\underset{D}{\succ}$ significa que domina estado por estado. x_s es el pago de x en este estado de la naturaleza s (que puede ser una recesión o un estado de auge o estado de Covid, estado de guerra, etc.).

La condiciones de dominancia se pueden escribir de varias maneras:

- Representación: $y = x + z$ donde $Prob(z \leq 0) = 1$. Está diciendo que y (Walmart) es como x (Amazon) pero un poquito más malo, porque z será negativo o si a caso cero. El repago de Walmart siempre será el repago de Amazon menos un poquito.
- Distribución: $x_s \geq y_s$. Aquí se puede crear una función de densidad en base a los estados de naturaleza.
- Utilidad esperada: $E[u(x)] > E[u(y)]$. Además, si se tienen otras inversiones w y a esa cartera inicial comprar x o y: $E[u(x+w)] > E[u(y+w)]$.
  El problema de esta condición es que es demasiado fuerte. Puede haber un estado de la naturaleza donde Walmart le gane a Amazon (por ejemplo si el servicio postal fallara esto afectaría más a Amazon que a Walmart) entonces sí es posible pensar en estados de naturaleza donde Amazon se vea más afectado que Walmart.
  Entonces si no se cree en este supuesto, hay otro supuesto un poco más débil.

4.1.2 Dominancia estocástica de primer orden (DEPO)

Definición 4.2 — Dominancia estocástica de primer orden. Si

$$x \underset{\substack{\text{DEPO}\\ \text{FOSD}}}{\succ} y$$

y

$$x \sim f(x) \ \text{ y } \ y \sim g(y)$$

Entonces se suponen las siguientes cosas (y las tres condiciones son equivalentes entre sí):

- Distribución: $F(t) \leq G(t)$ $\forall t$ con desigualdad estricta en al menos un t. Si se compra una acción de Amazon y Walmart: ¿cuál es la probabilidad de que esa inversión valga \$100 o menos? Para Amazon, ¿cuál sería ese número? ¿cómo se calcularía esa probabilidad? $\rightarrow$ las distribuciones F y G serían algo así:

  $$F(t) = \int_{-\infty}^{t} F(s)\, ds \qquad G(t) = \int_{-\infty}^{t} G(s)\, ds$$

  Esto lo que dice es que, una distribución dice cuánto son los pagos hasta cierto punto, por eso es el $\leq$. Entonces la condición de la distribución $F(t) \leq G(t)$ dice que x es más atractivo que y porque la probabilidad de que paguen un mayor rendimiento es de $1-F$ y $1-G$.
  Otra forma de verlo es que F y G son las probabilidades de los malos rendimientos. **Entonces la probabilidad de malos rendimientos de x es menor la probabilidad de malos rendimientos de y.**

- Representación: $y \overset{d}{=} x + z$ donde $Prob(z \leq 0) = 1$ por lo que z se puede pensar como un número negativo.

  Ejemplo 4.1 Por ejemplo: $y \sim N(0,1)$ y $x \sim N(1,1)$ y son independientes entre ellos. Por lo tanto, se puede decir que y es igual en distribución a $x-1$ y se escribe así $y \overset{d}{=} x-1$. ¿Será esto igual que la dominancia estado por estado? ¿Existe la probabilidad de que eventualmente sea y menor que x? Asumiendo que son independientes entre ellas.
  Otra forma de decirlo es que esa igualdad de distribución no es decir que sean igual estado por estado, pero la distribución de y es como si se corriera la distribución de $x-1$ es decir, corrida un poco hacia la izquierda.
  Pero no se está diciendo que sean iguales estado por estado. Es muy diferente que la igualdad. ■

- Utilidad esperada: si se tiene una utilidad marginal positiva $u' > 0$ tiene que ser que la utilidad esperada de x tiene que ser mayor que la utilidad esperada de y

$$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(s) \cdot f(s)\, ds > \int_{-\infty}^{\infty} u(s) \cdot g(s)\, ds = E[u(y)]$$

Estas tres condiciones son equivalentes entre sí.

Una de las tareas es que dan inversiones con sus distintos repagos y hay que demostrar si hay dominancia de algún tipo: lo que se hace es que se escoge alguna de esas condiciones.

En otras palabras, la distribución acumulativa de probabilidad (definida en la riqueza, W) para el activo y siempre se encuentra a la izquierda de la distribución acumulativa para x. Si esto es cierto, entonces se dice que x domina a y. La Figura siguiente muestra un ejemplo de dominancia estocástica de primer orden asumiendo que la distribución de riqueza proporcionada por ambos activos es una distribución normal (truncada). Es evidente a partir de la figura que x domina a y porque la distribución acumulativa de y siempre se encuentra a la izquierda de x.

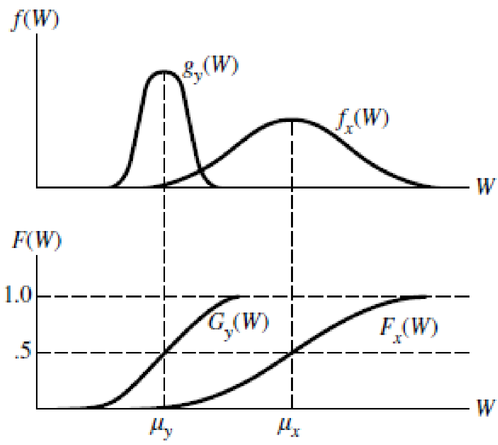


Figure 4.1: Un ejemplo de dominancia estocástica de primer orden

La dominancia estocástica de primer orden se aplica a todas las funciones de utilidad crecientes (por eso es que justamente el supuesto necesario para evaluar DEPO es que $u' > 0$, indicando que la función debe ser estrictamente creciente). Esto significa que las personas con cualquiera de las tres posiciones frente al riesgo (también se puede pensar que por esto DEPO implica DESO, porque aquí en DEPO se incluyen todo tipo de agentes mientras que DESO solamente personas aversas al riesgo) preferirían el

activo x al activo y porque la dominancia estocástica de primer orden garantiza que la utilidad esperada de la riqueza ofrecida por x será mayor que la ofrecida por y para todas las funciones de utilidad crecientes.

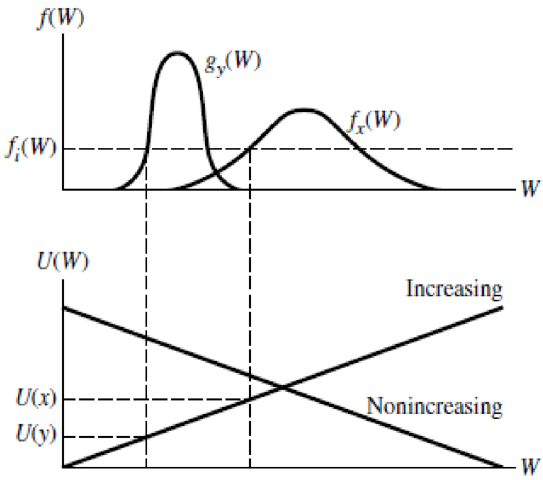


Figure 4.2: Dominancia estocástica de primer orden y utilidad esperada

La utilidad esperada es la suma de las utilidades de todos los posibles niveles de riqueza ponderados por su probabilidad. Para una frecuencia de riqueza dada, $f_i(W)$, en la mitad superior de la figura anterior, la función de utilidad creciente asigna una mayor utilidad al nivel de riqueza ofrecido por el activo x que por el activo y. Esto es cierto para cada frecuencia.

En consecuencia, la utilidad esperada de la riqueza del activo x es mayor que la del activo y para el conjunto de funciones de utilidad crecientes (es decir, todas las funciones de utilidad que tienen una utilidad marginal positiva de la riqueza). Por supuesto, lo contrario sería cierto para las funciones de utilidad no crecientes en riqueza.

Puede pasar que la utilidad esperada $E[u(x+w)] < E[u(y+w)]$. Esto podría significar que una cartera se empeore si se compran acciones de Amazon en lugar de Walmart. Esto podría ser por el estado de la naturaleza, del riesgo y de la w que se tengan.

Si ya antes se tenían acciones de Microsoft, E-bay, Google y Facebook. Estas inversiones o cartera w respecto a invertir en Amazon o Walmart tienen la particularidad de que son todas tecnológicas, entonces Walmart diversifica el riesgo respecto a Amazon y así no se tiene tanta vulnerabilidad a un riesgo tecnológico.

Entonces, por ejemplo, suponga que se tienen los siguientes repagos de $0, \frac{1}{2}$ o 1 y las probabilidades de f y g de obtener cada pago.

t	0	$\frac{1}{2}$	1
f	0.25	0.50	0.25
g	0.50	0.30	0.20

Suponga que las distribuciones son independientes entre ellas (podrían no serlas) y que $x \sim f(x)$ y $y \sim g(x)$. Si se pidiera demostrar qué tipo de dominancia hay, ¿qué sería más sencillo hacer? $\rightarrow$ por la primera.

Hay que calcular la probabilidad acumulada.

Y de esto se puede observar que $G(t) \geq F(t)$ y en algún momento hay una desigualdad (Esto sería así porque es DEPO, pero DESO admite que las distribuciones acumuladas se crucen en algún momento). El teorema dice entonces que $x \underset{DEPO}{\succ} y$. Entonces, suponiendo que son independientes, ¿cuál sería la probabilidad de que $x = 0$ y $y = 1$?

t	0	$\frac{1}{2}$	1
f	0.25	0.50	0.25
g	0.50	0.30	0.20
F	0.25	0.75	1.00
G	0.50	0.80	1.00

$$\begin{aligned} Prob\left[x=0, y=1\right] =& 0.25 \cdot 0.20 \\ =& 0.05 \\ =& 5\% \end{aligned}$$

entonces existe una probabilidad del 5% de que y sea mayor que x, pero dominancia estado por estado significaría que esa probabilidad fuera siempre 0: que y nunca pudiera ser mayor a 1.

La moraleja del ejemplo es ver que la dominancia estocástica de primer orden no implica la dominancia estado por estado.

4.1.3 Dominancia estocástica de segundo orden (DESO)

Teorema 4.1 Se dice que x domina estocásticamente en segundo orden a y $x \underset{DESO}{\succ} y$, donde $x \sim F(x)$ y $y \sim g(y)$ si cualquiera de las siguientes se cumple:

- Condición de distribución:

$$\int_{-\infty}^{t} \left[F(s) - G(s)\right] \, ds \ \leq 0 \, \forall t$$

  con desigualdad estricta en alguna.
  Aquí sería la integral de la integral, y no tiene una explicación intuitiva, sino que sería solo un número.
- Condición por representación: se puede representar a y en distribución como $y \stackrel{d}{=} x + z + \varepsilon$ donde $Prob(z \leq 0) = 1$ y ε es un ruido tal que $E\left[\varepsilon\right] = 0$ y $E\left[E^2\right] > 0$. Esto sí tiene interpretación intuitiva: se puede poner en distribución a y y decir que y es como x quitándole algo (z) y poniéndole ruido ε.
  Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} y \sim& N(0,2) \\ x \sim& N(1,1) \end{aligned}$$

  Entonces, con esas distribuciones, ¿cómo se podría definir uno y otro en distribución? $\rightarrow$ $y \stackrel{d}{=} x - 1 + \varepsilon$ donde $x - 1 \sim N(0,1)$ y $\varepsilon \sim N(0,1)$.
- La utilidad esperada de x es mayor que la utilidad esperada de y:

$$E\left[u(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u(s) f(s) \, ds > \int_{-\infty}^{\infty} u(s) g(s) \, ds = E\left[u(y)\right]$$

  (también se podrían con integrales indefinidas).

El DEPO implica al DESO. Es decir:

$$F(s) \leq G(s) \Rightarrow F(s) - G(s) \leq 0 \, \forall s$$

y entonces, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{t} [F(s) - G(s)] \leq 0$$

que es la condición DESO.

Es decir, que partiendo del DEPO sale el DESO: toda distribución que domina en primer orden, domina en segundo orden, pero no al revés.

La dominancia estocástica de segundo orden no solo asume funciones de utilidad donde la utilidad marginal de la riqueza es positiva; también asume que la utilidad total debe aumentar a una tasa decreciente. En otras palabras, las funciones de utilidad son no decrecientes y estrictamente cóncavas. **Por lo tanto, se asume que los individuos son aversos al riesgo**.

Esto significa que para que el activo x domine al activo y para todos los inversores aversos al riesgo, el área acumulada bajo la distribución acumulada de probabilidad de y debe ser mayor que el área acumulada para x, por debajo de cualquier nivel dado de riqueza. **Esto implica que, a diferencia de la dominancia estocástica de primer orden, las funciones de densidad acumulativa pueden cruzarse.**

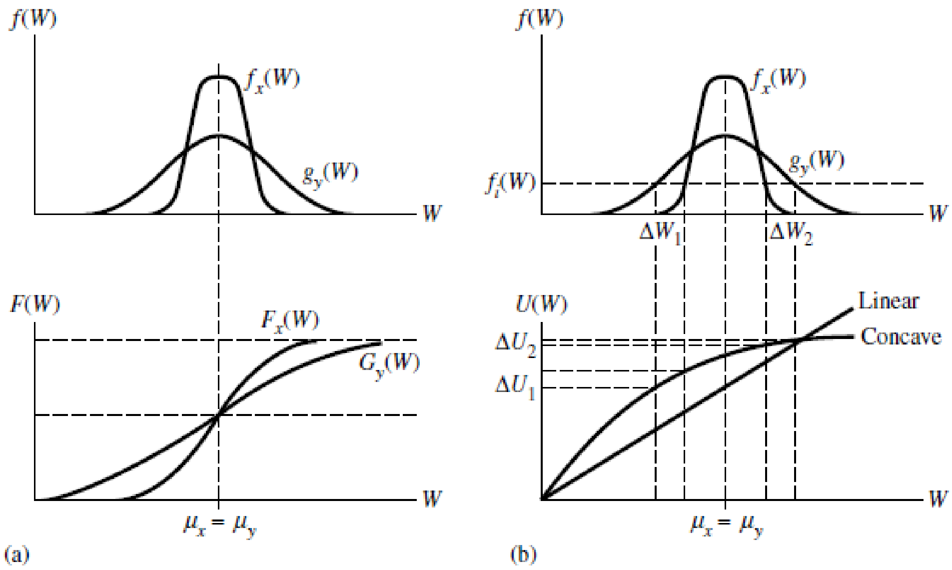


Figure 4.3: Un ejemplo de dominancia estocástica de segundo orden

La figura anterior proporciona un ejemplo gráfico, esta vez asumiendo distribuciones normales. Obviamente, el activo x dominará al activo y si un inversor es averso al riesgo porque ambos ofrecen el mismo nivel esperado de riqueza ($\mu_x = \mu_y$) ya que y es más arriesgado. **Tiene una mayor varianza**. El criterio de dominancia estocástica de segundo orden requiere que la diferencia en áreas bajo las funciones de densidad acumulativa sea positiva por debajo de cualquier nivel de riqueza, W_i. Hasta la media, $G_y(W)$ es estrictamente mayor que $F_x(W)$. Más allá de la media, ocurre lo contrario.

La Figura 10(b) relaciona el concepto de dominancia estocástica de segundo orden con la noción de maximizar la utilidad esperada. **La función de utilidad cóncava de un individuo averso al riesgo tiene la propiedad de que el aumento en la utilidad para cambios constantes en la riqueza disminuye como función de la riqueza**. Por lo tanto, si seleccionamos una frecuencia dada de riqueza como $f_i(W)$, mapea cambios iguales en la riqueza, W_1 y W_2.

La diferencia en utilidad entre x e y por debajo de la media es mucho mayor que la diferencia en utilidad para el mismo cambio en riqueza por encima de la media. En consecuencia, si tomamos la utilidad esperada emparejando todas esas diferencias con igual probabilidad, la utilidad esperada de x se considera mayor que la utilidad esperada de y.

Si el individuo fuera neutral al riesgo, con una función de utilidad lineal, las diferencias en utilidad por encima y por debajo de la media siempre serían iguales. Por lo tanto, un inversor neutral al riesgo estaría indiferente entre las alternativas x e y.

Ahora se va a ver un caso especial de dominancia estocástica de segundo orden.

Proposición 4.1 — Intuición de las loterías discretas y la dominancia estocástica de segundo orden[1]**.** Usted está considerando dos fondos de inversión A y B con los repagos y probabilidades descritos abajo. Usted sólo sabe que $u'(w) > 0$ y que $u''(w) < 0$. Explique si es posible determinar cuál de los fondos serían preferidos, y si no es posible clasificarlos, explique porqué.

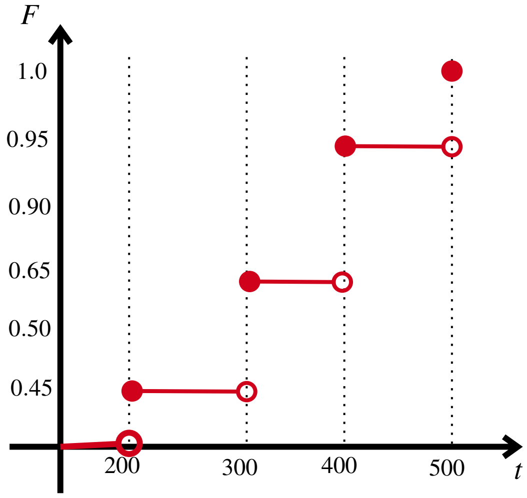
Fondo/Repago	200	300	400	500
A	0.45	0.20	0.30	0.05
B	0.50	0.15	0.25	0.10

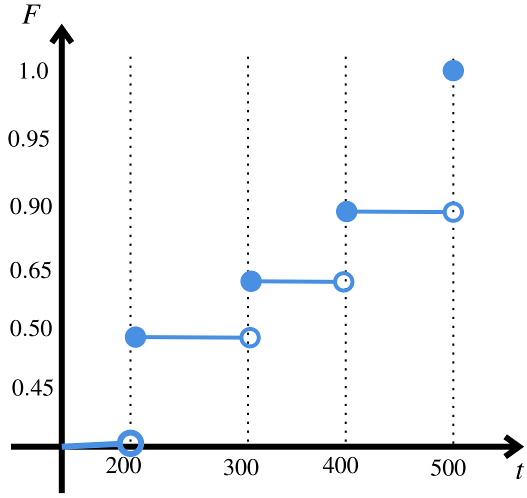
Table 4.1: Probabilidad de Repago de Fondos

Observando los repagos y las probabilidades que tiene cada repago según el fondo, es posible graficar esta información de manera tal que en el eje horizontal se grafican los repagos y en el eje vertical la probabilidad acumulada. Entonces, calculando la probabilidad acumulada se tiene:

Fondo/Repago	200	300	400	500
A	0.45	0.20	0.30	0.05
B	0.50	0.15	0.25	0.10
F(A)	0.45	0.65	0.95	1.0
F(B)	0.50	0.65	0.90	1.0

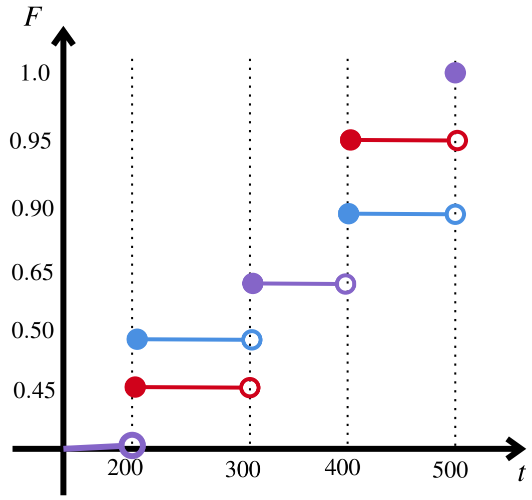
Entonces, los repagos y las respectivas probabilidades acumuladas de cada uno de los fondos se ven así:





De lado izquierdo se tiene el caso para el fondo A (color rojo) y de lado derecho el fondo B (color azul). Estas distribuciones acumuladas pueden juntarse en un solo gráfico para comparar ambos fondos, igualmente que cuando se hacía con loterías continuas.

[1] Extraído de https://www.princeton.edu/~dixitak/Teaching/EconomicsOfUncertainty/Slides&Notes/Notes04.pdf



El color morado indica que en ese tramo coinciden ambas distribuciones (rojo y azul) de modo que ninguna está por encima de la otra y más bien se sobreponen.

Ahora, con ayuda de la gráfica, se puede calcular la integral del criterio de DESO:

Fondo/Repago	200	300	400	500
A	0.45	0.20	0.30	0.05
B	0.50	0.15	0.25	0.10
F(A)	0.45	0.65	0.95	1.0
F(B)	0.50	0.65	0.90	1.0
$\int_{-\infty}^{t} F(s) - G(s)\ ds$				

Observe que la integral viene desde menos infinito hasta t, donde t es el premio. El primer premio de ambas loterías es 200, por lo que, antes de ese momento, ninguna distribución ha acumulado nada de probabilidad, y por ende $\int_{-\infty}^{t} F(0) - G(0)\ = 0$.

Fondo/Repago	200	300	400	500
A	0.45	0.20	0.30	0.05
B	0.50	0.15	0.25	0.10
F(A)	0.45	0.65	0.95	1.0
F(B)	0.50	0.65	0.90	1.0
$\int_{-\infty}^{t} F(s) - G(s)\ ds$	0			

Observe que para la primera entrada esto siempre será así, por lo que también es normal ver que a veces la primera entrada se deja vacía sin anotar nada porque se sobreentiende que antes del primer premio no hay probabilidad acumulada para ninguna de las distribuciones.

El segundo premio de ambas loterías es 300. Como la integral viene desde menos infinito, eso significa que hay que tomar en consideración lo que ha pasado en los premios pasados. Vea que que en el tramo de 200 y 300 la línea azul está por encima de la roja. Esto se refleja matemáticamente:

$$\int_{-\infty}^{t} F(s) - G(s)\ ds = \int_{-\infty}^{t} F(s)\ ds - \int_{-\infty}^{t} G(s)\ ds$$

Y para el caso concreto de estos premios:

$$\int_{200}^{300} F_A(t)\ ds - \int_{200}^{300} F_B(t)\ ds$$
$$\int_{200}^{300} t\ ds - \int_{200}^{300} t\ ds$$

Es decir, cuando las loterías de los repagos son discretas, la resta de las integrales es simplemente restar alturas. Recuerde que $\int k\ dx = k \cdot x + C$. De esta manera, dado que son distribuciones discretas, las distribuciones acumuladas se ven como rayos ("coloreados"), y su integral es simplemente la altura (la probabilidad acumulada) multiplicado por el desplazamiento horizontal (la diferencia entre los premios).

Así entonces, hacer los análisis de dominancia se vuelve más intuitivo con la ayuda de los gráficos anteriores.

Es decir,

$$t \cdot \Big|_{200}^{300} - t \cdot \Big|_{200}^{300} -$$

4.1.3.1 Aumento en riesgo (caso especial DESO)

Si $x \sim f(x)$ y $y \sim g(x)$ se dice que x es un aumento en riesgo en y $x \underset{\text{riesgo}}{\succ} y$ si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:

- Condición de distribución: $\int_{-\infty}^{t} [F(s) - G(s)]\ ds\ \leq 0$ y además $\int_{-\infty}^{\infty} sf(s) = \int_{-\infty}^{\infty} sg(s)$. Aquí se está diciendo es que las dos variables x, y tienen la misma media.
- Condición de representación: $y \overset{d}{=} x + \varepsilon$ donde $E[\varepsilon] = 0$ y $E\left[\varepsilon^2\right] > 0$. En aumento en riesgo ya no hay dominancia estocástica de primer orden y y se puede representar como x pero con más riesgo.
- Utilidad esperada: $E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(s)f(s)\ ds > \int_{-\infty}^{\infty} u(s)g(s)\ ds = E[u(y)]$ y lo único que se pide es que sea averso al riesgo $u'' < 0$.

5. Preferencias de media y varianza

Esto es muy importante en finanzas y su importancia. Fueron usadas por primera vez en 1952 por Markowitz para la teoría de carteras. La utilidad esperada de los agentes va a ser $Var(\overset{+}{\mu}, \overset{-}{\sigma}$ y partir de aquí viene algo sobre cómo armar carteras que se ve en la tercera parte del curso. Esto se va a usar mucho.

Si la distribución de rendimientos ofrecida por los activos es conjuntamente normal, entonces podemos maximizar la utilidad esperada simplemente seleccionando la mejor combinación de media y varianza. Esto es computacionalmente mucho más simple que la dominancia estocástica pero requiere que nos restrinjamos a distribuciones normales. Cada distribución normal puede ser completamente descrita por dos parámetros: su media y su varianza, es decir, rendimiento y riesgo.

Suponga que se tiene una variable x_2 que se puede escribir en distribución como $x_2 \overset{d}{=} x_1 + \varepsilon$. ¿Qué se puede decir sobre x_1, x_2? Se puede decir que x_2 es un aumento en riesgo sobre x_1: $x_2 \underset{\text{riesgo}}{\succ} x_1$.

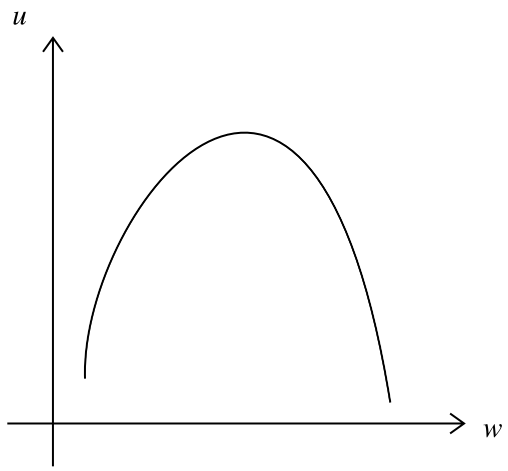
Además se puede decir que:

$$
\begin{aligned}
E[x_2] =& E[x_1] + E[\varepsilon] \\
Var(x_2) >& Var(x_1) \qquad u'' < 0
\end{aligned}
$$

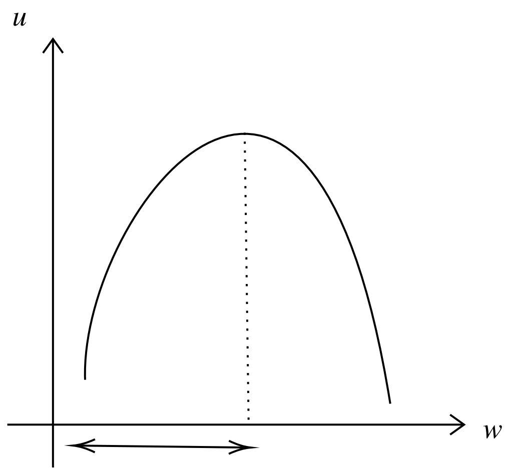
Lo único que se tiene que suponer es que hay aversión al riesgo: se está diciendo que si hay dos variables que tienen la misma media, pero uno tiene más varianza, ese con más varianza es un aumento en riesgo.

¿Bajo qué condiciones se cumple esto? $\rightarrow$ se van a ver las condiciones suficientes de media y varianza. Son dos: una tiene que ver con utilidades cardinales y otra con la distribución. Con solo que se cumpla 1 es suficiente, no se tienen que cumplir las dos necesariamente.

1. Utilidades cuadráticas: se habían hablado mal de las utilidades cuadráticas porque había un problema con que el $ARA(w)$ es creciente, y para los economistas se suponía que conforme crecía la riqueza había menos aversión al riesgo absoluta. Ese es el problema de las cuadráticas, que van a ser así:



El problema con que una utilidad sea así es que hay una zona donde hay utilidades marginales negativas. Aquí se estaría diciendo que si aumenta la riqueza después del punto máximo disminuiría la utilidad y eso no tiene mucho sentido. Entonces a veces esto se soluciones trabajando solo en un rango:



2. Cualquier utilidad $u' > 0$ y $u'' < 0$ y rendimientos elípticos.

Definición 5.1 — Distribuciones elípticas. Suponga que:

$$r \in \mathbb{R}^n$$
$$N \text{ es un vector} n \times 1$$
$$V \text{ es una matriz semidefinida positiva} n \times n$$

Una distribución es elíptica si tiene una función de densidad (de probabilidad):

$$F(r) = Kg\left[(r-N)'V^{-1}(r-N)\right]$$

Estas distribuciones tienen varias características:

> - Son simétricas alrededor de μ
> - Depende exclusivamente de dos variables: μ, Var

Hay casos de distribuciones elípticas. Piense en el caso más fácil posible: $n = 1$

$$F(r) = Kg\left[\frac{(r-N)^2}{\sigma^2}\right]$$

- Distribución normal (Gauss)
- Distribución t-student
- Laplace
- Logística

La distribución elíptica es una generalización de la distribución normal. Observe que por ejemplo la distribución t-Student tiene forma de campana, pero esta tiene colas más gruesas y así. Pero por ejemplo, los rendimientos de las acciones se parecen más a las t que a las normal. Las t también se usan para contraste de hipótesis.
La distribución normal y la t se parecen conforme aumente el número de observaciones.

Si no se entendió bien el concepto de distribución elíptica, puede pensarse en una distribución normal, que es un caso específico de la distribución elíptica.
Esto serviría siempre y cuando haya simetría. Si por ejemplo se habla de una cartera asimétrica, ya no serviría pensar en esto.

5.1 Demostración de preferencias

Suponga que la riqueza final va a ser igual a la riqueza inicial por uno más el rendimiento simple:

$$\begin{aligned} w_1 =& w_0(1+\tilde{r}) \\ =& w_0 R \end{aligned}$$

O la riqueza inicial multiplicada por el rendimiento bruto. Sin pérdida de generalidad se va a suponer que $w_0 = 1$. Esto se puede decir para las utilidades sin pérdida de generalidad porque se tienen dos grados de libertad y se está usando uno aquí.
Entonces lo que se está diciendo es que:

$$w_1 = R$$

Ahora se van a ver características de R:

- $E[R] = \mu$ (suponiendo que se está trabajando en una sola dimensión)
- $Var[R] = E(\mu - R)^2 = \sigma^2 = E[R^2] - \mu^2$

Ahora se quiere hacer una expansión de Taylor de la utilidad de la riqueza alrededor de μ.

$$u(w_1) = u(\mu) + u'(\mu)[R-\mu] + \frac{u''(w)}{2}[R-\mu]^2 + R_3$$

donde R_3 es el resto de la expansión de Taylor:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}(\mu)[R-\mu]^n u^{(n)}$$

$u^{(n)}$ es la enésima derivada de μ.

Ahora, a partir de esta expansión de Taylor, que es una expresión exacta, se va a sacar la utilidad esperada:

$$E[u(w_1)] = u(\mu) + \frac{\sigma^2}{2}u''(w) + E[R_3]$$

donde el valor esperado del remanente R_3 va a ser:

$$E[R_3] = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}u^{(n)}(\mu)m_n$$
$$m_n \equiv E[R-\mu]^n$$

donde m_n son los momentos de una variable aleatoria. El tercer momento es la asimetría y el cuarto momento es la curtosis. Esto es útil porque cuando se analicen los rendimientos hay que ver si tienen asimetría, curtosis.
Vamos ahora a ver casos:

- Utilidades cuadráticas: las utilidades cuadráticas admiten dos derivadas, lo cual significa que $u^{(n)} = 0 \; \forall \; n \geq 3$ lo que implica que $R_3 = 0$ y $E[R_3] = 0$.

$$u(w_1) = w_1 - \frac{b}{2}w_1^2 \tag{5.1}$$
$$= R - \frac{b}{2}R^2 \tag{5.2}$$

Entonces se está diciendo que todo se puede explicar como media o varianza. Vamos a sacar primero la utilidad marginal:

$$u'(R) = 1 - bR \geq 0 \Leftrightarrow R < \frac{1}{b}$$

Entonces hay que definir el rango de rendimientos como uno solo. En cuanto a la segunda derivada tiene que ser menor que 0:

$$u''(R) = -b < 0 \Leftrightarrow b > 0$$

La utilidad esperada:

$$E[u(R)] = V = E[R] - \frac{b}{2}E[R^2]$$
$$V = \mu$$

Y así, la varianza:

$$V\sigma^2 = E[R^2] - \mu^2$$
$$E[R^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

Y esto entonces lo que dice es que la utilidad esperada va a ser:

$$V = \mu - \frac{b}{2}\left[\sigma^2 + \mu^2\right]$$
$$= V(\mu, \sigma^2)$$

Esto lo que dice entonces es que la utilidad esperada depende de los parámetros de la varianza y la media.

Entonces se van a ver varias cosas acerca de la media. Entonces ahora se van a a ver varias cosas acerca de esta varianza.
¿Cuál era la definición de una curva de indiferencia? $\rightarrow$ eran las combinaciones de mercancías que generaban un mismo nivel de utilidad. Ahora las vamos a definir así: **son las combinaciones de μ y σ (media y varianza) tal que** $V(\mu,\sigma) = k$. Esto significa que si se tuviera la siguiente función $\Psi = V(\mu,\sigma) - k = 0$ esta tiene que ser igual a 0 siempre.
Lo que interesaba de las curvas de indiferencia era ver la forma de la pendiente, entonces se va a hacer una derivada total:

$$d\Psi = V_\mu \, d_\mu + V_\sigma \, d_\sigma = 0$$

La derivada total tiene que ser siempre igual a cero (por el teorema de la función implícita) y esto lo que dice es que:

$$\frac{d_\mu}{d_\Sigma} = \frac{-V_\sigma}{V_\mu}$$

Ahora, vamos a ver qué pasa con esa curva de indiferencia:

$$V_\mu = 1 - b\mu$$

Y hay que ver el signo de esto. Se sabe que :

$$R < \frac{1}{b} \quad \forall R$$
$$E[R] = \mu < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \mu b < 1 \Leftrightarrow 1 - \mu b > 0$$

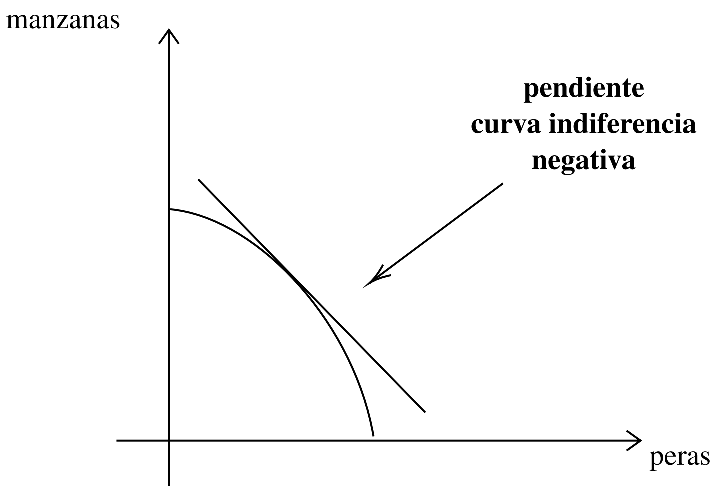
Entonces la derivada parcial anterior tiene que ser mayor a 0 $V_\mu = 1 - b\mu > 0$. Entonces ahora habría que sacar la derivada parcial respecto a σ:

$$V_\sigma = -b\sigma$$

Y con esto entonces, la pendiente de la curva de indiferencia de μ y σ es igual a:

$$\frac{d_\mu}{d_\sigma} = \frac{b\sigma}{1 - b\mu} > 0$$

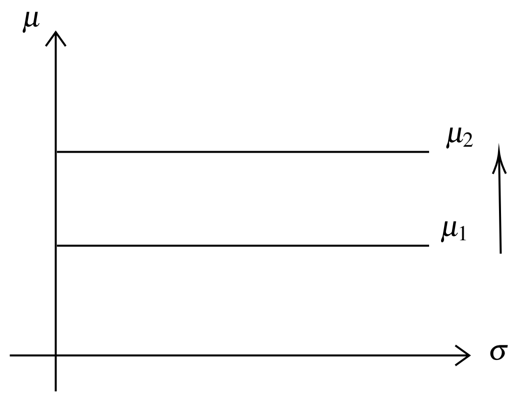
¿Coincide esto con lo visto en teoría microeconómica? Cuando se tenían dos bienes (como peras o manzanas) se tiene algo como:



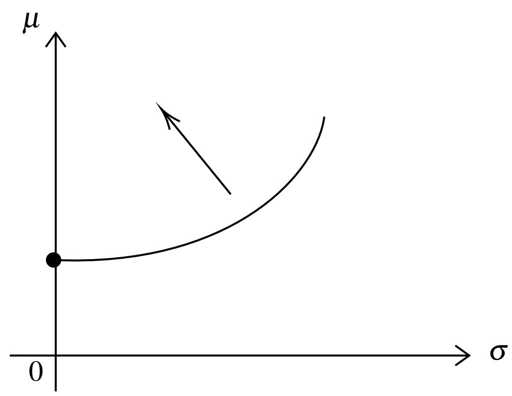
En microeconomía se veían pendientes de la curva de indiferencia negativas, pero aquí hay una pendiente positiva. $\rightarrow$ **Aquí lo que está pasando es que se está comparando un bien (la media) con un mal (la varianza) mientras que en microeconomía se evaluaban dos bienes**.
Ahora, si en esa pendiente se evalúa $\sigma = 0 \rightarrow \left.\frac{d\mu}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} = 0$. Esto tiene una interpretación económica que se va a ver más adelante.
Luego, la segunda derivada debería tener signo positivo:

$$\frac{d^2\mu}{d\sigma^2} = \frac{b}{1-b\mu} > 0$$

Gráficamente se tiene lo siguiente a partir de toda la información obtenida anteriormente. Si una persona es neutra al riesgo sus curvas de indiferencia son horizontales:



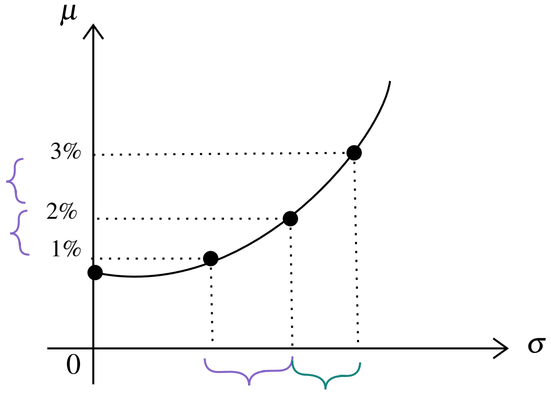
No le importa el riesgo (representado mediante la horizantilidad), y a mayor media, mayor utilidad.
Ahora hay que ver la utilidad propiamente como la sacamos:



Cuando la volatilidad o desviación estándar es 0, la utilidad es 0. Conforme se mueve hacia la izquierda y hacia arriba se está más contento: porque le estarían dando una mayor media y menor varianza.
Ahora hay que interpretar los efectos económicos:

a. **Pendiente positiva:** significa que se están comparando un bien μ y un mal σ. Pero si fuera un amante al riesgo debería tener una pendiente negativa: entonces sería como el caso de las peras y manzanas. Pero aquí estamos viendo el caso de averso al riesgo y por eso σ es un mal.
b. **Cuando $\sigma = 0$ la pendiente de la curva de indiferencia tiene pendiente igual a 0.** Cuando pasa que $\sigma = 0$ se es neutral al riesgo. Cuando hay un riesgo muy pequeño la persona se anima.

c. **Convexidad:** la curva se va acelerando. Económicamente esto significa que, por ejemplo: con un rendimiento del 1% por mes, y en otro punto hay un 2% y después un 3%. La curva está diciendo que la tasa marginal de sustitución es creciente: a pesar de que los aumentos en la volatilidad son cada vez menores, se sigue pidiendo iguales aumentos en la media.



Se es cada vez más intolerante al riesgo: es algo *tóxico*. Entonces para aceptar cada vez más un poquito de riesgo, se tendría que pagar más media.

Entonces, ahora para dibujar la curva de indiferencia para las distribuciones elípticas y van a salir las mismas curvas de indiferencia, entonces las intuiciones son las mismas pero se llegará por otro camino o ruta.

Aunque es conveniente caracterizar el rendimiento y el riesgo por la media y la varianza de las distribuciones de rendimiento ofrecidas por los activos, no siempre es correcto. **De hecho, es correcto solo cuando los rendimientos tienen una distribución normal.**

5.2 Distribuciones elípticas

La forma más sencilla de ver por qué una distribución elíptica genera curvas de media y varianza es por la misma definición que se había dicho:

$$F(R) = k \cdot g\left[\frac{(R-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

Esta función de densidad depende de la media y la varianza. Se tiene una utilidad más una densidad que depende de la media y la varianza, y por ende utilidad esperada depende solamente de la media y la varianza.

Pero otra forma de describir una distribución elíptica es de la siguiente manera:

$$R{-}\mu + \sigma s$$

donde s es una distribución con valor esperado 0 y varianza igual a 1 $s \sim E[s] = 0$ y $Var[S] = 1$ entonces se le dice que es s es una distribución esférica.

Recuerde que la riqueza inicial $w_1 = R = \mu + \sigma s$ y si la distribución de R era simétrica, entonces la distribución de s también es simétrica. Esto es lo que se va usar (por la definición de elíptica que dice que es simétrica).

Se tiene la utilidad esperada

$$V = E[u(w_1)] = E[u(R)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u[\mu + \sigma s] f(s)\, ds = V(\mu, \sigma)$$

Entonces, se puede hacer lo mismo que se hizo con las utilidades cuadráticas: sacar la pendiente de la curva de indiferencia:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{-V_\sigma}{V_\mu}$$

Entonces hay que sacar las derivadas parciales:

- V_μ

  $$V_\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{u'[\mu + \sigma s]}_{+} F(s)\, ds$$

  Pero se sabe que la utilidad marginal tiene que ser positiva siempre. Ahora, la otra utilidad marginal.

- V_σ

  $$V_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} u'[\mu + \sigma s]\, sF(s)\, ds$$

  Aquí había que usar la regla de la cadena, de ahí sale ese s diferente que no salía en la anterior. Ahora hay que ver el caso especial de cuando esta derivada parcial es igual a 0.

  $$V_\sigma \Big|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} u'[\mu]\, sF(s)\, ds$$

  Y de esto se puede sacar la derivada de u porque es una constante:

  $$\begin{aligned} V_\sigma \Big|_{\sigma=0} =& \int_{-\infty}^{+\infty} u'[\mu]\, sF(s)\, ds \\ =& u'[\mu]E[s] \\ =& 0 \end{aligned}$$

Y ahora sigue encontrar la derivada parcial V_σ:

$$V_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} u'[\mu + \sigma s]\, sF(s)\, ds$$

Recuerde la integración por partes:

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

Y el orden de las funciones sería:

- **I**nversas
- **L**ogarítmicas
- **A**lgebraicas
- **T**rigonométricas
- **E**xponenciales

Entonces:

$$\int_a^b u\, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v\, du$$

Entonces hay que proceder a determinar quiés es u y quién es v:

- $u = u'[\mu + \sigma\ s]$
- $du = u''[\mu + \sigma\ s]^{\sigma} < 0$
- $dv = s\ F(s)$
- $V = \int_a^s xF(x)\ dx$

$$\begin{aligned} V_\sigma =& u'[\mu + \sigma_s] \int_a^s xF(x)\ dx\Big|_b^a - \int_a^b u''[\mu + \sigma s]\sigma \left(\int_a^s xF(x)\ dx \right) \\ =& -\int_a^b u''\,[\mu + \sigma s] \cdot \left(\int_a^s xF(x)\ dx \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Hay otra demostración más sencilla sin usar la integración por partes. Lo primero es que $F(s)$ es simétrico: esto significa que $F(-s)$ y $F(s)$ tienen el mismo valor $F(-s) = F(s)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} V_\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} u'[\mu + \sigma s]\ F(s)\ ds \\ &= \int_0^{\infty} u'[\mu + \sigma s]\ F(s)\ ds + \int_{-\infty}^{0} u'[\mu + \sigma s]\ F(s)\ ds \end{aligned}$$

Ahora a la segunda integral se le hará un cambio de variable:

$$\begin{aligned} V_\sigma &= \int_0^{\infty} u'[\mu + \sigma s]\ sF(s)\ ds - \int_0^{\infty} u'[\mu - \sigma s]\ s\underbrace{F(-s)\ ds}_{=F(s)} \\ &= \int_0^{\infty} \underbrace{\{u'[\mu + \sigma s] - u'[\mu - \sigma s]\}}_{-}\ sF(s)\ ds \end{aligned}$$

Ahora observe que si las personas son aversas al riesgo $u'' < 0$, sucede que $u'[\mu + \sigma s] < u'[\mu - \sigma s]\ \forall\ s$, es decir, que la utilidad marginal es decreciente, por lo tanto, esta derivada parcial tiene signo negativo o es igual a 0 en el caso que $\sigma = 0$.
Entonces se acaba de decir que:

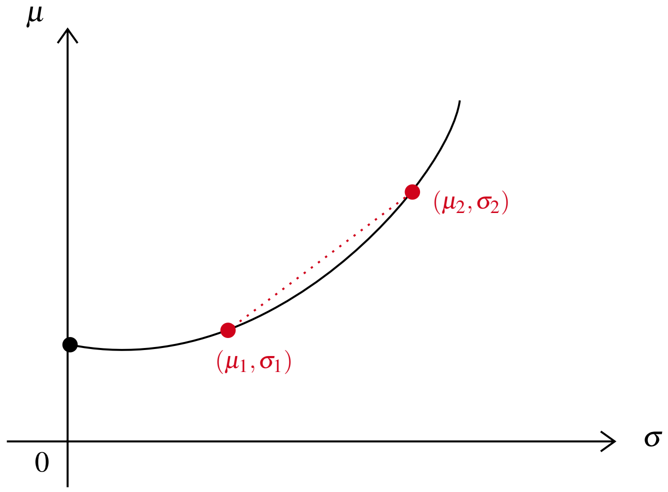
a. Tiene pendiente positiva

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{-V_\sigma}{V_\mu} \geq 0$$

b.

$$\left(\frac{d\mu}{d\sigma} \right)\Bigg|_{\sigma=0} = 0$$

c. En cuanto a la convexidad: todavía no se ha demostrado pero con rendimientos elípticos hay pendiente positiva porque se comparan un bien con un mal (σ). También se vio que la pendiente es 0 cuando $\sigma = 0$ (se es neutro al riesgo cuando la varianza es igual a 0). Ahora falta por demostrar que es convexo:



Entonces, en otras palabras, para demostrar la convexidad hay que pensar en dos puntos $(\mu_1,\sigma_1),(\mu_2,\sigma_2)$, y se sabe que si esos puntos están en la misma curva de indiferencia, entonces tienen que genrar el mismo nivel de utilidad. Así pues:

$$V(\mu_1,\sigma_1) = V(\mu_2,\sigma_2) = k$$

Entonces esos puntos tienen que dar la misma utilidad esperada, entonce, en otras palabras es que:

$$\begin{aligned} R_1 &= \mu_1 + \sigma_1 s_1 \\ R_2 &= \mu_2 + \sigma_2 s_2 \end{aligned}$$

s_1, s_2 pueden tener correlación o no entre ellas.
Y entonces se ofrece una cartera que tiene α de la cartera en R_1 y $1-\alpha$ de la cartera en R_2, entonces se le va a dar una combinación lineal de estos dos rendimientos, con $\alpha \in (0,1)$.
Y así, esta cartera R_α:

$$R_\alpha = \alpha[\mu_1 + \sigma_1 s_1] + (1-\alpha)[\mu_2 + \sigma_2 s_2]$$

Y suponiendo que la correlación entre s_1, s_2 no es perfecta, ¿se preferiría una cartera que es una combinación lineal de ambas o cada una de las carteras separas? $\rightarrow$ la mezcla de las dos porque así se estaría diversificando.
Entonces, lo que se estaría diciendo es que la utilidad esperada de R_α es mayor que:

$$E[u(R_\alpha)] > \alpha E[\overbrace{u(R_1)}^{=k}] + (1-\alpha)E[\overbrace{u(R_2)}^{=k}] > k$$

Entonces se está diciendo que la utilidad esperada de una combinación de esas carteras es mayor que k, y entonces la definición de convexidad (si no se quiere tomar la segunda derivada) es que la combinación lineal de dos puntos está por encima de ella.

Entonces, a modo de resumen se ha visto que:
- Las condiciones suficientes para preferencias de media y varianza son las utilidades cuadráticas o los rendimientos elípticos. Las curvas de indiferencia son cualitativamente iguales en ambos casos.

- Las propiedades de las curvas de indiferencia tienen las siguientes características:
  - Tienen pendiente ≥ 0, lo cual quiere decir que la volatilidad es un mal
  - Cuando la volatilidad es igual a 0 (cuando hay cero riesgo) yo me comporto como un agente neutro al riesgo aproximadamente
  - Hay una pendiente convexa (reflejando que es averso al riesgo) por lo tanto para ir aceptando mayores porcentajes de volatilidad, me tienen que ir pagando más y más rendimiento.

A manera de resumen, en esta primera parte del curso lo que se ha hecho o ha visto es lo siguiente. La lógica de la teoría de la elección del inversor puede resumirse mejor enumerando la serie de pasos lógicos y suposiciones necesarias para derivar las curvas de indiferencia de la figura siguiente:

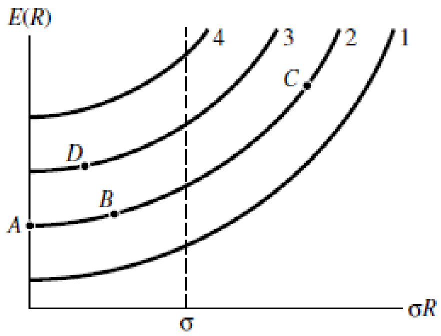


Figure 5.1: Curvas de indiferencia de un inversor averso al riesgo

1. Primero, se describieron los cinco axiomas del comportamiento racional.
2. Se derivó la regla de la utilidad esperada a partir de los axiomas.
3. Se derivaron las funciones de utilidad cardinal a partir de los axiomas.
4. Supusimos una utilidad marginal positiva. Esto y la regla de la utilidad esperada se utilizaron para argumentar que los individuos siempre maximizarán la utilidad esperada de la riqueza.
5. Se definieron las primas de riesgo, y se desarrolló una medida de aversión al riesgo local de Pratt-Arrow.
6. Se mostró que la dominancia estocástica es una teoría general de la elección que maximiza la utilidad esperada para diversas clases de funciones de utilidad.
7. Se desarrollaron curvas de indiferencia de media-varianza (que exhiben dominancia estocástica de segundo orden para rendimientos distribuidos normalmente) como una teoría paramétrica de elección.

Ejercicio 5.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿Qué es la prima de seguro?* $\rightarrow$ Es lo que está dispuesto a pagar un agente para salir de una lotería.

   ¿Qué se sabe acerca de esa prima? $\rightarrow$ Según el teorema de Pratt se puede medir empíricamente la prima de seguro de dos agentes; el que tenga una mayor prima de seguro es más averso al riesgo.

   ¿Cuáles son los componentes de esa prima de segura o qué es lo que la determina? $\rightarrow$ $\pi_i \simeq -\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot w \frac{u''(w)}{u'(w)}$
2. *¿Qué se puede decir de la prima por invertir y en qué difiera de la prima por seguro?* $\rightarrow$ Es la prima que hace que esté indiferente entre participar o no participar.
3. *¿Qué puede decir acerca del rendimiento bruto y cuál es su rango cuando hay responsabilidad limitada?* $\rightarrow$ Surge a partir de sumarle 1 al rendimiento simple. Cuando hay responsabilidad limitada tiene que ser mayor a 0 (el simple es menor a 1). Este rendimiento es similar al simple (es difícil se hacer las transformaciones de un período a otro).

4. *¿Qué puede decir acerca del equivalente cierto?* $\rightarrow$ El equivalente cierto es lo que hace que la utilidad del equivalente cierto es igual a la utilidad esperada de una lotería. Entre más aversa sea una persona menor va a ser el equivalente cierto.

1

II Equilibrio en Mercados completos

En esta formulación, los objetos de elección no son medidas estadísticas derivadas de la distribución de probabilidad de las oportunidades de consumo, sino más bien las reclamaciones de consumo contingentes mismas establecidas en forma extensiva.

Las finanzas se ocupan de las decisiones de inversión de individuos y empresas vinculadas a través de la oferta y la demanda de valores en el mercado de capitales. Las empresas obtienen capital para invertir en activos reales mediante la venta de instrumentos; los individuos obtienen derechos sobre los activos reales de las empresas al invertir en instrumentos.

Por lo tanto, los instrumentos presentan oportunidades para cambios intertemporales de consumo a través del financiamiento de actividades productivas. Las decisiones individuales de consumo/inversión que determinan la oferta agregada de valores también se ven afectadas por los precios de los valores. Al igualar la oferta y la demanda de valores, los precios de los valores generan un conjunto coherente de decisiones de inversión tanto para empresas como para individuos.

En este capítulo, analizaremos cómo se determinan las decisiones óptimas de inversión individuales y las decisiones óptimas de inversión empresarial bajo incertidumbre para un conjunto dado de precios de instrumentos. **Bajo condiciones especificadas, la toma de decisiones individuales bajo incertidumbre se lleva a cabo maximizando la utilidad esperada de la riqueza al final del período.**

Se demostró que este criterio de decisión es válido cuando los individuos son racionales, prefieren más riqueza que menos y siguen los cinco axiomas de elección bajo incertidumbre. Implícitamente, también se asumió que los individuos pueden evaluar la distribución de probabilidad de los pagos al final del período de un valor. Se demostró que el criterio de utilidad esperada es una manera muy simple de elegir entre inversiones mutuamente excluyentes que tienen diferentes distribuciones de probabilidad de pagos al final del período.

Al elegir la inversión con la mayor utilidad esperada, se determina la inversión óptima, condensando así una elección entre N distribuciones de probabilidad de pagos al final del período en una comparación entre N valores de utilidad esperada.

En este capítulo, deseamos ir más allá del problema de elección individual de inversiones mutuamente excluyentes para abordar el problema más general de la toma de decisiones de cartera, es decir, la elección óptima de invertir en más de un valor riesgoso. Esto es equivalente al problema de elegir una distribución de probabilidad de la riqueza al final del período que sea consistente con el conjunto de valores riesgosos disponibles y la riqueza inicial del individuo.

El problema de elección del individuo es encontrar esa cartera o combinación lineal de valores riesgosos que sea óptima, dada su riqueza inicial y sus preferencias. Suponemos un mercado de capitales perfecto para garantizar que no haya costos de construcción de cartera.

6. Introducción a bonos soberanos

Ahora se va a empezar a ver un nuevo módulo de economía financiera: mercados completos. Antes de entrar a ver la teoría se va a ver primero temas que son importantes para la vida profesional.

Se van a ver los conceptos de bonos de gobiernos y cómo funcionan. Este es el primer mercado que se va a ver antes de las acciones ya que es muy importante y relativamente sencillos.

6.1 Bonos de de gobierno

Son muy antiguos: el primero se emitió en 1153 por Venecia para financiar una guerra. Ya antes existían los préstamos y así pero los bonos son por medio de un mercado.

Vamos a ver varias cosas sobre los bonos:

1. Son una obligación de pagar. Esto significa que, por lo general, se va a pagar una suma fija, y por eso se les suele llamar al mercado de bonos de *renta fija*. A esto se le contrapone la renta variable, como el mercado de acciones (por los cambios en el precio de las acciones, los dividendos pueden variar, etc.).

   Hay distintos mercados de bonos:
   - Bonos soberanos: los bonos emitidos por un país emitidos en su propia moneda. Por ejemplo cuando Estados Unidos emite bonos en dólares o Costa Rica emite bonos en colones. Estos bonos se consideran lo más seguro de lo que hay por varias razones:
     - En el peor de los casos si el país no puede pagar, puede imponer impuestos en esa moneda o imprimir dinero aunque la deuda perdería valor

     Si Costa Rica emitiera bonos en dólares aunque aquí hay un riesgo cambiario porque Costa Rica no puede imprimir dólares.
   - Bonos semi-soberanos: cuando un Estado de Estados Unidos o una provincia de Alemania emitiera bonos. En las noticias ha salido que las municipalidades no pueden pedir prestado porque no tienen estados auditados y eso es lo mínimo que pide un banco. Estos tienen más riesgo que un bono soberano porque los Estados puede imponer impuestos pero no puede emitir moneda.
   - Bonos corporativos: son los bonos emitidos por las empresas. Se diferencia de una acción en que una acción ofrece rentas variables. Un bono es una especie de deuda fija que permite saber cuánto serán los flujos de caja. Pero una acción es como emprender a medias en un negocio y hay menos seguridad.
   - Bonos titularizados: son los que causaron la crisis del 2008.
2. Los bonos por lo general tienen calificaciones de riesgo. Las calificadores más importantes son Standard & Poor's y Moody's. Sus calificaciones se parecen pero no son idénticas: Entonces por ejemplo, un bono AAA serían los de Estados Unidos, que no significa que no

S&P	Moody's
Aaa	AAA
Aa+	AA+
Aa	AA
Aa-	AA-
Baa+	BBB+
Baa	BBB
Baa-	BBB-
Ba+	BB+
Ba	BB
Ba-	BB-
⋮	⋮
D	D

puedan pagar, pero, *"... el día que Estados Unidos no pueda pagar, habrá otras cosas de qué preocuparse"*.. De la línea horizontal para arriba se consideran títulos de grado de inversión, que serían los bonos en los que podrían invertir los fondos de inversión o de pensión.
En Costa Rica, el manejo de reservas tiene que ser en títulos que tengan un grado de A+ para arriba. Abajo del grado de inversión los títulos se llaman de alto rendimiento (*high yield*), pero hay gente que no cree en esto y los llama bonos basura.
Costa Rica tiene bonos de una calificación B, que serían ya bonos basura. Costa Rica ha hecho *default* en su historia como 9 veces desde 1820. Estados Unidos, por el contrario, nunca ha hecho *default*. Aún después de la guerra contra Inglaterra, siguieron pagando sus deudas, incluso a acreedores ingleses, por lo que esto sugiere que el país tiene una historia de pagar sus deudas.
Pero el riesgo no es solo que paguen o no paguen, sino que además lo que pague siga valiendo algo (como en el caso de un país que emita moneda para pagar la deuda, por lo que devaluaría la el valor de la deuda).

En este curso se van a estudiar principalmente los bonos soberanos, y se asume que son libres de riesgo: es decir que pagan siempre en todos los estados de la naturaleza.

Ahora hay que ver características de los bonos.

6.1.1 Características básicas

Estos son los elementos que suelen venir en un bono:

- Valor facial (*face value*): puede ser, por ejemplo \$1 000 en un bono de Estados Unidos o un bono corporativo. Eso iría variando por país (yenes, colones, etc.).
- Cupón: por ejemplo del 2%. Así, si el bono tiene un valor facial de \$1 000, entonces el cupón va a dar \$20 cada año. Usualmente se pagan por semestre, por lo que en el ejemplo se pagarían \$10 por semestre. Si hay un bono cero cupón significa que no pagarían nada periódicamente.
- Plazo T: usualmente suelen ser plazos como 10 años aunque también hay unos a un año. Lo normal es que cuando sean plazos menores a un año, sean bonos cero cupón.
- Precio P: es un porcentaje del valor facial. Por ejemplo si un bono dice que el precio es de $P = 99.58$ y un valor facial de \$1 000, ¿cuál sería el valor en dólares de ese bono? $\rightarrow$ \$995.8.

- Rendimiento y:

$$P\cdot FV = \sum_{t=1}^{T} \frac{c\cdot FV}{(1+y)^t} + \underbrace{\frac{FV}{(1+y)^T}}_{\text{pago final}}$$

$$P\cdot FV = \sum_{t=1}^{T} FV\left(\frac{c}{(1+y)^t} + \frac{1}{(1+y)^T}\right)$$

$$P\cdot \cancel{FV} = \cancel{FV}\sum_{t=1}^{T} \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{1}{(1+y)^T}$$

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{1}{(1+y)^T}$$

Observe que y es el número que soluciona la ecuación: es la tasa interna de retorno. Así, si $y = 1.25\%$ el bono está dando una rentabilidad anual de 1.25%. Es la **tasa interna del retorno**.

- Duración: es muy importante, pero primero veamos los siguientes elementos:
  - $VA_t = \frac{\text{flujo de caja}_t}{(1+y)^t}$ es el valor actual del flujo de cada en el período t.
  - $P\cdot FV = \sum_{t=1}^{T} VA_t \rightarrow$ el precio del bono es la suma de los valores actuales de cada flujo de caja $\rightarrow 1 = \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{VA_t}{P\cdot FV}\right)$
  - $\frac{VA_t}{P\cdot FV}$ este concepto tiene que ser igual a 1, entonces se puede entender como ponderador o porcentaje del valor que se da en el período t.

Ahora entonces lo importante es la duración:

$$D \equiv \sum_{t=1}^{T} t\cdot\left[\frac{VA_t}{P\cdot FV}\right]$$

Entonces **la duración en términos sencillos sería el tiempo ponderado de flujos de caja del bono**.

Ejemplo 6.1 — Ejemplo de la duración. Suponga que se tiene un bono cupón cero $\rightarrow$ entonces tiene un único flujo de caja: el último. Entonces ese pago final recibe una ponderación de 1, por lo que la duración es igual al plazo $D = T$: si el bono es de 20 años y es cupón 0, entonces la duración también es de 20 años. La duración promedio es el plazo. Pero si el cupón es mayor que 0 $C > 0$, lo usual es que, en general, la duración es menor que el plazo $D < T$. ■

- ¿Cuál es la relación entre el precio y el rendimiento? $\rightarrow$ es negativa: a mayor rendimiento menor precio. Si alguien dijera que los rendimientos de los bonos de Costa Rica subieron, sería una mala noticia, porque los bonos valen menos y ahora la gente cree menos en que le vayan a pagar. Sería una mala noticia para el Ministerio de Hacienda.

Entonces otra definición de la duración es:

$$D = \frac{-\partial P}{\partial y}\cdot\frac{1}{P}$$

Es una semielasticidad de precio y rendimiento porque falta el rendimiento

Ejemplo 6.2 — Aumento en el rendimiento. Imagínese que se tiene un bono 1 que tiene una duración de 20 años y otro bono 2 con duración de 4 años. Ambos tienen tienen precio de 100 y el rendimiento de ambos es de 1%.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 20 \text{ años} & P_1 &= 100 \quad y = 1\% \\
D_2 &= 4 \text{ años} & P_2 &= 100 \quad y = 1\%
\end{aligned}
$$

Pero ahora suponga que el rendimiento de ambos bonos subió un punto porcentual.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 20 \text{ años} & P_1 &= 100 \quad y = 1\% & y' &= 2\% \\
D_2 &= 4 \text{ años} & P_2 &= 100 \quad y = 1\% & y' &= 2\%
\end{aligned}
$$

¿Qué le pasa al precio de los bonos? $\rightarrow$ como subieron los rendimientos entonces los precios tienen que bajar:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta P_i}{P_i} &= \text{variación del precio}_i \\
\text{variación del precio}_1 &= -20\% \\
\text{variación del precio}_2 &= -4\%
\end{aligned}
$$

La idea es que el bono de 20 años baja más porque al tener más períodos se va exponencialmente más rápido. Para eso sirve la duración $\rightarrow$ si a usted lo contratan en el BCCR para manejar las reservas: se tienen bonos de Estados Unidos, uno con 1 año y otro con 4 años de duración, ¿qué riesgos hay de invertir en un mismo bono pero con diferentes duraciones? $\rightarrow$ no hay riesgo de crédito con Estados Unidos, pero sí hay otro riesgo de que, por ejemplo, cambien la política de inflación, que tengan una política de inflación más laxa significaría que se podría devaluar la promesa de pago. Entonces si hay más riesgo se pide más rendimiento.

En finanzas es lo mismo usar como base 1%, y esto se escribe como 100 puntos bases:

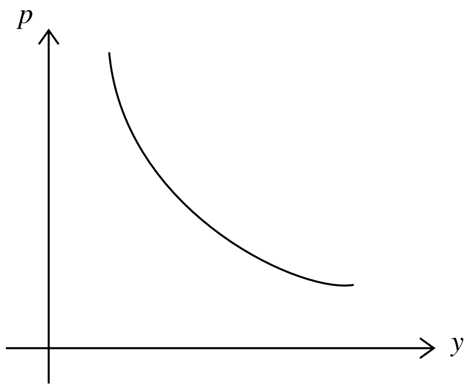
$$1\% = 100 \text{ puntos base}$$

Entonces un *shock* como ese lo que haría es que el rendimiento suba 20 0 30 puntos bases, y eso es un cambio bastante fuerte. Entonces, al tener bonos de Estados Unidos a 20 y 4 años. Ante ese anuncio el bono que más sufrió cambio en precio es el de 20 años: **a pesar de que no había riesgo de crédito sí hay riesgo de duración $\rightarrow$ pueden haber movimientos que, mientras me pagan el bono, puede haber movimientos que hagan que el precio de mercado del bono varíe**.
Aunque se sepa el pago en el final, en el medio de la duración, ese bono de mayor duración varía más. Interesa pensar en el medio porque es posible que no se quiera esperar todo el plazo de la duración sino que se quiera vender. ■

Con el caso del bono cupón cero, la forma más fácil de verlo es que

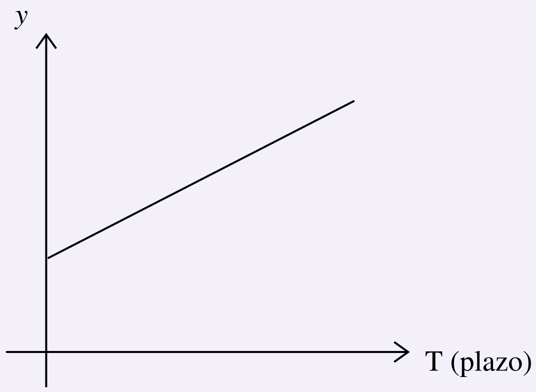
$$P = \frac{1}{(1+y)^T}$$

El precio tiene una relación negativa no lineal con el rendimiento, hay una especie de convexidad:



Entonces ahora veamos otro ejemplo:

Ejemplo 6.3 Se tiene un bono con $T = 5$, es decir, que vence en 5 años, $C = 1.63\%$ (esto significa que se paga un cupón de 1.63% por año), $y = 1.71\%$ (tasa del rendimiento anual del bono) y se da un precio final 99.58 (el precio se interpreta como un 99.58% del valor facial).
La curva de rendimientos se ve así:



Las curvas de rendimientos tienen, típicamente, una pendiente positiva $\rightarrow$ a mayor plazo se asume un mayor riesgo de duración y por tanto debería compensarse con un mayor rendimiento.
Ahora hay que ver los datos financieros de Estados Unidos y Costa Rica. En un período de 0 el rendimiento es como un 1%. Luego, las tasas soberanas en colones son lo que se usan para hacer las curvas de rendimiento.
En 3 meses, el nivel está en 3.10, y a nivel semanal el rendimiento bajó 0.25, lo cual es bueno porque significa que el bono subió de precio, pero anualmente el rendimiento subió, por lo que el precio del bono bajó y es malo para el país.
En 2 años el nivel es de 5.69 y es uno de los bonos más transados. Luego en dólares, son más bajas en general salvo para 2 años: esto es así porque hay riesgo cambiario: la gente sigue prefiriendo el dólar para guardar valor como una opción más segura.
Las tasas de Estados Unidos tienen pendiente positiva y esos rendimientos han caído en el último año. Los de Costa Rica han subido y los de Estados Unidos ha bajado. Puede explicarse porque aumentó la demanda de bonos de Estados Unidos y esos dineros se han sacado de otros instrumentos más riesgosos. ■

Cuando se vea la información es diarios financieros lo que aparece es el dato 99.58%, que es el precio del bono: se dice que el bono vale 99.58 pero hay que entender que es un porcentaje del valor facial (entonces también habría que saber el valor facial) y \$995.80 es el número final que se paga propiamente.

Esto se podría complicar más pero esto es lo más básico que se necesita entender.

Ejercicio 6.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿Qué es la duración de un bono y por qué le interesa eso a un fondo de inversiones?* $\rightarrow$ Es importante para evaluar el riesgo de un bono.
   ¿Si tuviera que dar otra definición? $\rightarrow$ Es un promedio ponderado de los tiempos en el que uno va a recibir flujos de caja.
2. *¿Qué es una curva de rendimientos y por qué usualmente tienen pendiente positiva?* $\rightarrow$ Es graficar en el eje y el rendimiento de un bono y en el eje x el tiempo. Normalmente tienen una pendiente positiva porque a medida que aumenta el tiempo hay más riesgo de mercado o duración, entonces ocupo que me den más rendimiento.
3. *¿Qué es un instrumento puro?* $\rightarrow$ Es propuesto por Debreu. Paga flujos de caja = 1 si $s = s_m$ y paga flujos de caja = 0 si $s \neq s_m$.
4. *¿Qué es un instrumento complejo?* $\rightarrow$ Es aquel que paga flujos de caja arbitrarios y tienen un precio puro (un valor).

■

7. Instrumentos Puros, Mercados Completos, y Arbitraje

7.1 Introducción a mercados completos

Mercados completos es un nuevo módulo en economía financiera. Primero se va a empezar por unos conceptos importantes. Ya se vieron bonos y ahora sigue ver otros conceptos.

1. Venta al descubierto
2. Ambiente riesgo Arrow-Debreu
3. Estados de la naturaleza e instrumentos (financieros)
   - Instrumentos puros
   - Instrumentos de Arrow
   - Instrumentos complejos
4. Condiciones necesarias para mercados completos
5. Arbitraje tipo I y tipo II

7.1.1 Venta al descubierto

Tesla es una empresa que hace automóviles eléctricos y cuyo valor de las acciones se disparó e hicieron un *split* 5×1 porque tienen expectativas muy altas.

Pero por ejemplo, Toyota o Volkswagen producen muchísimos más carros que Tesla, pero Tesla vale muchísimo más que estas otras dos. Pero esta empresa ha generado mucha controversia porque consideran que no valen tanto.

Se puede apostar en contra de una empresa (apostar en descubierto) en lugar de comprar sus aciones, en inglés se llama *short sale*. Suponga que se quiere vender al descubierto una acción de Tesla: lo primero que se tendría que hacer es pedir prestada una acción de Tesla.

Entonces, un fondo de inversión puede tener acciones de Tesla que no quiere vender, pero por decirlo de alguna manera, la pueden 'alquilar' o dar prestada. Entonces si se da una acción en préstamo, se tiene que pedir algo a cambio. Típicamente lo que se hace es pedir una garantía para que, si le pasa algo a la acción, poder ejecutar la garantía.

Entonces si alguien da el equivalente en efectivo se presta la acción, se deposita el efectivo y se gana intereses, que sería como pagar el alquilar de la acción.

Entonces se da en alquiler la acción, yo la adquirí en alquiler $\rightarrow$ vendo la acción al precio de hoy \$725: ese efectivo lo voy a guardar debajo de la cama y la siguiente semana, debo devolver la acción (no es literalmente exactamente la misma acción, sino que otro acción igual de Tesla pero no es la misma literalmente).

A la siguiente semana, vuelvo a comprar una acción: ahora vale \$700 y yo la había vendido en \$725, y me estoy ganando \$25 $\rightarrow$ **esto quiere decir que yo gano si la acción baja de precio**. Pero si la acción hubiera subido a $1 500, hubiera perdido $775.

Vender al descubierto tiene un riesgo $\rightarrow$ si el precio de la acción sube en lugar de bajar. Hay posibles ganancias: en el caso máximo la acción podría bajar, como máximo, a $0 y ganaría $725, pero podría perder hasta infinito.

Entonces hay dos riesgos:

- Que suba de precio (pérdidas podrían ser **ilimitadas**)
- Que baja de precio (ganancias serían ser **limitadas**)

Esto es inverso a cuando se compra una acción, que igual tiene dos riesgos (pero opuestos)

- Que suba de precio (ganancias podrían ser **ilimitadas**)
- Que baja de precio (pérdidas serían ser **limitadas**)

Suponga que se tiene la siguiente información:

Ticker	Precio	Acciones MM	*Shorts* MM	%
AAPL	284.44	4375	39.06	0.89%
AMZN	2253.82	497.81	4.84	0.97%
AAL	12.03	426.06	55.24	12.97%
TSLA	724.67	184.11	19.69	10.69%

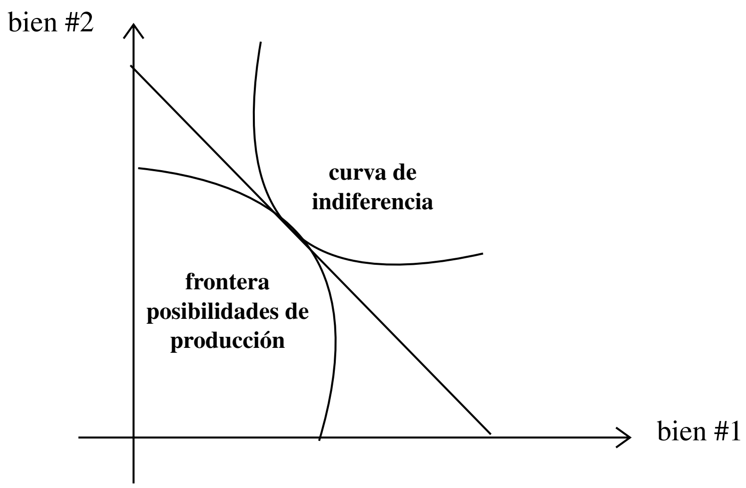
Observe que menos del 1% de las acciones de Amazon y Apple se están vendiendo al descubierto, lo cual refleja que la gente tiene mucha confianza en que el valor de esas acciones no bajará.

Pero en cambio, más acciones de American Airlines se están vendiendo al descubierto porque hay mucha incertidumbre sobre si sobrevivirán a la pandemia y así por el estilo.

7.2 Mercados

Definición 7.1 — Mano invisible de Adam Smith. La búsqueda de la satisfacción personal mediante la maximización de la utilidad personal o beneficios de la empresa llega al equilibrio mediante el sistema de precios.

Estamos en una situación de certidumbre, sin riesgo. Suponga que se tienen los siguientes bienes:



Esa línea recta indica los precios relativos: bajo ese nivel de precios relativos se maximiza la utilidad personal y las ganancias de la empresa: cada quien haciendo esto (buscando maximizar su interés, ya sea empresa o individuo) y dados los precios actuales, se llega a un equilibrio.

Entonces hay una serie de cosas que se pueden decir a partir de esta solución:

1. Existe un único precio relativo de equilibrio que equilibra oferta y demanda.

2. El precio P y las reparticiones son Pareto. Esto significa que no se puede mejorar a alguien sin mejorar a otro.
3. Esto es equilibrio descentralizado $\rightarrow$ no se necesita un gobierno para llegar a este equilibrio.

Ahora, **el plan es replicar estos resultados pero ya insertado el riesgo**.

7.3 Definición de riesgo

Los instrumentos tienen inherentemente una dimensión temporal. Las decisiones de inversión en instrumentos de los individuos están determinadas por su consumo deseado en intervalos de tiempo futuros.

El paso del tiempo implica incertidumbre sobre el futuro y, por lo tanto, sobre el valor futuro de una inversión en valores. **Desde el punto de vista de la empresa emisora (o gobiernos) y de los inversores individuales, el valor futuro incierto de un instrumento puede representarse como un vector de pagos probables en alguna fecha futura, y la cartera de inversiones de un individuo es una matriz de posibles pagos en los diferentes valores que componen la cartera**.

Vamos a ver dos definiciones de riesgo.

1. La primera es de Debreu (1959). Él dice que hay $\mathscr{K}$ estados de la naturaleza. Hay un conjunto de estados de naturaleza $\mathscr{S} = \{s_1, s_2, \ldots s_K\}$ (los estados de la naturaleza podrían ser continuos o infinitos pero de momento esto no importa). Se le da un tratamiento atemporal a los estados de la naturaleza.

> **Ejemplo 7.1 — Estados de la naturaleza atemporal.** Considere los siguientes estados de la naturaleza:
> - $s_1 =$ LDA gana el campeonato 2030
> - $s_2 =$ Saprissa gana el campeonato 2025
>
> Entonces Debreu está diciendo que un estado de la naturaleza no solo indica algo que va a suceder sino que también indica la fecha, y perfectamente podrían ser fechas distintas. ■

2. Arrow (1964) le pone más orden a los estados de la naturaleza. Arrow dice que hay $TN = K$ estados de la naturaleza. Es decir, la misma cantidad de Debreu pero él les pone otro orden distintos:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} s_{11} & s_{21} & \cdots & s_{T1} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{T2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \cdots & s_{TN} \\ {\scriptstyle s_1} & {\scriptstyle s_2} & & {\scriptstyle s_T} \end{array} \right\}$$

Lo que hace es ordenar los estados de la naturaleza, y la interpretación es que $s_1, s_2, \ldots, s_T$ tienen una interpretación del tiempo $\rightarrow$ hay una interpretación de que se trata del período $1, 2, \ldots, T$ sucesivamente.

Así entonces cada columna representa los posibles estados de la naturaleza que ocurren en cada período: $\underbrace{\begin{array}{c} s_{11} \\ s_{12} \\ \vdots \\ s_{1n} \end{array}}_{s_1}, \underbrace{\begin{array}{c} s_{21} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{2n} \end{array}}_{s_2}, \underbrace{\begin{array}{c} s_{T1} \\ s_{T2} \\ \vdots \\ s_{Tn} \end{array}}_{s_T}$. Se orden los estados en el tiempo, donde cada s_T es un subconjunto en el tiempo, estos son los ambientes de incertidumbre en la economía.

Ahora hay que definir los distintos instrumentos.

En el modelo de preferencias de estados, la incertidumbre toma la forma de no saber cuál será el estado de la naturaleza en alguna fecha futura. **Para el inversor, un instrumento**

es un conjunto de posibles pagos, cada uno asociado con un estado de naturaleza mutuamente excluyente.

Una vez que se revela el estado incierto del mundo, el pago en el valor se determina exactamente. Por lo instrumento, un instrumento representa un (derecho de) reclamo a un vector (o conjunto) de pagos contingentes al estado.

7.4 Instrumentos

1. Instrumento puro (Debreu): este instrumento paga un flujo de caja en el estado js: FC_{js}. Donde:

$$FC_{js} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s_n \\ 0 & \text{si } s \neq s_n \end{cases}$$

Es decir, que es un flujo de caja binario: paga 1 si se da un estado y paga 0 si no se da ese estado.

Ejemplo 7.2 — Instrumentos puros. Suponga el siguiente conjunto de estados de la naturaleza:

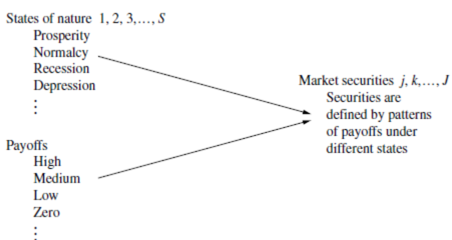
$$S = \{\underset{1}{\text{sequía}}, \underset{2}{\text{normal}}, \underset{3}{\text{lluvioso}}\}$$

- El instrumento puro #1 paga 1 si se está en el estado de la naturaleza 1: $FC_1 = (1,0,0)$. Su precio es P_1.
- El instrumento puro #2 paga 1 si se está en el estado de la naturaleza 2: $FC_2 = (0,1,0)$. Su precio es P_2.
- El instrumento puro #3 paga 1 si se está en el estado de la naturaleza 3: $FC_3 = (0,0,1)$. Su precio es P_3.

■

Analíticamente, **la generalización del análisis microeconómico estándar, atemporal, bajo certeza, hacia una economía multiperiodo bajo incertidumbre con mercados de instrumentos, se facilita mediante el concepto de un instrumento puro**. Un instrumento puro o primitivo se define como un instrumento que paga $1 al final del periodo si ocurre un estado dado y nada si ocurre cualquier otro estado.
El concepto de instrumento puro permite la descomposición lógica de los instrumentos de mercado en carteras de instrumentos puros. Por lo tanto, **cada instrumento de mercado puede considerarse una combinación de varios instrumentos de seguridad puros**. En términos de la teoría de preferencias estatales, un instrumento representa una posición con respecto a cada posible estado futuro de la naturaleza.
En la Fig. 2, los valores de mercado se definen con respecto a las características de sus pagos bajo cada estado futuro alternativo. Un valor de mercado, por lo tanto, consiste en un conjunto de características de pago distribuidas sobre estados de la naturaleza.

Figure 2 States, payoffs, and securities.



La complejidad del valor de seguridad puede variar desde numerosas características de pago en muchos estados hasta ningún pago en todos menos uno estado.

2. Instrumento de Arrow: "se reciclan instrumentos en el tiempo". Donde:

$$FC_{nt} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s_{nt} \\ 0 & \text{si } s \neq s_{nt} \end{cases}$$

Ejemplo 7.3 — Instrumentos de Arrow. Suponga el siguiente conjunto de estados de la naturaleza:

$$S_{2020} = \{\text{sequía}, \text{normal}, \text{lluvioso}\}$$

$$S_{2021} = \{\text{sequía}, \text{normal}, \text{lluvioso}\}$$

Aquí el instrumento de Arrow es indiferente del período: suponga que le paga si hay sequía. Si hay sequía en 2020 ($= 1$) y lluvia en el 2021 ($= 0$). Va a existir en el tiempo y le paga si se da el estado, es repetitivo.
El instrumento puro solo se da una vez nada más, pero el de Arrow se repite en el tiempo porque ya no es atemporal. ■

3. Instrumento complejo: tiene pagos arbitrarios, donde:

$$FC_{js} = \begin{cases} 2 & \text{si hay sequía} \\ 4 & \text{si es normal} \\ 1 & \text{si es lluvioso} \end{cases}$$

Da pagos arbitrarios que no son 0 y 1: los flujos de caja son 2,4,1. El precio del instrumento es V_j.

El instrumento puro es un tipo de instrumento complejo. Donde solamente hay dos estados con pagos 1 y 0.

¿Cuál es el valor del instrumento? $\rightarrow$ esto es demasiado importante. Es la suma de la ponderación de los flujos por la propiedad de que pase el estado.

$$V_j = \sum_{s \in S} P_s \cdot FC_{js}$$

Ahora, suponga que se tienen K estados y j instrumentos complejos. Se observan los precios de los instrumentos complejos:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FC_{11} & FC_{12} & \dots & FC_{1K} \\ FC_{21} & FC_{22} & \dots & FC_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ FC_{J1} & FC_{J2} & \dots & FC_{JK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_K \end{bmatrix}$$

$$V_{J \times 1} = FC_{J \times K} P_{K \times 1}$$

Entonces, si se observan los V y se saben los flujos de caja, ¿se pueden despejar los precios?

$$P = C^{-1} V$$

Se necesita que la función sea invertible, y para esto el determinante tiene que ser distinto de cero, y para esto tiene que ser una matriz cuadrada $J = K$: **esto implica que tienen que haber el mismo número de instrumentos complejos como estados de la naturaleza $\rightarrow$ esta es la intuición económica**.

En el marco de preferencias por estado, la incertidumbre sobre los valores futuros de los instrumentos se representa mediante un conjunto de posibles pagos contingentes al estado. Las combinaciones lineales de este conjunto de pagos contingentes al estado representan el conjunto de oportunidades de pago contingente al estado de la cartera de un individuo.
Una propiedad importante de este conjunto de oportunidades está determinada por si el mercado de capitales **es completo o no**. **Cuando el número de valores únicos e independientes linealmente es igual al número total de estados alternativos futuros de la naturaleza, se dice que el mercado es completo**.
Si el determinante es igual a cero, un flujo de caja sería combinación lineal de otro.

Hay tres posibilidades para llegar a un mercado completo, y se van a ver dos.

7.4.1 Mercado completo

1. Existen tantos instrumentos complejos como estados de la naturaleza. Para estado de la naturaleza hay un instrumento complejo con su respectivo precio para el instrumento.
2. Existen tantos instrumentos complejos independientes como estados de la naturaleza. $\rightarrow$ esto lo que quiere decir es que no puede haber un flujo de caja no puede ser combinación lineal de otro (esto significa que sean independientes y que la matriz sea cuadrada
3. Arrow: $N < K$ tiene menos instrumentos que estados de la naturaleza pero 'recicla' instrumentos y no se ocupa que hayan tantos instrumentos.

Ejemplo 7.4 Suponga una economía donde hay tres estados de la naturaleza:

$$S = \{\overset{s_1}{\text{crisis}}, \overset{s_2}{\text{normal}}, \overset{s_3}{\text{auge}}\}$$

A estos estados de la naturaleza no se les asigna ninguna probabilidad, porque sería posible que según cada persona, tengan una distinta probabilidad de ocurrir cada uno.

Ahora vamos a ver tres instrumentos complejos:

1. Deuda sin riesgo: un bono de los Estados Unidos. La característica de un bono sin riesgo es que siempre paga sin importar cuál sea el estado de naturaleza. El flujo de caja sería $(1,1,1)$. Su valor sería $V_j = 5$.
2. Seguro de desempleo: me pagan algo solo si caigo en desempleo. El flujo de caja sería $(1,0,0)$. Esto sería un instrumento puro, pero habíamos dicho que un instrumento puro es un caso de complejo. Su valor sería $V_j = 2$.
3. Deuda riesgosa: por ejemplo un bono de Costa Rica en dólares. El flujo de caja sería $(0,1,1)$. Su valor sería $V_j = 4$.

La matriz de los flujos de caja C sería:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay 3 estados de la naturaleza $K = 3$ y 3 instrumentos complejos $J = 3$, por lo que las dimensiones de la matriz serían 3×3 y hasta ahora todo bien. Para que el mercado esté completo también falta verificar la independencia.

Si se verifica, se verá que $\det(C) = 0$, con lo cual no sería independiente la matriz: los instrumentos no son independiente entre sí $\rightarrow$ si se agarra el seguro de desempleo y la deuda riesgosa eso da exactamente el mismo pago que la deuda sin riesgo.

No es suficiente ver las dimensiones de la matriz sino que también es necesario verificar que se cumpla la independencia. La interpretación en caso de que no haya

independencia es que hay valores de los instrumentos complejos pero no se pueden obtener los precios puros y por ende no se podrían tomar decisiones.

■

Suponiendo que el mercado sea perfecto, cualquier patrón de rendimientos puede ser creado en un mercado completo. En particular, un conjunto completo de instrumentos puros con pagos (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) puede ser creado como combinaciones lineales de valores de seguridad existentes.

Se requiere algo de álgebra lineal para averiguar cómo obtener los instrumentos puros a partir de cualquier conjunto completo arbitrario de instrumentos de mercado, pero una vez que sabemos cómo formarlos, es fácil replicar cualquier otro instrumento a partir de una combinación lineal de los instrumentos puros.

Por ejemplo: un valor de seguridad con un pago (a, b, c) puede ser replicado comprando (o vendiendo en corto si a, b o c son negativos) a de (1,0,0), b de (0,1,0) y c de (0,0,1).

Ahora vamos a ver otro ejemplo quitando la deuda sin riesgo, porque este era una combinación lineal de los otros dos instrumentos complejos.

Ejemplo 7.5 Suponga una economía donde hay tres estados de la naturaleza:

$$S = \{\overset{s_1}{\text{crisis}}, \overset{s_2}{\text{normal}}, \overset{s_3}{\text{auge}}\}$$

Ahora vamos a ver estos tres instrumentos complejos:

1. Seguro de desempleo: me pagan algo solo si caigo en desempleo. El flujo de caja sería $(1,0,0)$. Esto sería un instrumento puro, pero habíamos dicho que un instrumento puro es un caso de complejo. Su valor sería $V_j = 2$.
2. Deuda riesgosa: por ejemplo un bono de Costa Rica en dólares. El flujo de caja sería $(0,1,1)$. Su valor sería $V_j = 4$.
3. Acciones: su valor es $V_j = 9$. Su flujo de caja sería $(0,1,3)$

La matriz de los flujos de caja C sería:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hay 3 estados de la naturaleza $K = 3$ y 3 instrumentos complejos $J = 3$, por lo que las dimensiones de la matriz serían 3×3 y hasta ahora todo bien. Para que el mercado esté completo también falta verificar la independencia.

Si se verifica, se verá que $\det(C) = 2$, con lo cual **sí sería independiente la matriz**: los instrumentos son independientes entre sí.

Entonces el mercado sí está completo y podemos proceder a averiguar los precios.

$$V = CP$$
$$P = C^{-1}V$$

Entonces hay que encontrar C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Esto es una especie de manual para construir instrumentos puros, ¿cómo lo hago? $\rightarrow$ el instrumento puro #1 sería un instrumento que paga 1 en crisis y 0 en el resto de los estados:

1. Instrumento puro #1: compro 1 de seguro de desempleo y 0 de los demás:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

   El precio sería $P_1 = 1 \cdot v_1 \Leftrightarrow P_1 = 1 \cdot 2 \Leftrightarrow P_1 = 2$
2. Instrumento puro #2: la forma de verlo es mediante la siguiente fórmula:
   - ¿Cuánto habría que comprar del instrumento complejo #1? $\rightarrow$ 0 del seguro de desempleo, entonces su costo es 0 $FC = 0$ y sus pagos serían $(0,0,0)$.
   - Compro $\frac{3}{2}$ de la deuda riesgosa. Esto me va a costar $4 \cdot 1.5 = 6$ y sus pagos serían $(0,1.5,1.5)$.
   - Compro 0 del seguro de desempleo, vendo $\frac{1}{2}$ al descubierto de acciones y su costo (no sería un costo sino un ingreso y tendría que ser negativo) es de -4.5. Sus pagos serían $(0,-0.5,-1.5)$.

   Entonces el costo neto de estas tres operaciones sería: $0+6-4.5 = 1.5$ y los repagos serían $(0,1,0)$. Esto nos permite descubrir que es un instrumento puro y el precio sería $P_2 = 1.5$.

   Observe que se pueden construir instrumentos puros a partir de instrumentos complejos.
3. Instrumento puro #3: finalmente aquí el precio sería $P_3 = 2.5 = \frac{-1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 9$.

■

Dado un mercado de instrumentos completo, teóricamente podríamos reducir la incertidumbre sobre nuestra riqueza futura a cero. No importa qué estado incierto de la naturaleza realmente ocurra. Es decir, al dividir nuestra riqueza de una manera particular entre los valores disponibles, podríamos, si así lo eligiéramos, construir una cartera que fuera equivalente a tener cantidades iguales de todos los valores de seguridad puros. Esta cartera tendría el mismo pago en cada estado, incluso si los pagos de los valores individuales variaban según los estados.

7.5 Arbitraje

Vamos a ver el arbitraje, pero hay varios tipos. El primero es el arbitraje tipo I.

7.5.1 Arbitraje tipo I

Estábamos viendo una deuda sin riesgo que tenía un valor $V_j = 5$ y los flujos de caja eran $FC_{js} = (1,1,1)$. Ahora hay que recordar cómo valorar instrumentos complejos a partir de los precios puros $\rightarrow$ en general, un instrumento financiero se evalúa $V_j = \sum_{s \in S} FC_{js} \cdot P_s$. En este caso, por ejemplo, un instrumento libre de riesgo tendría flujo de caja igual a 1:

$$\begin{aligned} VF &= \sum_{s \in S} P_s \\ &= 2 + 1.5 + 2.5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

En este caso la valoración de estados puros es de 6, que es diferente a la valoración del mercado que es 5: cuando hay diferencia de valores hay posibilidades de ganar dinero a cero riesgo: esto es arbitraje.

Para tener arbitraje ocupo 3 condiciones:

1. Comprar barato
2. Vender caro
3. No tener riesgo (las primeras dos son especulativas)

En este caso, habría que proceder de la siguiente manera:

- El instrumento que está barato es la deuda sin riesgo y entonces la compro: es una salida del flujo de caja $FC = -5$ y paga $(1,1,1)$.
- Vendo al descubierto (*short*) del seguro de desempleo: esto es una entrada de dinero $FC = +2$ y esto paga $(-1,0,0)$.
- Finalmente vendo al descubierto (*short*) de la deuda riesgosa: esto es una entrada de dinero $FC = +4$ y esto paga $(0,-1,-1)$.

Entonces el efecto neto sería al final del período 1 sería:

Cartera	FC	FC_s
Comprar deuda sin riesgo	-5	$(1,1,1)$
Short seguro desempleo	+2	$(-1,0,0)$
Short deuda riesgosa	+4	$(0,-1,-1)$
Neto:	+1	$(0,0,0)$

Esta es una inversión súper buena, estoy ganando 1 inmediatamente y no tengo riesgo (siempre tengo 0 en la columna de la derecha).

En este caso, una deuda sin riesgo sería un derivado financiero porque depende de otros instrumentos financieros (por ser combinación lineal de los otros)

7.5.2 Arbitraje tipo II

Cartera	FC	FC_s
Comprar deuda sin riesgo	-5	$(1,1,1)$
Short seguro desempleo	+2	$(-1,0,0)$
Short deuda riesgosa	+4	$(0,-1,-1)$
Neto:	+1	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

Tampoco hay riesgo, pero lo importante en arbitraje tipo II es que hoy se tiene cero flujo de caja, pero en algunos estados de la naturaleza se tiene flujo de caja positiva.

Uno como un fondo compraría millones y millones explotando las diferencias en las valoraciones, pero entonces la gente haría eso, aumentando la demanda del instrumento y esto subiría el precio hasta el punto de volver a igualar las valoraciones.

Por eso, una de las condiciones de finanzas es que ya no queden oportunidades de arbitraje porque sería dinero regalado: los precios tienen que ser de tal manera que no haya oportunidades de arbitraje porque sería demasiado atractivo.

Habría que ajustar los números de manera que cierren, pero aquí lo importante es ver que en la columna de la derecha no me están quedando puros 0's.

Arbitraje tipo II sería si en la tabla anterior se tuviera algo así:

El equilibrio del mercado de capitales requiere que los precios del mercado se fijen de modo que la oferta sea igual a la demanda para cada valor de seguridad individual. En el contexto del marco de preferencias por estado, **una condición necesaria para el equilibrio del mercado requiere que cualquier par de valores de seguridad o carteras con los mismos vectores de pago contingentes al estado se fijen con precios idénticos**.

De lo contrario, todos querrían comprar el instrumento o la cartera con el precio más bajo y vender el instrumento o la cartera con el precio más alto. Si ambos instrumentos o carteras están en oferta positiva, tales precios no pueden representar un equilibrio. Esta condición se llama la ley del precio único de los mercados.

Si se permite la venta en corto en el mercado de capitales, podemos obtener una segunda condición necesaria relacionada para el equilibrio del mercado: la ausencia de cualquier oportunidad de arbitraje sin riesgo.

Cuando dos carteras, A y B, se venden a precios diferentes, donde $p_A > p_B$, pero tienen vectores de pago contingentes al estado idénticos, podríamos vender en corto la cartera más cara y obtener un flujo de efectivo de p_A, luego comprar la cartera más barata, con un flujo de efectivo negativo de p_B. Obtendríamos un flujo de efectivo neto positivo de $(p_A - p_B)$, y al final del periodo, podríamos, sin riesgo alguno, recibir nuestro pago de poseer la cartera B para repagar exactamente nuestra posición corta en la cartera A.

Por lo tanto, el flujo de efectivo neto positivo al comienzo del periodo representa una oportunidad de arbitraje sin riesgo. Dado que se supone que todos los inversores prefieren más riqueza a menos, esta oportunidad de arbitraje es inconsistente con el equilibrio del mercado.

En un mercado de capitales perfecto y completo, el vector de pago de cualquier instrumento del mercado puede ser replicado exactamente por una cartera de instrumentos puros. Por lo tanto, se sigue que cuando se permite la venta en corto, la condición de no arbitraje requiere que el precio del instrumento del mercado sea igual al precio de cualquier combinación lineal de instrumentos puros que replique el vector de pago del valor de seguridad del mercado.

8. Los mercados completos descentralizados son óptimos de Pareto

Vamos a seguir con mercados completo, en particular tiene que ver con los teoremas del bienestar. Más específicamente, que un mercado completo lleva a un óptimo de Pareto.

Los pasos para esta demostración son los siguientes:

- En primer lugar, un óptimo de Pareto es equivalente a una economía en donde un planificador social que asigna pesos a los distintos agentes. Esto es de microeconomía.
- La segunda parte es que la equivalencia anterior, también equivale a una economía descentralizada con mercados completos.

$$\begin{array}{c}\text{óptimo de}\\ \text{Pareto}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c}\text{planificador social}\\ \text{pesos a cada agente}\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c}\text{economía descentralizada}\\ \text{mercados completos}\end{array}$$

Este teorema del bienestar es muy importante y se relaciona con la mano invisible de Adam Smith: en una economía descentralizada se llega a un óptimo de Pareto con la gente buscando cada quien maximizar su utilidad.

Vamos a ver varios supuestos de esta economía.

8.1 Supuestos

1. Es una economía intercambio. Se hace por simplicidad. Podría ser una economía de producción también.
2. Hay dos períodos: $t = 0$ y $t = 1$. Este supuesto no es tan importante porque se podría pensarse que 0 es hoy y 1 es el futuro y en el futuro podrían haber varios estados de la naturaleza.
3. Hay estados de la naturaleza en $t = 1$: $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ donde cada $s_i \in S$ es un estado de la naturaleza particular.
4. Hay I consumidores con una utilidad $u_{is}(C_{i0}, c_{1s})$. Hay dos subíndices: el i se refiere al agente particular y s es la utilidad en cada estado de la naturaleza (es estado-dependiente).
5. Las probabilidades son las siguientes $\pi_{is} \geq 0$ tal que $\sum_{s \in S} \pi_{is} = 1$. Que las probabilidades también tengan subíndice se interpreta como que se permite que cada agente tenga una utilidad subjetiva independiente cada agente. Hay modelos en donde se supone que todos los agentes tienen la misma utilidad, pero así nadie compraría o vendería activos financieros, pero más bien esas transacciones se dan justamente por esas diferencias en las utilidades. Vamos a ver un ejemplo de esta economía.

Ejemplo 8.1 — Ejemplo de una economía. En esta economía hay tres agentes. Los estados de la naturaleza son los siguientes:

$$S = \{\text{sequía, normal, lluvioso}\}$$

Y los agentes son:

a. Archie: tiene una utilidad cardinal

$$u_A = C_{0A}^{\frac{3}{4}} C_{1A}^{\frac{1}{4}}$$

Y las probabilidades que Archie piensa que va a tener la economía son:

$$\pi_A = \left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$$

La función de utiliad es una Cobb-Douglas. Como el exponente de C_{0A} es mayor que el de C_{1A} entonces Archie es impaciente. Además, Archie es averso al riesgo (esto se puede ver con la segunda derivada con respecto a cada uno de los consumos).
Esta no es una función de utilidad HARA. No se puede separar como una suma. Esto tiene una consecuencia importante:

$$\frac{\partial u_A}{\partial C_{0A}} = \frac{3}{4}\left(\frac{C_{sA}}{C_{0A}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Note que la utilidad marginal del consumo de hoy depende de cuánto vaya a consumir mañana. Esto es un caso especial que sucede cuando no se tengan utilidades que sean separables (son estado-dependientes).
Si se quisiera sacar la utilidad marginal esperada sería:

$$E\left[\frac{\partial u_A}{\partial C_{0A}}\right] = \frac{3}{4}\sum_{s\in S} \pi_{sA}\left(\frac{\partial u_A}{\partial C_{0A}}\right)$$

b. Betty: $u_B = \ln C_{0B} + 0.85 \ln C_{1b}$ y las probabilidades de Betty son: $\pi_B = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.
Note que las probabilidades de Betty y Archie son diferentes. En particular Betty le asigna la misma probabilidad a los 3 estados de la naturaleza.
Betty es impaciente y aversa al riesgo. Esta función de utilidad sí es separable:

$$\frac{\partial u_B}{u C_{0A}} = \frac{1}{C_{0A}}$$

En esta utilidad marginal no aparece el consumo de mañana, y esto es lo simplificador que tienen las utilidades que sí son separables.

c. Cheryl: $u_C = \left[1 - \frac{1}{C_{0C}}\right] + 0.9\left[1 - \frac{1}{C_{1C}}\right]$. Cheryl y Betty tienen utildidades Hara: Cheryl valora el consumo de mañana al 90% del consumo de hoy, y por ende es más paciente Cheryl, porque Betty valora el consumo de mañana al 85% del consumo de hoy.

En las utilidades de Cheryl y Betty se tienen casos HARA. Son utilidades isoelásticas, y estas tienen un coeficiente de aversión al riesgo relativo.
En caso de ln el coeficiente es $\gamma = 1$ y la logarítimica no tiene ni piso ni techo. Luego, la utilidad de Cheryl tiene techo, y cuando se tiene un techo, según Arrow, para que tenga techo, $w \to \infty$ entonces la $RRA(w) > 1$. El caso de Cheryl es la función isoelástica con aversión al riesgo relativa de 2 $\gamma = 2$. Por lo tanto, Cheryl es más aversa al riesgo. Cheryl es más paciente pero también es más paciente. ■

6. Se tienen unas dotaciones e_{i0} para el agente i en el período 0 y e_{is} para el estado s. Además $\sum_{s \in S}^{I} e_{i0} \equiv E_0$ y $\sum_{s \in S}^{I} e_{is} \equiv E_s \; \forall s \in S$.
7. Hay N instrumentos puros y esto implica que el mercado va a estar completo. Cada instrumento tendrá un precio P_s un suscrito del estado de la naturaleza. P_0 es el precio del período 0, el primer período y además $P_0 \equiv 1$: porque como se tienen $n+1$ precios, se usa 1 como denominador.

8.2 Propiedades óptimo de Pareto

Primero hay que definir:

1. Repartición: es la reparticipación que se le da a cada agente $c^* = \{c_1^*, c_2^*, \ldots, c_I^*\}$ con I columnas.

$$c_i^* = \begin{bmatrix} c_{i0}^* \\ c_{i1}^* \\ c_{i2}^* \\ \vdots \\ c_{in}^* \end{bmatrix}$$

donde se tiene una dimensión $I \times n+1$.

Esta repartición es óptimo de Pareto si cumple la siguientes condiciones:

- Factibilidad: c^* es factible si:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i0}^* \leq E_0$$

Y la suma de los consumos en los estados de naturaleza es menor o igual a la dotación en ese estado de la naturaleza:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{ij}^* \leq E_s \; \forall \; s \in S$$

- No existe c' tal que la utilidad esperada para los agentes con esta nueva repartición sea mayor o igual que la utilidad esperada con la repartición anterior:

$$E[u_i(c_i')] \geq E[u_i(c_i^*)] \; \forall \; i$$

con desigualdad estricta en algún caso (siempre y cuando c' también sea factible).

Ahora hay que usar un teorema del Bienestar:

Teorema 8.1 — Teorema del bienestar (Varian). Si c^* es una repartición óptimo de Pareto, esto es equivalente a que existan pesos $\eta_i > 0$ de un planificador social que maximiza.

Vamos a ver con detalle las condiciones que dan esa equivalente de los pesos.

Ejemplo 8.2 — Corea del Norte. Suponga que usted es el líder de Corea del Norte, y se va a hacer una maximización de la utilidad social:

$$\max_{c_{i0},c_{is}} \quad \sum_{i=1}^{I} \eta_i E_i[u_i(c_i)]$$
$$\sum_{i=1}^{I} \eta_i \sum_{s\in S} \pi_{is} u_{is}(c_{i0}, c_{is})$$

tal que se cumplan las condiciones de factibilidad:

$$\sum_{i=1}^{I} c_{i0} \leq E_0$$
$$\sum_{i=1}^{I} c_{is} \leq E_s \ \forall \ s \in S$$

Se usa el subíndice i en E_i porque se está usando la probabilidad subjetiva que puede tener cada agente.

Esto se puede resolver mediante un lagrangiano:

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{I} \eta_i \sum_{s\in S} \pi_{is} u_{is}(c_{i0}, c_{is}) + P_0 \left[E_0 - \sum_{i=1}^{I} c_{i0} \right] + \sum_{s\in S} P_s \left[E_s - \sum_{i=1}^{I} c_{is} \right]$$

Recordar que el multiplicador de Lagrange λ se interpreta como un precio sombra, entonces se usa la notación P_0.

Este es el problema del planificador social. Ahora hay que tomar las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_{i0}} = 0 \Leftrightarrow \eta_i \sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} - P_0 = 0 \tag{8.1}$$
$$\eta_i \sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} = P_0 \tag{8.2}$$

Observe que si la función de utilidad no es separable, va a depender de todos los estados de la naturaleza posibles en esa economía. Ahora la siguiente condición de primer orden:

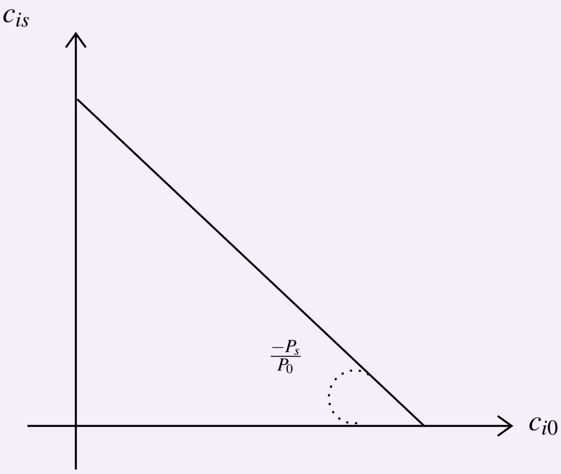
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial c_{is}} = 0 \Leftrightarrow \eta_i \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}} - P_s = 0 \tag{8.3}$$
$$\eta_i \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}} = P_s \tag{8.4}$$

Tomando 8.2 y 8.4 se obtiene:

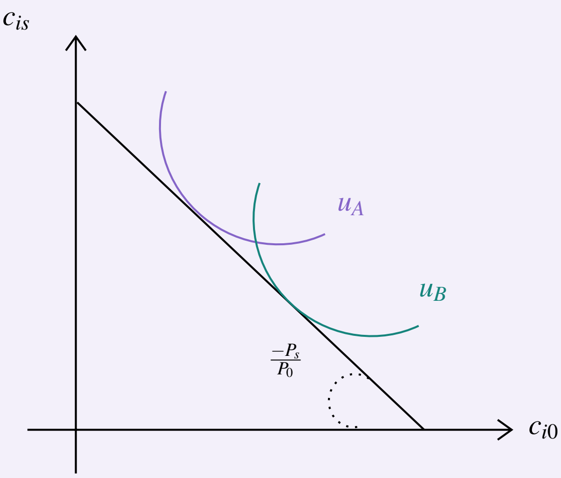
$$\frac{P_s}{P_0} = \pi_{is} \cdot \frac{\left(\frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}}\right)}{\sum_{s \in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}}}$$

$$= \pi_{is} \cdot \frac{\left(\frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}}\right)}{E_i \left[\frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}}\right]}$$

Esta última ecuación dice que la razón de utilidades marginales siempre va a estar en esta línea de precios:



Así las cosas entonces ahora considere dos agentes: Archie y Betty:



No necesariamente tienen que consumir lo mismo ambos, pero para que sí se sepa que están maximizando, la curva de indiferencia de cada uno de ellos tiene que ser tangente a esa política de precios dada. ■

La asignación óptima de riqueza representa elegir C y los Q's de manera que la proporción de las utilidades marginales esperadas sea igual a la proporción de los precios de mercado para C y los Q's.

Es decir, las elecciones óptimas de consumo e inversión implican elegir puntos en las diversas curvas de indiferencia (curvas de utilidad esperada constante) que sean

tangentes a las líneas de mercado asociadas.

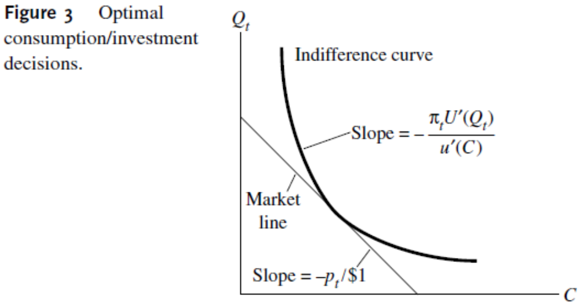


Figure 8.1: Decisiones de consumo e inversión óptimas

Esto es equivalente a elegir pesos de consumo e inversión de manera que las pendientes de las curvas de indiferencia (que se definen como el negativo de las tasas marginales de sustitución) que representan el consumo actual y el consumo futuro contingente al estado t (como en la Fig. 3) o representando el consumo futuro contingente al estado t (como en la Fig. 4) sean iguales a las pendientes de las respectivas líneas de mercado (que representan las tasas de cambio del mercado, por ejemplo, $-p_t/p_s$).

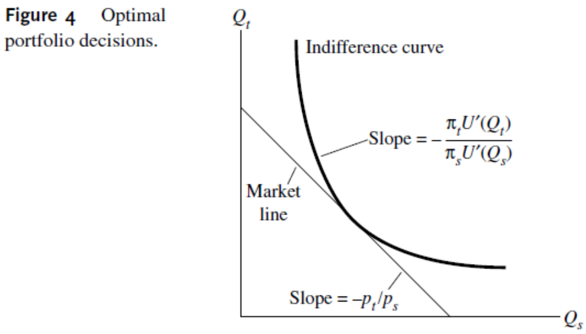


Figure 8.2: Decisión óptima de cartera

Una forma alternativa de expresar las condiciones de optimalidad del portafolio anterior es que las utilidades marginales esperadas de la riqueza en el estado s, divididas por el precio del instrumento puro del estado s, deben ser iguales en todos los estados, y esta proporción también debe ser igual a la utilidad marginal del consumo actual.

Este es un resultado razonable; si la utilidad marginal esperada por precio del instrumento puro fuera alta en un estado y baja en otro, entonces no habríamos maximizado la utilidad esperada. Deberíamos aumentar la inversión en el instrumento de alta utilidad marginal esperada a expensas del instrumento que ofrece baja utilidad marginal esperada.

Pero al hacerlo, disminuimos la utilidad marginal esperada donde es alta y la aumentamos donde es baja, porque la utilidad marginal de un inversionista adverso al riesgo disminuye con la riqueza (su función de utilidad tiene una pendiente positiva pero decreciente).

Finalmente, cuando se satisface la Ecuación $\frac{p_t}{p_s} = \frac{\pi_t U'(Q_t)}{\pi_s U'(Q_s)}$, no queda forma de proporcionar un aumento adicional de la utilidad esperada.

Ahora vamos a ver un equilibrio descentralizado.

8.3 Equilibrio descentralizado

Las ecuaciones que se obtenían del problema de maximización de un equilibrio centralizado son:

$$\eta_i \sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} = P_0$$
$$\eta_i \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}} = P_s$$

Ahora habría que ver un equilibrio descentralizado con mercados completos (implica que hay un precio para cada estado de naturaleza): ya no hay un planificador social, sino que cada agente maximiza su utilidad sujeta a una restricción presupuestaria:

$$\max_{c_{i0},c_{is}} \sum_{s\in S} \pi_{is} u_{is}(c_{i0}, c_{is})$$

tal que

$$\underbrace{P_0 c_{i0} + \sum_{s\in S} P_s c_{is}}_{\text{valor del consumo}} = \underbrace{p_0 e_{i0} + \sum_{s\in S} P_s e_{is}}_{\text{valor de la riqueza}}$$

Esto lo que está diciendo es que no se puede consumir más de lo que se tiene.
Entonces ahora se tiene:

$$\mathscr{L}_i = \sum_{s\in S} \pi_{is} u_{is}(c_{i0}, c_{is}) + \lambda_i \left[P_0(e_{i0} - c_{i0}) + \sum_{s\in S} P_s(e_{is} - c_{is}) \right]$$

Ahora el lagrangiano tiene un subíndice i, porque es cada agente el que está haciendo el problema de maximización en lugar de un planificador social.

λ_i ya no es un precio sombra: su valor es positivo y su interpretación es que refleja el efecto de tener un poco más de riqueza sobre mi utilidad marginal.

Tomando las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial c_{i0}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} - \lambda_i P_0 = 0 \tag{8.5}$$
$$\frac{1}{\lambda_i} \sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} = P_0 \tag{8.6}$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial c_{is}} = 0 \Leftrightarrow \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}} - \lambda_i P_s = 0 \tag{8.7}$$
$$\frac{1}{\lambda_i} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} = P_s \tag{8.8}$$

Combinando 8.6 y 8.8 se obtiene que:

$$\frac{P_s}{P_0} = \pi_{is} \cdot \frac{\left(\frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}}\right)}{\sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}}}$$

Se llega a la misma solución de los precios relativos: por lo tanto un equilibrio descentralizado es equivalente a un mercado centralizado, y un mercado centralizado es equivalente a un óptimo de Pareto, y por lo tanto un mercado descentralizado es equivalente a un óptimo de Pareto.

Ahora, tomando las cuatro ecuaciones de las condiciones de primer orden de ambos problemas: 8.2, 8.4, 8.6 y 8.8 se observa que:

$$\begin{aligned}
\eta_i \sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} &= P_0 \\
\eta_i \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{is}} &= P_s \\
\frac{1}{\lambda_i} \sum_{s\in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} &= P_0 \\
\frac{1}{\lambda_i} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}}{\partial c_{i0}} &= P_s
\end{aligned}$$

Esta equivalencia dice que para que sean iguales (por ejemplo la primera y la tercera) debe ser que $\eta_i = \frac{1}{\lambda_i}$: **El peso que le debe asignar el planificador social debe ser igual a $\frac{1}{\lambda_i}$ y λ_i era cuánto le agrega a mi utilidad aumentar mi riqueza.**

Si mi consumo sube mi utilidad aumenta pero cada vez menos, por lo que la utilidad marginal disminuye: $\uparrow c_i \rightarrow u_i' \downarrow$ **y entonces esto significa que $\lambda_i \downarrow \rightarrow \eta_i \uparrow$: esto quiere decir que el planificador social le da más peso a los agentes que tienen más consumo**.

Este resultado súper importante porque confirma que el mercado descentralizado llega a un óptimo de Pareto.

Ejemplo 8.3 Si la función de utilidad es $u = \ln C_i$ entonces $u' = \frac{1}{C_i} = \lambda \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = C_i$.

Esto lo que dice es que a más consumo se tiene una utilidad marginal más baja: esto es el concepto de $\lambda_i \rightarrow$ el efecto de tener un colón adicional.

Al principio es mucho el efecto marginal, pero luego conforme tenga más y más colones el efecto marginal va bajando (λ va bajando y $\frac{1}{\lambda}$ va subiendo).

Entonces el planificador social le da más peso a la gente que tiene más consumo. ■

8.3.1 Determinantes de P_s

Primero hay que simplificar y se van a suponer varias cosas:

1. $\pi_{is} = \pi_s$ esto quiere decir que todas las personas tienen las mismas percepciones sobre los estados de la naturaleza: probabilidades homogéneas
2. La utilidad cardinal $u_{is}(c_{i0}, c_{is}) = a_i + b_i u(c_{i0}) + b_i e^{-\delta} u(c_{i1})$ para $i = 1, \ldots, I$. Se está diciendo que las utilidades son separables. Además las utilidades cardinales admitían transformaciones lineales crecientes, por lo que se está diciendo que se tiene un agente con utilidades separables.

   Lo interesante es la siguiente intuición:

$$\begin{aligned}
\frac{P_s}{P_0} &= P_s \\
&= \underbrace{\pi_s e^{-\delta} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{is}}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{i0}}\right)}}_{\text{precio puro}}
\end{aligned}$$

   Con $P_0 \equiv 1$. **Estos son los precios de los instrumentos puros.**

En Copeland y Weston se define otro precio θ_s

$$\theta_s \equiv \frac{P_s}{\pi_s} = \underbrace{e^{-\delta} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{is}}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{i0}}\right)}}_{\substack{\text{precio por unidad}\\ \text{de probabilidad}}}$$

Esto se puede pensar como un precio dividido entre la probabilidad.

Ahora se van a ver los determinantes de los precios de los instrumentos puros.

8.4 Determinantes de los precios de los instrumentos puros

Vamos a ir viendo (situaciones) del más intuitivo al menos:

1. Aumenta la probabilidad de ese estado de la naturaleza $\uparrow \pi_s$: ¿qué le pasa al precio? $\rightarrow$ sube.

$$\uparrow P_s = \uparrow \pi_s e^{-\delta} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{is}}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{i0}}\right)}$$

   Si se vuelve más probable que ocurra ese estado de la naturaleza ese instrumento es más valioso.

2. Aumenta la impaciencia $\uparrow \delta$: se valora menos el futuro y baja el precio del instrumento:

$$\downarrow P_s = \pi_s \downarrow e^{-\delta \uparrow} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{is}}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{i0}}\right)}$$

3. Baja la dotación en un estado de la naturaleza $\downarrow E_s$: si baja la dotación en un estado de la naturaleza baja el consumo en ese estado $\downarrow c_{is}$ y si baja el consumo sube la utilidad marginal $\frac{\partial u}{\partial c_{is}} \uparrow$ aumenta, entonces aumenta el precio:

$$\uparrow P_s = \pi_s e^{-\delta} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{is}}\right)\uparrow}{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{i0}}\right)}$$

   Si la dotación de un estado disminuye entonces los precios suben porque hay más escasez.

4. Aumenta la dotación del período inicial $E_0 \uparrow$: aumenta el consumo $c_{i0} \uparrow$ y entonces baja la utilidad marginal $\frac{\partial u}{\partial c_{io}} \downarrow$ y el precio aumenta:

$$\uparrow P_s = \pi_s e^{-\delta} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{is}}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial c_{i0}}\right)\downarrow}$$

   En el caso anterior había una escasez absoluta, pero ahora la escasez es relativa

5. Si aumenta la aversión al riesgo ARA $RRA \uparrow$ hay mayor dispersión de precio.

δ se puede interpretar como la **impaciencia**.

8.5 Precios y rendimientos de instrumentos complejos

Se tiene la siguiente situación:

$$\begin{aligned} R_{js} =& 1 + \tilde{r}_{js} \\ =& \frac{FC_{js}}{V_j} \end{aligned}$$

FC_{js} es el flujo de caja (*cash flow* CF_{js}) entre el precio V_j. Este es el rendimiento simple estado por estado de la naturaleza.

$$\begin{aligned} E[R_{js}] &= 1 + E[\tilde{r}_{js}] \\ &= \frac{E[FC_j]}{V_j} \end{aligned}$$

V_j no cambia porque es el precio inicial al cual se compró el activo.

Entonces queda la siguiente relación:

$$V_j = \frac{E[FC_j]}{1 + E[\tilde{r}_j]}$$

Esta relación se llama **valor actual o descontado**: se trae a valor presente usando una tasa de descuento.

Se quita el subíndice s porque es una esperanza, se están considerando todo, es la suma ponderada de cada uno.

Antes cuando se vieron mercados completos se decía que el precio del instrumento puro o complejo se debía calcular como la suma de los precios de los instrumentos puros por el flujo de caja en ese estado de la naturaleza;

$$V_j = \sum_{s \in S} P_s \cdot FC_{js}$$

Cuando esto no se da, cuando el precio del instrumento complejo difiera de esta sumatoria se puede hacer arbitraje: hay oportunidades de ganancias.

Hay dos instrumentos complejos que interesan mucho en economía financiera:

1. **Bono libre de riesgo**: tiene la característica de que **paga lo mismo en cualquier estado de la naturaleza** $CF_{js} = 1 \ \forall s \in S$. Si el pago fueran 2, se interpretaría como si fueran dos bonos los que se tienen. Es un bono cupón cero (no paga cupones sino que al final paga el valor facial que en este caso **el valor facial es 1**) porque $V_F = \sum_{s \in S} P_s$. El rendimiento bruto sería $R_F = 1 + \tilde{r_F} = \frac{1}{V_F}$. **Este instrumento libre de riesgo tiene una característica especial que no tienen los otros instrumentos: el rendimiento bruto no cambia con los distintos estados de la naturaleza** $\rightarrow$ **eso es justamente lo que los hace libre de riesgo, que se sabe siempre cuál va a ser el rendimiento que le va a ofrecer**.
2. El mercado: se puede pensar como el que de un flujo de caja igual a las dotaciones $CF_{js} = E_s$, o sea, es el resto de la economía. Tiene un valor V_m. El rendimiento bruto es $R_{ms} = 1 + \tilde{r}_{ms} = \frac{E_s}{V_m}$. La esperanza es $E[\tilde{r}_m] = \frac{E[E_s]}{V_m} - 1$. Esto es el rendimiento que da el mercado. Aunque usualmente no se le llama así, sino más bien prima de mercado o *market risk premium* $MRP = E[\tilde{r}_m - r_F]$.
   La tasa libre de riesgo es clave y se veía a través de la curva de rendimientos, y la otra variable importante para valorar activos es la prima de mercado.
   Para Costa Rica la tasa libre de riesgo se obtiene de la curva de rendimientos y para Costa Rica era algo así como $r_F = 8\%$ **en colones. Pero la prima de riesgo es cuánto de más, más allá de la prima de riesgo, da el mercado entonces suponga que para Costa Rica fuera 6%** $MRP = 6\%$ **entonces si se invirtiera en Costa Rica en un instrumento riesgoso, habría sumarle 6 al 8% y en total sería 14%**.

Ejercicio 8.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿De qué dependen los precios puros?* → Dependen de:
   a. La probabilidad de que pasen
   b. Del riesgo
   c. De la impaciencia de los agentes
   d. De las dotaciones
   e. De la aversión al riesgo
2. *¿Puede ser el precio de un instrumento puro tener un valor negativo y por qué?* → No puede ser negativo porque cuando se hace la maximización se plantea que a mayor dotación aumenta la riqueza y el precio del instrumento representa ese factor.
3. *¿Qué pasa con la tasa libre de riesgo cuando aumenta la aversión al riesgo?* → Los precios se hacen más dispersos: los pequeños más pequeños y los grandes más grandes. *¿Pero qué le pasa a la tasa libre de riesgo?* → Empíricamente se dice que la tasa libre de riesgo va a disminuir.
4. *¿Qué es el θ_s?* → Es un precio por unidad de probabilidad.
   ¿Y para qué sirve? → Sirve para representar la abundancia o escasez de las dotaciones.

   Uno lo tiene que comparar con el $e^{-\delta}$. Una perfecta pregunta de falso o verdadero sería la siguiente:
   $\theta_s < 1$ **significa que hay abundancia siempre.** → **Esto sería falso si es menor que $e^{-\delta}$.**

8.5.1 Un ejemplo de equilibrio de mercados completos

Ahora vamos a hacer un ejemplo. Se va a suponer que hay agentes como la misma utilidad (como una especie de agente representativo).

$$u_i(c_{i0}, c_{i1}) = \left(\frac{c_{i0}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) + e^{-\delta}\left(\frac{c_{i1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

Esta es una función de utilidad isoelástica o CRRA (aversión al riesgo relativa constante). La utilidad marginal respecto al consumo de hoy es:

$$\frac{\partial u_i}{\partial c_{i0}} = c_{i0}^{-\gamma}$$

Y la utilidad marginal respecto al consumo de mañana es:

$$\frac{\partial u_i}{\partial c_{i0}} = e^{-\delta} c_{i1}^{-\gamma}$$

De las condiciones de primer orden del equilibrio descentralizado

$$\begin{aligned}\frac{P_s}{P_0} &= \pi_s e^{-\delta} \frac{\left[c_{is}^{-\gamma}\right]}{\left[c_{i0}^{-\gamma}\right]} \\ &= \pi_s e^{-\delta} \left(\frac{c_{is}}{c_{i0}}\right)^{-\gamma}\end{aligned}$$

Despejando:

$$\left(\frac{c_{is}}{c_{i0}}\right)^{\gamma} = \pi_s e^{-\delta}\left(\frac{P_0}{P_s}\right)$$

$$c_{is} = \left[\pi_s e^{-\delta}\left(\frac{P_0}{P_s}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot c_{i0}$$

Esto lo que está diciendo es que el consumo en el estado s es proporcional siempre al al consumo en el período 0.

La razón por la se despeja de esa manera es:

$$b = a \cdot \left(\frac{c_{is}}{c_{i0}}\right)^{-\gamma}$$

$$b = a \cdot \frac{c_{is}^{-\gamma}}{c_{i0}^{-\gamma}}$$

$$\frac{c_{i0}^{-\gamma}}{c_{is}} b = a$$

$$\left(\frac{c_{i0}^{-\gamma}}{c_{is}}\right)^{-\gamma} b = a$$

$$\left(\frac{c_{is}}{c_{i0}}\right)^{\gamma} \cdot b = a$$

Ahora se quiere ver el equilibrio general:

$$E_s = \sum_{i=1}^{I} c_{is}$$

$$= \left[\pi_s e^{-\delta}\left(\frac{P_0}{P_s}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}} \underbrace{\sum_{i=1}^{I} c_{i0}}_{E_0}$$

Entonces lo que sale de aquí, y lo importante es que la relación de las dotaciones totales

$$\frac{E_s}{E_0} = \left[\pi_s e^{-\delta}\left(\frac{P_0}{P_s}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\left[\frac{E_s}{E_0}\right]^{\gamma} = \pi_s e^{-\delta}\left(\frac{P_0}{P_s}\right)$$

$$P_s = \pi_s e^{-\delta}\left[\frac{E_s}{E_0}\right]^{-\gamma}$$

Y ya se tiene el precio de los instrumentos puros. Y los precios ajustados por probabilidad también se puede encontrar el precio ajustado por probabilidad:

$$\frac{\theta_s}{\pi_s} = e^{-\delta}\left[\frac{E_s}{E_0}\right]^{-\gamma}$$

Estos resultados de los precios van a ser muy interesantes.

Ahora se va a suponer una economía con tres agentes $I = 3$, $e^{-\delta} = 0.9$ y $\gamma = 1$ (esto implica que al trabajar $\frac{c_{i0}^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ $\gamma = 1 \Rightarrow \ln$). Además, se tienen tres estados de la naturaleza: $S = \{\text{sequía, normal, lluvioso}\}$. El bien de esta economía van a ser las naranjas.

	e_{i0}	Instrumento complejo	e_{11}	e_{12}	e_{13}
Archie	2	Arroyo	2	2	0
Betty	1	Bajura	1	1	2
Cheryl	1	Colina	0	1	3
Total	4		3	4	5

Los tres agentes son dueños de un instrumento complejo: una finca que va a tener distintos repagos en los diversos estados de la naturaleza:

Aquí la pregunta es si el mercado está completo o no. No hay instrumentos puros. Donde hay instrumentos complejos, uno tiene que fijarse en que hayan tantos estados de la naturaleza como instrumentos complejos independientes, y para ver si hay independencia hay que ver el determinante de la matriz de pagos:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\det C = 4$$

Y como la matriz tiene determinante distinto de 0, es invertible. Ahora hay que sacar la matriz inversa:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz inversa se interpreta como: es la forma en cómo a partir de los instrumentos complejos se puede crear los instrumentos simples, es como una receta de cocina.

Hay que usar la ecuación de los precios de los instrumentos puros:

$$\begin{aligned} P_s =& \pi_s \cdot 0.9 \left[\frac{E_s}{E_0}\right]^{-1} \\ =& 0.9\pi_s \left[\frac{E_0}{E_s}\right] \end{aligned}$$

Y $\theta_s = 0.9\left[\frac{E_0}{E_s}\right]$.

Y con esto se está listo para encontrar el precio de los estados de la naturaleza. El primer instrumento puro es un instrumento que paga 1 en sequía

$$\begin{aligned} P_1 =& 0.9 \cdot 0.25 \left[\frac{4}{3}\right] \\ =& 0.30 \Rightarrow \theta_1 = 1.20 \end{aligned}$$

Y para el segundo instrumento que paga en estado normal:

$$\begin{aligned} P_2 =& 0.9 \cdot 0.5 \left[\frac{4}{3}\right] \\ =& 0.45 \Rightarrow \theta_1 = 0.9 \end{aligned}$$

El precio del instrumento 2 es mayor que el precio del instrumento 1 porque es más probable que ocurra el estado 2 que el estado 1. Sin embargo observe que no paga lo mismo con los θ's.

$$\begin{aligned} P_3 =& 0.9 \cdot 0.5 \left[\frac{4}{5}\right] \\ =& 0.18 \Rightarrow \theta_1 = 0.72 \end{aligned}$$

Pero ahora note que el tercer instrumento tiene un menor precio que el instrumento 1, pero la dotación es distinta en ambos períodos: en el período 3 hay más naranjas que en le período 1, por lo que hay abundancia de naranjas y son más baratas.

Instrumento	Precio	Precio ajustado por probabilidad
1	$p_1 = 0.30$	$\theta_1 = 1.20$
2	$p_2 = 0.45$	$\theta_2 = 0.90$
3	$p_3 = 0.18$	$\theta_3 = 0.72$

θ_1 es mayor que θ_2 y θ_2 es mayor que θ_3. El θ justamente lo que hace es quitar el elemento de la probabilidad, controlar por la probabilidad. θ es un factor de la abundancia del bien: qué tan abundante o escaso es el bien: el estado 1 es escaso en naranjas y el estado 3 es abundante en naranjas.

Pero, entonces ¿por qué en el estado 2 no es igual a 1 si ahí no hay abundancia ni escasez? $\rightarrow$ pensando en las utilidades el θ lo que refleja es la impaciencia.

Entonces θ incluye dos cosas: la escacez o abundancia del bien pero también la impaciencia.

Ahora, ¿qué pasa cuando $\gamma = 2$? ¿Qué pasa con los agentes? Un γ mayor significa más aversión al riesgo (relativa). Entonces hay que ver qué pasaría con la tabla anterior:

$$\begin{aligned} P_1 =& 0.9 \cdot 0.25 \left[\frac{4}{3}\right]^2 \\ =& 0.40 \end{aligned}$$

El precio del instrumento simple aumentó. Y para el segundo instrumento que paga en estado normal:

$$\begin{aligned} P_2 =& 0.9 \cdot 0.5 \left[\frac{4}{3}\right] \\ =& 0.45 \end{aligned}$$

El precio del instrumento 2 con $\gamma = 2$ es igual que el precio del instrumento 2 cuando γ era igual 1. Finalmente, para el precio 3:

$$\begin{aligned} P_3 =& 0.9 \cdot 0.5 \left[\frac{4}{5}\right] \\ =& 0.144 \end{aligned}$$

Cuando las personas se volvieron más aversos al riesgo, les preocupa más el estado donde hay solo 3 naranjas, entonces la gente busca comprar más ese instrumento, y al subir la demanda el precio del instrumento sube. Los otros estados donde hay más naranjas, no importan tanto como el estado donde puede haber menos naranjas.

Instrumento	Precio	Cambio respecto a $\gamma = 1$
1	$p_1 = 0.40$	Aumentó
2	$p_2 = 0.45$	Se mantuvo igual
3	$p_3 = 0.144$	Disminuyó

Ahora, volviendo al caso $\gamma = 1$ para calcular el bono cupón cero $CF_{js} = 1 \; \forall \; s \in S$

$$V_F = \sum_{s \in S} P_s$$

Y como $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned} V_F =& 0.30 + 0.45 + 0.18 \\ =& 0.93 \end{aligned}$$

El valor facial sería 1 y el precio reportado en los medios (Bloomberg) sería 93. El flujo de caja esperado del bono sería 1 porque paga lo mismo en todos los estados:

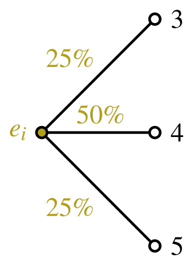
$$\begin{aligned} V_F =& \frac{E[FC_j]}{1 + E[r_F]} \\ =& \frac{1}{1 + r_F} \end{aligned}$$

r_F puede salir de la esperanza porque no cambia a lo largo de los estados de la naturaleza.

Luego,

$$\begin{aligned} r_F =& \frac{1}{V_F} - 1 \\ =& 0.07526 \\ =& 7.526\% \end{aligned}$$

Uno hubiera pensado que como la tasa de descuento es de 0.9 entonces la tasa libre de riesgo debería ser de 10%, pero está 7.526%, entonces ¿qué está pasando aquí? $\rightarrow$ la economía hoy tiene una dotación de 4, y mañana puede haber dotación de 3,4 o 5.



Esto no les gustaría a las personas aversas al riesgo, de hecho el período de mañana se puede ver como un aumento en riesgo respecto al período de hoy por ese 4 ± 1. Si el futuro de mañana es incierto, compraría un seguro. Cuando hay más incertidumbre la gente ahorra más: si la gente ahorra más entonces al precio de los instrumentos deberían aumentar $\uparrow P_s$ y al bono cupón cero (que es la suma de los instrumentos puros) debería aumentar también y con eso la tasa libre de riesgo debería disminuir.

Por ejemplo, la curva de rendimientos de Estados Unidos había bajado durante el Covid: con el Covid aumentó la incertidumbre, y con eso la gente quería ahorrar más, y los bonos subieron de precio y los rendimientos esperados bajaron.

Hay dos elementos que afectan la tasa libre de riesgo: la impaciencia y la aversión al riesgo.

Ahora hay que ver el caso del mercado: la característica del mercado es que tenía repagos iguales a las dotaciones (3,4,5) $CF_{ms} = E_s$. Entonces el instrumento de mercado vale $V_j = \sum CF_{js} \cdot P_s$

$$\begin{aligned} V_m =& 3 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.45 + 5 \cdot 0.18 \\ =& 3.60 \end{aligned}$$

El flujo esperado del mercado sería:

$$\begin{aligned} E[CF_m] =& 3 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.50 + 5 \cdot 0.25 \\ =& 4 \end{aligned}$$

Y el rendimiento esperado sería:

$$\begin{aligned} E[r_m] =& \frac{E[CF_m]}{V_m} - 1 \\ =& \frac{4}{3.6} - 1 \\ =& 0.1111 \end{aligned}$$

Y lo que interesa es la prima de riesgo:

$$\begin{aligned} MRP =& 11.11\% - 7.5\% \\ =& 3.59\% \end{aligned}$$

En esta economía el mercado le está pagando un 3.59% más para que se anime. Esto se llama por riesgo o de mercado. Ahora en el caso donde $\gamma = 2$ la gente se volvió más aversa al riesgo. ¿Qué le pasaría a la tasa libre de riesgo si la gente es más aversa al riesgo? → la gente ahorra más y la tasa libre debería bajar. La prima de riesgo debería aumentar porque si la gente es más aversa al riesga deberían pagarle más para que se anime.

Entonces el bono cupón cero:

$$\begin{aligned} V_F =& 1 \cdot 0.40 + 1 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.144 \\ =& 0.994 \end{aligned}$$

El precio del bono cupón cero subió y la tasa libre de riesgo bajó un montón:

$$r_f = 0.60\%$$

La intuición es que como la gente es más aversa al riesgo, hay más ahorro, entonces suben los precios puros, sube el precio del bono cupón cero y entonces bajan los rendimientos.

Ahora el mercado:

$$
\begin{aligned}
V_m =& 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.45 + 5 \cdot 0.144 \\
=& 3.72
\end{aligned}
$$

La tasa de mercado es:

$$
\begin{aligned}
E[r_m] =& \frac{E[CF_m]}{V_m} - 1 \\
=& \frac{4}{3.72} - 1 \\
=& 0.075 \\
=& 7.5\%
\end{aligned}
$$

La prima de riesgo es:

$$
\begin{aligned}
MRP =& 7.5\% - 0.6\% \\
= 6.9\% \uparrow
\end{aligned}
$$

La prima de riesgo aumentó un montón más porque ahora tienen que pagarle más a la gente para que se animen.

Ahora se va a volver a los instrumentos de Archie, Betty y Cheryl cuando $\gamma = 1$. En ese caso los precios eran $p_1 = 0.30, p_2 = 0.45, p_3 = 0.18$.

- Finca Arroyo pagaba el flujo de caja $\{2,2,0\}$. El valor de un activo complejo es el flujo de caja por los precios:

$$
\begin{aligned}
V_a =& 2 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.18 \\
=& 1.50
\end{aligned}
$$

  Y el flujo de caja esperado:

$$
\begin{aligned}
E[CF_a] =& 2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.50 + 0 \cdot 0.25 \\
=& 1.50
\end{aligned}
$$

  El rendimiento esperado:

$$
\begin{aligned}
E[r_a] =& \frac{E[CF_a]}{V_a} - 1 \\
=& \frac{1.5}{1.5} - 1 \\
=& 0 \\
=& 0\%
\end{aligned}
$$

  Esta finca tiene un rendimiento menor que la tasa libre de riesgo $E[r_a] < r_f$. Esta finca paga más en los estados de naturaleza donde hay sequía y normal, y entonces esta finca paga más en los malos momentos. Hay instrumentos financieros que pagan cuando va mal: se llaman **seguros**. Como es un seguro, se pide un rendimiento menor.
- Finca Bajura:

$$
\begin{aligned}
V_b =& 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.45 + 3 \cdot 0.18 \\
=& 1.11
\end{aligned}
$$

Y el flujo de caja esperado:

$$\begin{aligned} E[CF_b] =& 1 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.50 + 3 \cdot 0.25 \\ =& 1.25 \end{aligned}$$

El rendimiento esperado:

$$\begin{aligned} E[r_b] =& \frac{E[CF_a]}{V_a} - 1 \\ =& \frac{1.25}{1.11} - 1 \\ =& 12.61\% \end{aligned}$$

Este instrumento está pidiendo un rendimiento mayor al mercado.

- Finca Colina

$$\begin{aligned} V_c =& 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.45 + 3 \cdot 0.18 \\ =& 0.99 \end{aligned}$$

Y el flujo de caja esperado:

$$\begin{aligned} E[CF_c] =& 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.50 + 3 \cdot 0.25 \\ =& 1.25 \end{aligned}$$

El rendimiento esperado:

$$\begin{aligned} E[r_a] =& \frac{E[CF_a]}{V_a} - 1 \\ =& \frac{1.25}{0.99} - 1 \\ =& 22.26\% \end{aligned}$$

Queda pendiente calcular para cada estado:

$$\begin{aligned} r_m =& \frac{CF_{ms}}{V_m} - 1 \\ r_j =& \frac{CF_{js}}{V_j} - 1 \end{aligned}$$

Y luego calcular:

$$\frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$$

El rendimiento de mercado se calcula como $\frac{CF}{V} - 1$.

Suponga que se quisiera hacer una regresión:

$$r_{j,s} = \alpha_j + \beta_j \, r_{m,s} + \varepsilon_{j,s}$$

Desde el punto de vista de una regresión, aquí β y $r_{m,s}$ lo que indica es, si el mercado se mueve en un 1%, ¿en cuánto se movería (por ejemplo) Apple? β lo que indica es esa proporción de cambio justamente. Eso se llama el β de una acción.

Buscando el β de dos acciones:

- $\beta_{\text{AAPL}} = 1.28$
- $\beta_{\text{JPM}} = 1.14$
- $\beta_{\text{TSLA}} = 1.64$

Entonces si el mercado sube un +1%:

- Apple subiría 1.28
- JP Morgan subiría 1.14
- Tesla subiría 1.64

Ese $\hat{\beta}$ se calcula: $\hat{\beta}_{js} = \frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$. El error ε_{js} es ruido blanco.

En este mercado se han estudiado 5 tipos de instrumentos:

1. Instrumento libre de riesgo (paga lo mismo en todos los estados de la naturaleza)
2. El mercado: el β del mercado sería 1 y el ruido blanco es 0.
3.
4.
5.

Un $\beta < 0$ podría ser el caso de Zoom. Se podría interpretar como que se mueve contra mercado. El instrumeno libre de riesgo debería tener un $\beta = 0$. Es raro ver $\beta > 2$, por lo que de uno 5.45 es demasiado grande.

El intercepto en la regresión sería la tasa libre de riesgo, y la pendiente es la prima de mercado. Estos dos elementos son vitales para encontrar un equilibrio de mercado.

En economía financiera no interesa mucho el consumo y las dotaciones, pero esta vez sí se va a estudiar.

8.5.1.1 Consumo y dotaciones

La riqueza se determina como la dotación inicial más el valor del instrumento complejo del que se es dueño $e_{i0} + V_i$. En esta economía se tenían los agentes:

$$
\begin{aligned}
\text{Archie: } 2+1.5 &= 3.5 \\
\text{Betty: } 1+1.11 &= 2.11 \\
\text{Cheryl: } 1+0.99 &= 1.99 \\
\text{Total: } 4+3.60 & \quad 7.60
\end{aligned}
$$

Interesa saber cuánto porcentaje de la riqueza tiene cada uno:

- Archie: 46.06%
- Betty: 27.76%
- Cheryl: 26.18%

Si esto fuera un problema del planificador social, ese porcentaje de la riqueza equivaldría a los presos que tendría que asignar a cada uno de los agentes para llegar a la misma solución que el mercado centralizado.

Además hay que recordar que se tenía una función de utilidad CRRA o isoelástica donde $u(w) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$, y en particular el caso donde $\gamma = 1$ y la función se vuelve un logaritmo natural para los agentes. Entonces, el consumo óptimo de cada agente sería:

$$c_{is} = 0.9 \frac{\pi_s}{P_s} \cdot c_{i0} \;\forall\; s \in S$$

Y ahora, ¿qué pasa con el ahorro de cada agente?

$$
\begin{aligned}
S =& 0.9c_{i0}\sum_{s\in S} P_s c_{is} \\
=& \sum_{s\in S} 0.9\pi_s c_{i0} \\
=& 0.9c_{i0}\sum_{s\in S} P_s c_{is} \\
=& 0.9c_{i0}
\end{aligned}
$$

Ahora que ya se tiene el ahorro total, hay que decidir cuánto porcentaje del ahorro se coloca en cada uno de los instrumentos puros.

$$
\begin{aligned}
\%\text{ de ahorro en activo puro}_i =& \frac{P_s c_{is}}{S} \\
=& \frac{0.9\pi_s c_{i0}}{0.9c_{i0}} \\
=& \pi_s
\end{aligned}
$$

Es decir, el porcentaje de la cartera en cada uno de los instrumentos es igual a la probabilidad. Pero esto es cierto porque son utilidades logarítmicas, si no fueran logarítmicas, serían otro número.

Entonces con esto, según la restricción presupuestaria, ya se tendría el ahorro $c_{i0} + S = c_{i0} + 0.9c_{i0} = 1.9c_{i0}$ y entonces tendría que ser $1.9c_{i0} = \text{Riqueza}_i$ y despejando $c_{i0} = \frac{\text{Riqueza}}{1.9}$ y ya con eso se podrían calcular todas las cosas.

Ahora hay que ver qué pasa en esta economía con las dotaciones (consumos):

Dotaciones (consumos)	$e_{i0}(c_{i0})$		$e_{is}(c_{is})$	
Archie	2 (1.842)	2 (1.3815)	2 (1.842)	0 (2.3025)

El problema que tenía Archie era que en el último estado no tenía nada, por lo que en el período 0, 1 y 2 vende un poco de sus dotaciones y con eso se puede permitir comprar para el estado #3.

Luego, para Betty:

Dotaciones (consumos)	$e_{i0}(c_{i0})$		$e_{is}(c_{is})$	
Archie	2 (1.842)	2 (1.842)	2 (1.842)	0 (2.3025)
Betty	1 (1.1105)	1 (0.8329)	1 (1.1105)	2 (1.3881)

Y para Cheryl:

Dotaciones (consumos)	$e_{i0}(c_{i0})$		$e_{is}(c_{is})$	
Archie	2 (1.842)	2 (1.842)	2 (1.842)	0 (2.3025)
Betty	1 (1.1105)	1 (0.8329)	1 (1.1105)	2 (1.3881)
Cheryl	1 (1.047)	0 (0.7823)	1 (1.047)	3 (1.3088)

Note que el consumo de todos los agentes de hoy, es igual al consumo en el período 2. ¿Qué tienen en común estos períodos? $\rightarrow$ hay que ver las dotaciones: tienen el mismo nivel de dotaciones.

Ahora hay que ver el tema de las probabilidades neutras al riesgo.

8.6 Probabilidades neutras al riesgo

Las probabilidades neturas al riesgo se define como:

$$\pi_s^* = \frac{P_s}{\sum P_s}$$

donde $\pi_s^* \in [0,1]$ para todos los estados de la naturaleza y la suma de todas las probabilidades $\sum_{s \in S} \pi_s^* = 1$.

Entonces ahora observe que:

	s_1	s_1	s_1	$\sum s$
π_s	0.25	0.45	0.25	1
P_s	0.30	0.45	0.18	0.93

Hay que recordar que la suma de precios era el precio del bono libre de riesgo, la cual es una interpretación con utilidad. Luego, las probabilidades neutras al riesgo en esta economía:

	s_1	s_1	s_1	$\sum s$
π_s	0.25	0.45	0.25	1
P_s	0.30	0.45	0.18	0.93
π_s^*	0.3225	0.4838	0.1936	1.00

¿Qué relación entre las dos probabilidades? $\rightarrow$ tanto para s_1, s_3, hay más peso en las probabilidades reales. Aquí el estado 2 es el bueno y el 1 es malo. **Las probabilidades neutras al riesgo son más pesimistas que las probabilidades reales.**

Ahora, hay un teorema de economía financiera avanzada

Teorema 8.2 — *Equivalent Martingale Measure* o Medida Martíngala equivalente. El valor del instrumento complejo se puede valorar como

$$\begin{aligned} V_j &= \frac{E[CF_j]}{1+E[r_j]} \\ &= \frac{E^*[CF_j]}{1+r_f} \end{aligned}$$

$E^*[CF_f]$ se refiere a que es la esperanza usando las probabilidades neutras al riesgo.

Lo que dice el teorema es que: hay dos agentes: uno es averso al riesgo y realista y el otro es neutro al riesgo y pesimista. Entonces ambos van a valorar el instrumento igual.

En la realidad es complicado encontrar el rendimiento esperado $E[r_f]$. Es más fácil calcular las probabilidades neutras al riesgo en términos de la tasa libre de riesgo y con eso encontrarlas.

Entonces ahora dos ejemplos:

Ejemplo 8.4 — Finca Arroyo. La finca Arroyo era la finca de Archie, y se va a calcular su valor usando las probabilidades neutras al riesgo.

$$\begin{aligned} V_a &= \frac{2 \cdot 0.3225 + 2 \cdot 0.4838 + 0 \cdot 0.1936}{1.07526} \\ &= 1.50 \end{aligned}$$

O sea que da exactamente el mismo valor que trayéndolo a valor presenta con las tasas de descuento normales.

Ahora suponga que se tiene otro instrumento completo que da los siguientes flujos de caja $c_{js} = [-1, 20, 12$. No se sabe de dónde salió el instrumento pero sí se sabe que esos son sus flujos de caja.

Entonces V_j se encontrará usando las probabilidades neutras al riesgo y trayendo a valor presente con la tasa libre de riesgo.

$$\begin{aligned} V_j =& \frac{-1 \cdot 0.3225 + 20 \cdot 0.4838 + 12 \cdot 0.1936}{1.075626} \\ =& 10.86 \end{aligned}$$

Esto es un derivado financiero porque hay 3 estados de la naturaleza (las 3 fincas) y todo lo demás (el mercado, el bono libre de riesgo) son instrumentos complejos que no son necesarios para calcular los instrumentos puros. Los instrumentos que no son necesarios para calcular los precios de los instrumentos puros se llaman **derivados financieros**. ■

Ahora lo que sigue es pasar de tema ya a calcular el equilibrio con una distribución más general de rendimientos. Lo que va a interesar ver es calcular $r_f, r_m - r_f$.

9. Cálculo de Equilibrio de Mercado

Anteriormente se tenía la situación siguiente:

$$u_i = u_i(c_{i0}) + e^{-\delta} u(c_{i1})$$

Y se tenía que las funciones de utilidad estaban dadas por las funciones isoelásticas, potenciales o CRRA:

$$u(c_{it}) = \frac{c_{it}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

Y se había encontrado que los precios de los instrumentos puros estaban dados por:

$$P_s = e^{-\delta} \pi_s \left(\frac{E_s}{E_0} \right)^{-\gamma}$$

Y los instrumentos complejos se valoran de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V_j &= \sum_{s \in S} CF_{js} \cdot P_s \\ &= \int_{s \in S} CF_{js} \cdot P_s \, ds \end{aligned}$$

Lo primero es si se tuviera una cantidad discreta de estados de la naturaleza, pero si se tuviera un continuo de precios puros sería el equivalente integrando.

Entonces lo que se va a ver es cómo se calcula una economía en este momento.

Entonces suponga que $\frac{E_s}{E_0}$ es lognormal, lo cual significa que el logaritmo natural de eso tiene una distribución normal $\ln \left[\frac{E_s}{E_0} \right] \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Luego

$$\ln \left[\frac{E_s}{E_0} \right] = \mu + \sigma s$$

donde $s \sim N(0,1)$. Aquí s se va a interpretar como los estados de la naturaleza. Cuando $s \to -\infty$ la dotación se hace 0. Las dotaciones de la lognormal pueden estar entre 0 y hasta infinito positivo.

Otra forma de decir esto es que la dotación del estado de la naturaleza s es $E_s = E_0 \cdot \exp\{\mu + \sigma s\}$. Además, la esperanza de una lognormal era tal que

$$E\left[\frac{E_s}{E_0}\right] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Ahora, si fuera $\left[\frac{E_s}{E_0}\right]^a$ más bien sería

$$\ln\left[\frac{E_s}{E_0}\right]^a = a\ln\left[\frac{E_s}{E_0}\right] \sim N(a\mu, a^2\sigma^2)$$

Y su esperanza sería:

$$E\left[\frac{E_s}{E_0}\right] = \exp\left\{a\mu +^2 \sigma^2 2\right\}$$

De momento esto es lo que interesa tener presente. Hay que estudiar esta economía. Se sabe que los precios son $P_s = e^{-\delta}\pi_s\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{-\gamma}$. Ahora, si $\frac{E_s}{E_0}$ es lognormal entonces los precios también serían lognormales.

Hay que calcular el activo sin riesgo. El activo sin riesgo daba un flujo de caja de uno para todos los estados de la naturaleza $CF_{js} = 1 \; \forall s \in S$:

$$\begin{aligned} V_f &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot P_s \, ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta}\pi_s \left[\frac{E_s}{E_0}\right]^{-\gamma} ds \\ &= e^{-\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \pi_s \left[\frac{E_s}{E_0}\right]^{-\gamma} ds \\ &= e^{-\delta} E\left[\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{-\gamma}\right] \end{aligned}$$

$$= \exp\left\{-\delta - \gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\right\}$$

Este sería el valor del bono cupón cero.

Ahora hay que recordar el rendimiento esperado:

$$1 + r_f = R_f = \exp \hat{r}_f$$

Lo interesante era lo siguiente:

$$\begin{aligned} V_f &= \frac{E[CF_j]}{1 + r_f} \\ &= \frac{1}{R_f} \\ &= \exp\{-\hat{r}_f\} \end{aligned}$$

Entonces ya hay dos ecuaciones de los bonos cupones cero y se van a juntar:

$$\exp\{\hat{r}_f\} = \exp\{-\delta - \gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\}$$
$$-\hat{r}_f = -\delta - \gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}$$
$$\hat{r}_f = \delta + \gamma\mu - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}$$

Esta es la ecuación de la tasa libre de riesgo. entonces hay que ver cuáles son los determinantes (subjetivos y objetivos) que determinan la tasa libre de riesgo:

- $\delta =$ impaciencia
- $\gamma =$ aversión al riesgo relativa (RRA)

Y se sabe que:

$$E\left[\frac{E_s}{E_0}\right] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$
$$E[E_s] = E_0 \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Y, ¿qué significa μ? $\rightarrow$ tiene que ver con la dotación esperada. Y hay que recordar que $\ln\left[\frac{E_s}{E_0}\right] = \mu + \sigma s$, por lo que μ **se puede interpretar como el crecimiento fijo de las dotaciones**. Por otro lado, σ sería la varianza del crecimiento. También afecta el crecimiento esperado.

- Si $\uparrow \delta$ entonces $\uparrow r_f$: la gente es más impaciente, ahorran menos y el precio de los instrumentos puros disminuye $\downarrow P_s$ y la suma de los precios es igual se interpreta como el precio del bono cupón cero $\sum P_s \downarrow$ por lo que entonces $V_f \downarrow$ y esto implica que la tasa libre de riesgo aumenta $r_f \uparrow$.
- $\mu \uparrow$ entonces $r_f \uparrow$: la economía tiene alto crecimiento (se tiene una expectativa de que mañana se ganará más) entonces la gente ahorra menos y se repite el proceso anterior.
- $\sigma \uparrow$ entonces $r_f \downarrow$: la economía es más riesgosa, entonces la gente va a querer ahorrar más.

9.1 Tasa libre de riesgo y prima de mercado en equilibrio general

Ahora se va a tratar de ver un modelo de equilibrio más general para ver los determinantes de la tasa libre de riesgo y la prima de riesgo ya con distribuciones lognormales y no con un ejemplo tan sencillo como la vez pasada.

Hay cuatro ecuaciones importantes: tasa libre de riesgo, prima de riesgo, una medida de rendimientos de un activo complejo y una medida de precio-beneficio que es una medida muy utilizado en los mercados financieros.

9.1.1 Equilibrio general: $\hat{r}_f$ y $\hat{r}_m$

Anteriormente se tenía una situación donde había una utilidad para cada agente en dos períodos:

$$u_i = u_i(c_{i0}) + e^{-\delta} u_i(c_{i1})$$

Y la utilidad por período $u(c_{it})$ estaba definida como

$$u(c_{it}) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}$$

Los precios de equilibrio eran

$$P_s = \pi_s e^{-\delta} \left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{-\gamma}$$

Y para valorar un instrumento complejo en este mundo que tiene un flujo de caja CF_{js} se considera:

$$V_j = \int_{s \in S} CF_{js} \cdot P_s \, ds$$

y para esto se supone una distribución lognormal de las dotaciones. Además, $\frac{E_s}{E_0}$ es lognormal si

$$\ln \frac{E_s}{E_0} = \mu + \sigma s$$

donde $s \sim N(0,1)$. Y si se despeja $E_s = E_0 \exp\{\mu + \sigma s\}$. Se escoge una distribución normal porque: 1) son muy fáciles de manipular y 2) tienen propiedades como que siempre dan resultados positivos.

9.1.1.1 Características de lognormalidad

Si en efecto

$$\ln \frac{E_s}{E_0} = \mu + \sigma s$$

y $s \sim N(0,1)$ entonces, ¿cuál sería el valor esperado?

$$E\left[\frac{E_s}{E_0}\right] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Y cuando esta expresión se eleva a una potencia $\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^a$ simplemente se puede aplicar logaritmo:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^a &= a \ln \frac{E_s}{E_0} \\
&= a\mu + a\sigma s
\end{aligned}$$

Y además, el valor esperado sería:

$$E\left[\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^a\right] = \exp\left\{a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right\}$$

Entonces este resultado o regla se usará una y otra vez en adelante.

Hay que empezar igual que la vez pasada, empezando por el activo sin riesgo. Este activo tiene la característica de que tiene un flujo de caja igual a uno para todos los estados de la naturaleza $CF_{js} = 1 \; \forall \; s \in S$. Y el precio del bono libre de riesgo sería

$$V_F = \int_{s \in S} 1 \cdot P_s \, ds$$

Y en el caso específico sería:

$$
\begin{aligned}
V_F &= \int_{s\in S} 1 \cdot P_s \, ds \\
&= \int_{s\in S} e^{-\delta} \pi_s \left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{-\gamma} ds \\
&= e^{-\delta} \int_{s\in S} \pi_s \left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{-\gamma} ds \\
&= e^{-\delta} E\left[\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{-\gamma}\right] \\
&= e^{-\delta} \exp\left\{a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right\} \\
&= \exp\left\{-\delta - \gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

En el caso del activo sin riesgo el flujo de caja esperado es igual a uno $E[CF_j] = 1$. Entonces ahora la situación es esta: cualquier instrumento tiene el siguiente valor:

$$
\begin{aligned}
V_j &= \frac{E[CF_j]}{1 + E[\tilde{r}_j]} \\
&= \frac{E[CF_j]}{E[R_j]}
\end{aligned}
$$

Esta última expresión está en términos del rendimiento bruto. También se podría usar la siguiente expresión:

$$
V_j = E[CF_j] e^{-\hat{r}_j}
$$

que está ya en términos del rendimiento continuamente compuesto. Se va a trabajar con este rendimiento porque da resultados más sencillos de interpretar. Entonces sabiendo que

$$
V_F = \exp\left\{-\delta - \gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\right\}
$$

se puede ver que

$$
\begin{aligned}
V_F &= \exp\left\{-\delta - \gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}\right\} \\
&= 1 \cdot \exp\{-\hat{r}_f\}
\end{aligned}
$$

el techito representa que es el instrumento libremente compuesto.

Se puede tomar el logaritmo de ambos lados:

$$
\hat{r}_f = \delta + \gamma\mu - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}
$$

esta expresión es demasiado importante y dice cuáles son los determinantes de la tasa libre de riesgo.

La impaciencia está resumida por δ: a mayor δ hay mayor tasa libre de riesgo. Las personas impacientes ahorran menos y consumen más hoy, ahorran menos y el gobierno tiene que ofrecer una tasa de interés muy alta para que inviertan porque tienen una preferencia muy alta por consumir en el presente.

Si los agentes en esta economía fueran neutros al riesgo $\gamma = 0$, por lo que δ se puede pensar como la tasa libre de riesgo cuando $\gamma = 0$ y la gente es neutra al riesgo. Como en el ejemplo que se hizo, δ era cercano a 10% mientras que la tasa libre de riesgo era un poco más baja: los agentes eran aversos al riesgo y querían ahorrar un poco más: ahí no era un tema de impaciencia sino un tema de aversión al riesgo.

Ahora hay que ver más características de la tasa libre de riesgo.

9.1.2 Tasa libre de riesgo

Se había dicho que la tasa libre de riesgo era

$$r_f = \delta + \gamma\mu - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}$$

- $\uparrow \delta \Rightarrow \uparrow r_f$
- $\uparrow \mu$: se puede ver que $\frac{\partial r_f}{\partial \mu} = \gamma > 0$. Significa que en esta economía hay más crecimiento, y mayor es la tasa de interés. Suponga que Costa Rica va a crecer más, esto lo desincentiva a ahorrar porque se sabe que se va a tener más ingreso en el futuro, y el gobierno y las empresas tienen que ofrecer mayores tasas de interés para incentivar a ahorrar. Entonces este crecimiento hace que se quiera ahorrar menos con lo cual $\downarrow P_s$ y en consecuencia también baja la suma de los precios que es igual al valor del bono cupón cero $\downarrow \sum P_s = V_f \downarrow$ y como hay una relación inversa entre el precio del bono cupón cero y el rendimiento esperado por lo que el rendimiento del bono cupón cero sube $\uparrow r_f$
- $\sigma \uparrow$: se puede ver que $\frac{\partial r_f}{\partial \sigma} = -\gamma^2\sigma$. Este fenómeno es más fuerte conforme la aversión al riesgo sea más alta: si la gente es más aversa al riesgo la gente ahorra más (**la aversión al riesgo genera más ahorro!**) por lo que este efecto se ve potenciado para la gente que es aversa al riesgo. Pero con la volatilidad hay una baja en la tasa libre de riesgo. También se puede ver que $\frac{\partial^2 r_f}{\partial\sigma\partial\gamma} = -2\gamma < 0$. Sigma tiene varios niveles: si sigma aumenta esto significa que hay un mayor crecimiento esperado $\uparrow E\left[\frac{E_s}{E_0}\right] = \exp\left\{\mu + \frac{\uparrow\sigma^2}{2}\right\}$, pero lo más importante es que la dispersión de las dotaciones se vuelve más riesgosa, y ante más riesgo, la gente querría ahorrar más porque ha aumentado el riesgo (el crecimiento que hay es más inseguro) entonces la gente querría ahorrar más. Al aumentar el ahorro aumenta el precio de los instrumentos puros y la suma también aumenta y el bono cupón tiene ahora un mayor precio y en consecuencia, dada la relación inversa entre precio y rendimiento, el bono cupón cero tiene ahora un rendimiento menor.
- γ: se puede ver que $\frac{\partial r_f}{\partial \gamma} = \mu - \gamma\sigma^2$, lo cual es ambiguo en cuanto al signo, sin embargo, empíricamente se encuentra que $\mu - \gamma\sigma^2 < 0$ si $\gamma > \frac{\mu}{\sigma^2}$, lo cual generalmente sí es así. Entonces conforme la gente se vuelve más aversa al riesgo aumenta el ahorro y sube el precio de los instrumentos puros, la suma de los precios sube, el precio del bono cupón cero sube y baja el rendimiento del bono cupón cero.

Hay dos tipos de variables:

- Variables de preferencias: δ, γ son características de las personas
- Variables de la economía: μ, σ ¿en períodos de 20 años qué cambia más? ¿Las características de la economía o las preferencias de las personas? $\rightarrow$ en general se asumirá δ, γ van a ser más o menos fijos pero μ, σ sí pueden cambiar por país por ejemplo.

Estos serían los determinantes de la tasa libre de riesgo, y esta tasa libre de riesgo sería real. Para ver la tasa libre de riesgo faltaría ver la inflación esperada: si aumenta la inflación esperada también aumentaría r_f y al ser libre de riesgo, se supone que no hay probabilidad de impago (de parte del emisor).

Viendo los datos para varios países, se observa que hay tasas libre de riesgo que pueden ser negativos: según la ecuación encontrada en este modelo se viste esa posibilidad sí se admite. Además, las tasas reportadas son nominales, por lo que habría que restarlas la inflación esperada.

La teoría dice que hay una relación positiva entre crecimiento y la tasa real de interés. Siguiendo el gráfico mostrado se puede ver que esto sí se cumple. La última columna es la volatilidad futura de los mercados. El país con más incertidumbre es Japón, luego Alemania y luego el resto. La teoría dice que hay una relación inversa entre volatilidad y la tasa libre de riesgo lo cual sí se cumple viendo el gráfico.

Entonces esta tasa libre de riesgo sí funciona en la vida real, empíricamente sí se puede ver que se cumpla.

Ahora hay que seguir con el instrumento de mercado.

9.2 Instrumento de mercado

El instrumento de mercado es igual a la dotación:

$$CF_{js} = E_s$$

El rendimiento de ese instrumento va a ser igual a

$$\begin{aligned} v_m =& \int E_s \cdot P_s \\ =& E_0 \int \frac{E_s}{E_0}\, ds \\ =& e^{-\delta} E_0 \int \left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{1-\gamma} \pi_s\, ds \\ =& e^{-\delta} E_0 E\left[\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{1-\gamma}\right] \\ =& e^{-\delta} E_0 \ \exp\left\{(1-\gamma)\mu + \frac{\sigma^2(1-\gamma)^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

Lo que se quiere sacar es que

$$\begin{aligned} v_m =& E[CF_{jm}]e^{-\hat{r}_m} \\ \underset{\substack{\text{flujo de}\\ \text{caja esperado}}}{E[CF_{jm}]} =& E[E_s] \\ =& E_0 E\left[\frac{E_s}{E_0}\right] \\ =& E_0 \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

Ahora hay que unir las dos ecuaciones. Esta expresión $e^{-\delta} E_0 \ \exp\left\{(1-\gamma)\mu + \frac{\sigma^2(1-\gamma)^2}{2}\right\}$ se halló con mercados completos

$$\begin{aligned}
\cancel{E_0}\exp\left\{-\delta+(1-\gamma)\mu+\frac{\sigma^2(1-\gamma)^2}{2}\right\} =& \cancel{E_0}\exp\left\{\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right\}\\
\ln\exp\left\{-\delta+(1-\gamma)\mu+\frac{\sigma^2(1-\gamma)^2}{2}\right\} =& \ln e^{-\hat{r}_m}\exp\left\{\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right\}\\
-\delta+(1-\gamma)\mu+\frac{\sigma^2(1-\gamma)^2}{2} =& e^{-\hat{r}_m}\mu+\frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

Y despejando para $e^{-\hat{r}_m}$:

$$-\hat{r}_m = \delta+\gamma\mu-\frac{\gamma^2\sigma^2}{2}+\gamma\sigma^2$$

Que es la tasa libre de riesgo, por lo que entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_m =& r_f+\gamma\sigma^2\\
MRP =& \hat{r}_m - r_f\\
=& \gamma\sigma^2
\end{aligned}$$

Entonces la prima de riesgo depende de dos elementos:

- σ: riesgo objetivo $\rightarrow$ si aumenta el riesgo objetivo aumenta la prima de riesgo
- γ: riesgo subjetivo (aversión al riesgo) $\rightarrow$ si aumenta la aversión al riesgo también aumenta la prima de riesgo

Con la pandemia tuvo que aumentar la volatilidad y la aversión al riesgo, con lo cual tuvo que haber aumentado la prima de riesgo.

9.3 Relación *price earnings* P/ε

Suponga que tiene una empresa con un beneficio por acción (*earnings per share* EPS)de \$2. Esta empresa tiene un precio de \$40. Hay una relación que se usa en finanzas que es el *ratio price earnings* se que se calcularía:

$$\begin{aligned}
P/\varepsilon =& \frac{\$40}{\$2}\\
=& 20
\end{aligned}$$

Suponga que eso era Amazon, ahora piense, por ejemplo en Microsoft:

$$\begin{aligned}
P/\varepsilon =& \frac{\$15}{\$3}\\
=& 5
\end{aligned}$$

Observe que entonces varias empresas tienen distintas razones beneficios, y lo que se quiere saber es a qué responde esto. El *paper* analiza esto en n períodos y arroja un resultado útil que es la razón inversa:

$$\frac{E}{P} = \frac{\delta}{\gamma}+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)r_{ft}+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\sigma_t^2$$

Aquí se encuentra que $\gamma \approx 1.3$ y $\delta = 3.82\%$. Esto se calcula así porque generalmente se piensa que son las variables que menos cambian. Ahora hay que ver los efectos sobre el *price earnings*:

- Sube la tasa libre de riesgo $\uparrow r_{tf}$: el *earnings price* aumenta $\uparrow \frac{\varepsilon}{P}$ y en consecuencia el *price earnings* disminuye $\frac{P}{\varepsilon} \downarrow$
- Sube la volatilidad $\uparrow \sigma$: el *earnings price* aumenta $\uparrow \frac{\varepsilon}{P}$ y en consecuencia el *price earnings* disminuye $\frac{P}{\varepsilon} \downarrow$

Son dos factores para poder entender el mercado accionario. La tarea es usar esto para ver si el mercado está sobrevaluado o subvaluado. La derivación es un poco complicada de hacer, pero lo importante es saber usarla (como en la tarea) para poder entender el mercado accionario.

Ejercicio 9.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *En el modelo de mercados completos, ¿de qué depende la prima de mercado?* $\rightarrow$ Esta prima mide la diferencia entre el rendimiento esperado de un activo financiero y la tasa libre de riesgo. Sería la diferencia que hay que otorgarle al individuo un mayor rendimiento sobre lo que ofrece el activo libre de riesgo dado que este otro sí tendría riesgo.
   ¿Pero cuáles serían los determinantes de esta prima de mercado? $\rightarrow$ Depende de:
   a. De la variabilidad de los mercados
   b. σ
   c. γ
2. *¿El mercado en Estados Unidos está sobrevaluado o subvaluado?* $\rightarrow$ Sobrevalorado.
   ¿Invertiría entonces en el mercado de Estados Unidos? $\rightarrow$ Ahorita no.

■

10. Separabilidad en carteras

Ahora se va a ver algunas aplicaciones para mercados completos.

Bajo la separación de carteras, los inversionistas eligen entre solo unos pocos portafolios básicos de instrumentos de mercado. Por lo tanto, la importancia de tener un mercado completo se reduce considerablemente.

Recuerde que cuando los mercados de capital son incompletos, los individuos tienen limitaciones en sus opciones de patrones de pagos contingentes al estado, limitándose a aquellos patrones de pagos que pueden construirse como combinaciones lineales de los instrumentos de mercado existentes.

Sin embargo, con la separación de portafolios, los inversionistas a menudo descubrirán que las oportunidades de pago inviables no habrían sido elegidas incluso si estuvieran disponibles. **Por lo tanto, bajo la separación de portafolios, las decisiones de portafolio de los inversionistas a menudo no se verán afectadas por si el mercado de capital es completo o no**.

Se ha demostrado que la separación de portafolios depende de la forma de la función de utilidad de los individuos y de la forma de las distribuciones de rendimiento de los instrumentos.

En el caso especial donde las funciones de utilidad de los inversionistas respecto a la riqueza son cuadráticas, o los rendimientos de los instrumentos están distribuidos conjuntamente de forma normal, se obtiene la separación de carteras. Con la adición de expectativas homogéneas, la separación de portafolios proporciona condiciones suficientes para una ecuación de fijación de precios de los instrumentos.

Esta relación de fijación de precios de los instrumentos de seguridad puede expresarse en términos de medias y varianzas y se llama modelo de fijación de precios de activos financieros. La forma resultante de la ecuación de fijación de precios de los instrumentos de seguridad es particularmente conveniente para formular proposiciones comprobables y realizar estudios empíricos.

Muchas de las implicaciones de la separación de portafolios en los mercados de capital parecen ser consistentes con el comportamiento observado y han sido respaldadas por pruebas empíricas.

Pero antes de eso se va a ver el tema de los fondos de inversión. Es gente que trabaja invirtiendo en instrumentos financieros como bonos o acciones. En Costa Rica la mayoría de los fondos de inversión invierten en bonos, y la mayoría de los fondos son de fondos de pensiones.

En inglés se llama *Mutual Fund Separability* y se refiere a que se puede separar por fondos de inversión.

Sea $I = $ #de hogares (por ejemplo 1 500 millones de hogares). Luego, hay $K = $ #estados naturaleza y $J = $ #activos complejos. Entonces el problema a resolver es demasiado complicado.

En finanzas no se puede hacer lo del agente representativo. Entonces hay que buscar simplificar el problema. Hay una serie de teoremas sobre separabilidad en fondos (o carteras).

Los teoremas de separabilidad dicen bajo qué condiciones las personas se van a invertir en otros fondos de inversión. Nos interesa en un mundo donde todas las personas invierten en uno o dos fondos de inversión. Bajo qué condiciones las personas invierten en un mismo o dos fondos de inversión.

Se van a ver modelos donde una porción del dinero va a estar en un fundo de inversión y otra en instrumentos libres de riesgo $\rightarrow$ esto es *money separation*.

1. Un fondo de inversión invierte en instrumentos complejos. Entonces se tiene un fondo de inversión que tiene unos pesos $\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_j \end{bmatrix}$ tal que la suma de los pesos sume $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Esto es el peso de cada acción en que han invertido (por ejemplo las primeras 10 acciones en que ha invertido el fondo representan un 47% del total de los activos en que ha invertido el fondo).
2. El problema se simplifica si # fondos $= M < K$ y menor que J también. Entonces la gente solo invierte en un número determinado (relativamente pequeño de fondos)
3. A nivel teórico es importante que: se puede encontrar equilibrio aún en mercados incompletos. A menudo va a suceder que $J < K$ o sea que el número de instrumentos complejos (acciones) es menor que el número de estados de la naturaleza, y si hay separabilidad en carteras igual se puede encontrar un equilibrio.

10.1 Ejemplo de separabilidad

Se tiene a Ana, Betty y Carlos. En este caso ellos tenían un ahorro $A_i = \sum_{s\in S} p_s \cdot c_{is}$ que era lo que compraban en instrumentos para el período 1 en los distintos estados de la naturaleza.

Las condiciones de primer orden cuando $\gamma = 1$ eran:

$$\frac{\partial}{\partial c_{i0}} = \frac{0.9\pi_s}{p_s \cdot c_{is}} \Leftrightarrow p_s \cdot c_{is} = 0.9\pi_s \cdot c_{i0}$$

Y por lo tanto el ahorro para cada uno de ellos era:

$$\begin{aligned} A_i =& \sum_{s\in S} p_s \cdot c_{is} \\ =& 0.9 c_{i0} \sum_{s\in S} \pi_s \\ =& 0.9 c_{i0} \end{aligned}$$

Es decir, ellos ahorraban el 90% de su consumo del período 0. Lo que interesa es saber cómo son las carteras de ellos. O sea, el peso que cada uno de ellos le asigna al instrumento es:

$$\begin{aligned} w_{is} =& \frac{p_s \cdot c_{is}}{A_i} \\ =& \frac{0.9\pi_s c_{i0}}{0.9 c_{i0}} \\ =& \pi_s \end{aligned}$$

Las carteras en que invierten ellos: **observe que se pierde el subíndice de cada agente, por lo que sólo va a importar las probabilidades de que ocurra cada estado de la naturaleza**.

Entonces la cartera en que compran Ana, Betty y Carlos es tal que invierten 1/4 del ahorro en el estado de la naturaleza 1, 1/2 en el estado de la naturaleza 2 y 1/4 del ahorro en el estado de la naturaleza 3:

$$w = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} \;\forall\, i$$

Estos pesos son independientes de la persona. Por lo que si hubiera un fondo de inversión Miguel Cantillo 2020 que invierte 1/4 en el instrumento 1, 1/2 en el instrumento 2 y un 1/4 en el instrumento 3, ese fondo sería atractivo para Ana, Betty y Carlos.

Si el fondo tuviera pesos diferentes de inversión en los respectivos instrumentos, no sería atractivo para Ana, Betty y Carlos porque ya no coincidiría con las probabilidades de cada estado de la naturaleza.

Entonces en este ejemplo, hay $M = 1$ un fondo. Indistintamente de la cantidad de instrumentos y estados de la naturaleza, la gente invierte en el mismo tipo de fondo porque todos tienen la misma utilidad (**no es un agente representativo pero por haber dicho que tenían la misma utilidad se asemeja la idea**). Como cada uno tiene distintos ahorros sí resulta que cada uno termina comprando menos de cada instrumento pero sí en la misma proporción los 3 (1/2,1/4,1/2).

Entonces, al haber separabilidad en carteras, aunque no hubiera 3 instrumentos (y en consecuencia hubiera más estados de la naturaleza que instrumentos) aún así se podría encontrar el equilibrio.

10.2 Problema general

Este problema general tiene dos partes: primero los supuestos y luego las condiciones de primer orden.

10.2.1 Supuestos

Los supuestos son los siguientes:

1. Hay K estados de la naturaleza $s \in S$
2. Hay J instrumentos y cada instrumento da un rendimiento bruto $R_{js} \equiv \frac{CF_{js}}{V_j}$
3. Hay I agentes con una utilidad u_i tal que $u_i' > 0, u_i'' < 0$ (agentes tienen que ser aversos al riesgo). Se va a definir el ahorro para cada uno $A_{i0} \equiv 1 \rightarrow$ **se puede asegurar que no hay pérdida de generalidad por los grados de libertad**.
4. Puede existir activo sin riesgo $R_{0s} = R_f \;\forall\, s \in S$. Entonces se va a considerar un caso con y sin activo sin riesgo (hay que hacer dos maximizaciones)
5. w_{ij} es el porcentaje del ahorro del agente i en el activo j. Esto son las carteras. **¿Es posible que un peso sea negativo $w_{ij} < 0$? $\rightarrow$ sí porque se puede hacer *short sell*, y el caso contrario es que también se puede invertir más de la riqueza $w_{ij} > 1$, pero lo que sí tiene que cumplirse es que todos los activos sumen 1 $\sum_{j=1}^{J} w_{ij} = 1$. Un caso especial es cuando hay activo sin riesgo: $\sum_{j=0}^{J} w_{ij} = 1$.**

10.2.2 El problema

Hay que ver dos casos: sin R_f y con R_f.

10.2.2.1 Sin activo libre de riesgo

- La cartera tiene que ser $\sum_{j=1}^{J} w_{ij} = 1$.
- El consumo en el estado de la naturaleza (por ejemplo la sequía) tenía que ser $c_{is} = \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \cdot \underset{\text{ahorro}}{1} \cdot R_{js}$.

- El lagrangiano sería:

$$\mathscr{L}_i = \sum_{s \in S} \pi_s u_i \left[\overbrace{\sum_{j=1}^{J} w_{ij} R_{js}}^{c_{is}} \right] + \lambda_i \left[1 - \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \right]$$

la restricción es que los pesos tienen que sumar 1. En este caso el multiplicador de lagrange λ_i se refiere a **qué pasaría si los pesos sumaran más de 1, y como esto no tiene sentido, este multiplicador no tiene interpretación económica**.

10.2.2.2 Con activo libre de riesgo

- La cartera tiene que ser igual pero ahora hay un peso adicional, el del activo sin riesgo: $w_{i0} + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} = 1$.

$$\begin{aligned} w_{i0} + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} &= 1 \\ w_{i0} &= 1 - \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \end{aligned}$$

- El consumo en el estado de la naturaleza tenía que ser $c_{is} = w_{i0} \cdot R_f + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \cdot R_{js}$, lo cual se puede simplificar $c_{is} = R_f + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} [R_{js} - R_f]$. Esto se puede interpretar como rendimiento en exceso: $c_{is} = R_f + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \cdot z_{js}$ donde $z_{js} = R_{js} - R_f$ es el rendimiento en exceso.
- El lagrangiano sería:

$$\mathscr{L}_i = \sum_{s \in S} \pi_s u_i \left[R_f + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \cdot z_{js} \right]$$

aquí no hay lagrangiano porque ya está implícito en el problema.

	Sin R_f	Con R_f
Cartera	$\sum_{j=1}^{J} w_{ij} = 1$	$w_{i0} + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} = 1$ $w_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{J} w_{ij}$
Consumo en estado s	$c_{is} = \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \cdot R_{js}$	$c_{is} = w_{i0} \cdot R_f + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \cdot R_{js}$ $c_{is} = R_f + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} [R_{js} - R_f]$
Lagrangiano	$\mathscr{L}_i = \sum_{s \in S} \pi_s u_i \left[\sum_{j=1}^{J} w_{ij} R_{js} \right] + \lambda_i \left[1 - \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \right]$	$\mathscr{L}_i = \sum_{s \in S} \pi_s u_i \left[R_f + \sum_{j=1}^{J} w_{ij} \cdot z_{js} \right]$

La intuición es la siguiente: piense en una producción que emplea 3 factores de la producción: mano de obra, tierra y capital. Sus costos, respectivamente, son: w_l, w_t, w_k (asuma que son iguales). La condición de optimalidad en producción implica que el producto marginal debe ser igual al costo, y si tienen el mismo costo, los productos marginales tienen que ser iguales.

El impacto que tiene el factor de la producción sobre la utilidad marginal $\rightarrow$ eso es lo que hay que pensar.

10.2.3 Condiciones de primer orden

Y las condiciones de primer orden del problema serían:

	Sin R_f	Con R_f
Condiciones de primer orden	$\frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial w_{ij}} = \sum_{s \in S} \pi_s u' u_i [c_{is}] \cdot R_{js} - \lambda_i = 0$ $E\left[u_i'(\cdot) \cdot R_j\right] = \lambda_i$	$\frac{\partial \mathscr{L}_i}{\partial w_{ij}} = \sum_{s \in S} \pi_s u' u_i [c_{is}] \cdot z_{js} = 0$ $E\left[u_i'(\cdot) \cdot R_j\right] = \lambda_i$

Ahora, piense en una función de producción que depende de varios insumos $f(z_1, \ldots, z_n)$: la condición de optimalidad es que la productividad marginal sea igual entre ellos. Eso es lo que dice que la condición de primer orden obtenida anteriormente: la productividad marginal del activo tiene que ser igual para todos los activos.

Cuando hay un instrumento libre de riesgo es exactamente lo mismo: la productividad marginal es igual a 0 porque se le está introduciendo un costo ahí. La razón de la diferencia con el instrumento libre de riesgo es que se está introduciendo el costo: R_f. Entonces sale el rendimiento en exceso que ya tiene ese costo incorporado.

Teorema 10.1 Si hay solución al problema, es única $\rightarrow$ Inger Soll.

10.3 Condiciones suficientes para separabilidad

Solo hay que demostrar una de las condiciones y con eso ya se cumple que hay separabilidad de carteras. Vamos a ver las condiciones para las distintas separabilidades:

1. $M = 1$: todo el mundo invierte en el mismo fondo de inversión (solo hay un fondo de inversión)
    - $I = 1$ solo hay un agente. u_{ij}, R_{js} arbitrarios. Si solo hay un agente representativo, la cartera que él tenga va a ser la cartera.
    - Todas las utilidades de los agentes se pueden escribir como $u_i = a_i + b_i \cdot U$ y esto implica que la utilidad marginal sería $u_i' = b_i \cdot U'$ $\rightarrow$ se están haciendo transformaciones lineales positivas. Entonces esto significa que es como si fuera un agente representativo (más o menos) porque todos tienen la misma utilidad (como en el caso de Ana, Betty y Carlos).

    Proposición 10.1 — Demostración. Imagine que existe que w_j^* (independiente del subíndice i) tal que $E[u'(\cdot)R_j] = \lambda$.
    Entonces la utilidad marginal de un agente sería

    $$E[u'(\cdot)R_j] = E[b_i u_i'(\cdot)R_j] = b_i \lambda = \lambda_i$$

    Entonces lo que se acaba de demostrar es que si se tuviera esos pesos que daban una productividad marginal constante para todos los instrumentos para una utilidad que no tenía suscrito i, para la utilidad de cada uno de los agentes también va a ser un número constante.

En el caso más sencillo imagine con R_f:

$$
\begin{aligned}
E[u'(\cdot)z_j] &= 0 \\
E[u'(\cdot)z_j] &= b_i \overset{0}{E[u'(\cdot)z_j]} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Entonces lo que se demostró es que si estos pesos w_j^* eran óptimos para esa u sin suscrito, también tiene que ser óptimo para cada uno de los agentes específicos.

- R_{js} es i.i.d (idéntica e independientemente distribuida) lo cual significa que se puede escribir R_{js} como $R_{js} = \mu + \varepsilon_{js}$ conde ε_{js} es i.i.d y $E[\varepsilon_{js}] = 0$. Además tiene que ser que $u_i'' < 0$ (agentes son aversos al riesgo).
  La cartera en que van a invertir todos va a ser $w_j^* = \frac{1}{J}$. Esto es cierto porque si $w_j \neq \frac{1}{J}$, observe que la cartera $w_j^* = \frac{1}{J}$ tiene media μ (si todos los activos tienen la misma distribución), mientras que cuando es diferente $w_j \neq \frac{1}{J}$ tiene como media también μ, pero cuando se le da el mismo peso a todos los activos w_j es un aumento en riesgo a w_j^*. Esto se puede escribir como que $r_j = r_j^* + u_j$ donde $E[u_j] = 0$ y la gente siempre escogería la cartera que no sea aumento en riesgo.
- R_{js} se puede escribir $R_{js} = y_s + \varepsilon_{js}$ donde $E[\varepsilon_j | y_s] = 0$ y lo que se pide es que las utilidades sean aversas al riesgo $u_i'' < 0$.

  Entonces se agarra una cartera óptima que tiene estas características w_j^* donde $\sum_{j=1}^{J} w_j^* \varepsilon_{js} = 0 \; \forall \; s \in S$.

  Esta cartera tiene un riesgo residual ε_{js} que se está eliminando en cada uno de los estados de la naturaleza. Para cualquier $w_j \neq w_j^*$ es un aumento en riesgo.
  En una cartera óptima se elimina el riesgo idiosincrático ε_{js}. Se puede pensar que esta cartera tiene dos tipos de riesgo:
  - y_s es el riesgo de mercado, que le pasa a toda la economía
  - ε_{js} riesgo específico a esa empresa

  La cartera óptima que se crea elimina completamente el riesgo idiosincrático.

Ahora falta ver las condiciones para separación en dos carteras $M = 2$:

a. Solo hay dos agentes en la economía $I = 2$ con u_i, R_{js} arbitrarios.
b. R_{js} arbitrario pero u_i es cuadrático. Esto no se va a demostrar, pero cuando las utilidades eran cuadráticas hay preferencias de media y varianza.
c. R_{js} arbitrario, existe un activo libre de riesgo y las utilidades de cada agente están dadas por $u_i = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[\frac{a_i}{b}c_i + b_i\right]^{1-\gamma}$ con γ igual para todos los agentes. Esto es distinto a cuando se tenía una sola cartera. No todos los agentes tienen la misma utilidad por el subíndice i, pero sí es cierto que todos los agentes tienen la misma aversión relativa al riesgo.
   Aquí la separación que existe es que se va a invertir

$$
\begin{cases}
w_{i0} & \text{en } R_f \text{ en la cartera \#1} \\
w_{ij} = (1 - w_{i0})\alpha_{ij} & \sum \alpha_{ij} = 1
\end{cases}
$$

La primera cartera va a estar constituida de bonos libre de riesgo. La segunda cartera van a ser acciones en un fondo de inversión y se combinan esas dos carteras

10.3.1 Una condición suficiente

Los rendimientos de cada acción van a estar dadas por:

$$R_{js} = \beta_j \cdot y_s + \varepsilon_{js}$$

y existe R_f.

Esto quiere decir que va a haber división en dos carteras:

1. La primera cartera es bono sin riesgo R_f donde se invierte w_{i0}
2. La segunda cartera donde se invierte $w_{ij} = (1 - w_{i0}) \cdot \alpha_j$ y se cumple que $\sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 1$

Hay una división en acciones y en bonos: esto es igual a todo el mundo, peor lo que cambio es w_{i0} que dependerá de la aversión al riesgo: si es muy averso al riesgo entonces w_{i0} va a ser muy alto, pero si no es tan averso al riesgo va a ser más bajo.

11. Principio de Separación de Fisher

Esto es una aplicación de mercados completos.

11.1 El efecto Fischer

El efecto Fischer en las tasas de interés es

11.2 Historia económica

La primera revolución industrial ocurre en 1750, mediante la producción de textiles principalmente y las empresas se empiezan a hacer más grandes (en términos de gente).

La segunda revolución industrial tiene que ver con el descubrimiento de nuevas tecnologías: el ferrocarril, el telégrafo y el acero. Esta segunda revolución se da entre 1820 y 1850 y estas tecnologías se empiezan a usar más fuertemente. Estados Unidos y Alemania lideraron esta revolución.

Empiezan a surgir empresas importantes (una primera generación) y al final de esta primera generación (1880-1890) tal vez los hijos de los dueños originales de las empresas no siempre tenían el interés de continuir llevando las empresas. Se empiezan a crear las bolsas de valores (principalmente la de Estados Unidos).

Estas empresas empiezan a salir a estas bolsas, y ahora los dueños de las acciones son los dueños de las empresas. Con esto, se empieza a dar una separación entre el control y la propiedad de las empresas. La propiedad tienen los accionistas, pero el control lo tienen los gerentes, que no necesariamente tienen acciones en la empresa.

Irving Fisher fue el primer economista estadounidense mundialmente famoso, y en 1930 escribió un libro *The Theory of Interest* y explicaba los determinantes de las tasas de interés. **En ese libro hizo dos aportes relevantes para el curso: 1) la definición del valor actual y el valor actual neto y 2) plantear que la separación entre el control y propiedad en las empresas no sería un problema en el tanto que los gerentes de las empresas maximizaran el valor actual neto VAN de sus oportunidades**. Ni siquiera es necesario que el gerente conozca las preferencias de los propietarios.

11.3 El valor actual neto

Esto es una idea bastante antiguo. Hay un caso del año 1200 de un soldado que le cambian la periodicidad en que le pagan su pensión. Ahora hay que ver cómo se calcula el valor actual neto.

Se tienen los flujos de caja:

$$FC = -C_0, C_1, \ldots, C_T$$

C_0 suele ser negativo, por ejemplo, cuando se hace un inversión inicial que tiene un costo. Luego, los demás flujos de caja c_t pueden ser positivos o negativos. Ya se ha visto un ejemplo del VAN y flujos de caja: en un bono c_0 es el precio inicial que se paga por un bono y el resto de c_t son los flujos de caja que genera el bono.

Ahora hay que ver dos conceptos importantes del valor actual neto.

11.3.1 Valor actual

La definición de valor actual (*present value (PV)*) es

$$VA \equiv \sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+k)^t}$$

donde $k =$ tasa de corte. En bonos se llama rendimiento del bono y aquí tasa de corte. En Excel existe la fórmula de valor actual o *present value* y es necesario invocar la tasa de corte y los respectivos flujos de caja. En el valor actual no se incluye el flujo de caja 0 C_0, pero en el VAN sí.

$$\begin{aligned} VAN(NPV) = &\sum_{t=1}^{T} \frac{c_t}{(1+k)^t} - C_0 \\ = &VA - c_0 \end{aligned}$$

En Excel se puede invocar VAN o NPV e igualmente requiere la tasa de corte y los flujos de caja pero ahí ya hay que incorporar el flujo de caja 0.

11.4 Ejemplo del principio de separación

Hay que hacer los siguientes supuestos:

1. No hay riesgo. Esto quiere decir que la tasa bruta es igual a la tasa libre de riesgo $R = R_f$
2. La utilidad del agente $u = u(c_0) + e^{-\delta} u(c_1)$ donde $u' > 0$ y $u'' < 0$ (cuando Fisher lo desarrolló no existía la interpretación de aversión al riesgo. Además $\delta > 0$ por lo que el agente es impaciente
3. Hay una dotación inicial e_0
4. Es una economía de producción y no de intercambio: hay un k_0 que es la inversión inicial y el consumo que queda es $c_0 = e_0 - k_0$
5. Hay una función de producción $f(k_0) = c_1$ donde $f' > 0$ y $f'' < 0$
6. Hay un mercado de capitales (mercado financiero). La riqueza tiene que ser igual al consumo : $w_0 = c_0 + \frac{c_1}{R_f}$. Entonces la riqueza tiene que ser igual al valor actual del consumo y R_f es la tasa libre de riesgo en la economía.
7. R_f es la tasa libre de riesgo

Vamos a ver varios tipos de economía y cuáles son las condiciones de primer orden

11.4.1 Maximizaciones

1. Economía de producción: el dueño es el mismo que el gerente (como la primer generación de los dueños de las empresas). En este caso el problema de maximización sería el siguiente

$$\max u(c_0) + e^{-\delta} u(c_1)$$

Y el lagrangiano que resuelte el problema es

$$\mathscr{L}^p = u\left[e_0 - k_0\right] + e^{-\delta}u[f(k_0)]$$

y la decisión de optimización es con respecto a la inversión que se haga, y la condición de primer orden respecto al capital sería:

$$\frac{\partial \mathscr{L}^p}{\partial k_0} = -u'(c_0) + e^{-\delta}u'(c_1)f'(k_0) = 0$$

Y ahora habría que despejar $f'(k_0)$:

$$f'(k_0) = e^{\delta}\left[\frac{u'(c_0)}{u'(c_1)}\right]$$

2. Economía de intercambio: donde el dueño es un capitalista (un inversor nada más). El dueño maximiza la utilidad intertemporal:

$$\max u(c_0) + e^{-\delta}u(c_1)$$
$$\text{tal que}$$
$$\begin{aligned} w_0 &= c_0 + \frac{c_1}{R_f} \\ c_1 &= (w_0 - c_0)R_f \end{aligned}$$

Y el lagrangiano asociado a este problema sería:

$$\frac{\partial \mathscr{L}^i}{\partial c_0} = u'(c_0) + e^{-\delta}u'(c_1) \cdot R_f = 0$$

Y despejando para R_f:

$$R_f = e^{\delta}\left[\frac{u'(c_0)}{u'(c_1)}\right]$$

Observe que esta condición es la misma que la encontrada para una economía con producción, por lo que entonces:

$$\boxed{\mathrm{R}_f = e^{\delta}\left[\frac{u'(c_0)}{u'(c_1)}\right] = f'(k_0)}$$

Esto lo que dice es que el determinante de la tasa de interés (que en este caso es la tasa libre de riesgo) está dada por dos tipos de condiciones:

- Las preferencias de los inversionistas mediante la impaciencia e^{δ} y las utilidades marginales (factor subjetivo)
- La productividad de los factores (factor objetivo)

3. Separación del control y la propiedad: hay un gerente (que no es el dueño) de la empresa que maximiza el valor actual neto (VAN). El valor actual neto de la empresa está dado por:

$$VAN(k_0) = -\underbrace{k_0}_{\substack{\text{inversión} \\ \text{inicial}}} + \underbrace{\frac{f(k_0)}{R_f}}_{\substack{\text{lo que produce en el} \\ \text{siguiente período} \\ \text{traído a valor presente}}}$$

Como es un ambiente libre de riesgo, hay que tomarlo en cuenta para traer a valor presente. Es decir, se trae a valor presente con la tasa libre de riesgo.

Y la condición de primer orden sería:

$$\frac{\partial\, VAN}{\partial k_0} = -1 + \frac{f'(k_0)}{R_f} = 0$$
$$R_f = f'(k_0)$$

Lo cual es justamente la condición de maximización vista anteriormente. Con lo cual entonces, se estaría maximizando la utilidad esperada del dueño y entonces esto justifica que haya separación propiedad y control: mientras el gerente escoja el nivel de capital que maximiza la utilidad esperada de los dueños.

Todo esto de Fisher se hizo antes del desarrollo de las utilidades cardinales, por lo que ahora toca verlo con el caso de que haya incertidumbre.

11.5 Economía con riesgo y mercados completos

Se hacen los siguientes supuestos:

- k_0 es la inversión inicial
- $c_0 = e_0 - k_s$ es el consumo inicial
- $f_s(k_0) = c_{1s}$ y se cumple que $f_s'(k_0) > 0$ y $f_s''(k_0) < 0$

Y al igual que en los casos anteriores, se tienen las siguientes maximizaciones:

1. Economía con producción: el problema de maximización es

$$\max u(c_0) + e^{-\delta} E[u(c_1)]$$
$$\text{tal que}$$
$$c_0 = e_0 - k_0$$
$$c_{1s} = f_s(k_0)$$

Y el lagrangiano de este problema sería:

$$\mathcal{L}^p = u[e_0 - k_0] + e^{-\delta} \sum_{s \in S} \pi_s u[f_s(k_0)]$$

Y la condición de primer orden sería:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^p}{\partial k_0} = -u'(c_0) + e^{-\delta} \sum_{s \in S} \pi_s u'(c_{1s}) f_s'(k_0) = 0$$

2. Economía de intercambio: aquí es clave recalcar que los mercados deben ser completos. Se debe maximizar la utilidad esperada, pero la restricción dice algo diferente:

$$\max u(c_0) + e^{-\delta} E[u(c_1)]$$
$$\text{tal que}$$
$$e_0 = c_0 + \sum_{s \in S} p_s c_{1s}$$

La restricción dice que la dotación inicial debe usarse para consumir hoy y además todo el consumo que va a hacer en todos los estados de la naturaleza con p_0 normalizado a 1 $p_0 \equiv 1$. En este caso, el lagrangiano en intercambio está dado por:

$$\mathcal{L}^i = u\left[e_0 - \sum_{s \in S} p_s c_{1s}\right] + e^{-\delta} \sum_{s \in S} \pi_s u(c_{1s})$$

Y entonces lo que se va a hacer es maximizar consumo por consumo en los distintos estados de la naturaleza:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial c_{1s}} = -u'(c_0)p_s + e^{-\delta}\pi_s u'(c_{1s})$$

y esta condición de primer orden se debe multiplicar por $f_s'(k_0)$:

$$\begin{aligned} -u'(c_0)p_s f_s'(k_0) + e^{-\delta}\pi_s u'(c_{1s})f_s'(k_0) =& 0 \\ -u'(c_0)\sum_{s\in S} p_s f_s'(k_0) + \underbrace{e^{-\delta}\sum_{s\in S}\pi_s u'(c_{1s})f_s'(k_0)}_{\substack{\text{hay que encontrar una} \\ \text{expresión para esto}}} =& 0 \end{aligned}$$

y revisnado en economía de producción, se encuentra que:

$$e^{-\delta}\sum_{s\in S}\pi_s u'(c_{1s})f_s'(k_0) = u'(c_0)$$

y esto se va a incluir en lo que recién se encontró:

$$\begin{aligned} \cancel{u'(c_0)}\sum_{s\in S} p_s f_s'(k_0) + \cancel{u'(c_0)} =& 0 \\ \sum_{s\in S} p_s f_s'(k_0) =& 1 \end{aligned}$$

Esta condición se parece a lo que se había encontrado en la economía que no tenía riesgo donde $R_f = f'(k_0)$. Entonces ahora queda ver la interpretación económica.

11.5.1 Interpretación económica

Entonces se encontró la situación de que $\sum_{s\in S} p_s f_s'(k_0) = 1$ entonces veamos un ejemplo.

Ejemplo 11.1 — Una inversión sin riesgo. Si se tiene una inversión sin riesgo esto significa que

$$f_s(k_0) = f(k_0)$$

esto quiere decir que no cambia de acuerdo a los estados de la naturaleza. Pero también significa que $f_s'(k_0) = f'(k_0)$, o sea una constante. Para esta inversión sin riesgo se tiene que

$$\sum_{s\in S} p_s f'(k_0) = f'(k_0)\sum_{s\in S} p_s$$

Ahora viene lo importante: la suma de los precios de los instrumentos puros es igual al valor del instrumento complejo libre de riesgo V_f donde $V_f =$ bono cupón cero, es decir $CF_j = 1\ \forall\ s \in\ S$.

Este bono cupón cero también se podría encontrar como $V_f = \frac{1}{1+r_f} = \frac{1}{R_f}$. Entonces lo que se está diciendo es que $\dfrac{f'(k_0)}{R_f} = 1$ con lo que entonces $f'(k_0) = R_f$.

Esto es el mismo resultado que dio en una economía sin riesgo, y esta es la clave que permite entender que está maximizando tanto en economía de dotación y economía de producción. ■

El siguiente paso que está faltando es encontrar el valor actual neto en una economía con producción.

11.5.2 Valor actual neto en una economía con riesgo

El valor actual neto genera el siguiente flujo de caja

$$CF_{js} = f_s(k_0)\ \forall\ s \in\ S$$

Y el valor actual del proyecto está dado por:

$$VA = \sum_{s\in S} p_s \cdot f_s(k_0)$$

Es decir que el valor actual del proyecto se valor igual que se valoraban los instrumentos complejos. Y el valor actual neto del proyecto estaría dado por:

$$VAN = -k_0 + \sum_{s\in S} p_s \cdot f_s(k_0)$$

Esta es la forma en que se calculan los valores actuales netos cuando hay mercados completos. Ahora hay que maximizar respecto a k_0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial VAN}{\partial k_0} = -1 + \sum_{s\in S} p_s f_s'(k_0) =& 0 \\ \sum_{s\in S} p_s f_s'(k_0) =& 1 \end{aligned}$$

Y esto da la misma condición de maximización cuando se tenían economías de producción e intercambio. Entonces el principio de separación de Fisher se está cumpliendo: mientras los gerentes maximicen el VAN están haciendo lo que es preferido por los dueños de la empresa.

Entonces ahora esto se va a ver con el ejemplo que ya se tenía hecho.

11.5.3 Ejemplo de economía resuelta

En ese ejemplo se tenían los precios de los instrumentos puros:

$$\begin{aligned} p_s =& \begin{bmatrix} 0.3 & 0.45 & 0.18 \end{bmatrix} \\ \gamma =& 1 \end{aligned}$$

Esto era para el caso donde $\gamma = 1$ y los agentes tenían utilidades logarítmicas. Y las siguientes probabilidades:

$$\pi_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Las dotaciones totales de la economía eran:

$$E_s = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Como hay que maximizar el valor actual neto: siempre que $VAN > 0$ se debería hacer el proyecto y si $VAN < 0$ se rechaza el proyecto.

Entonces se van a ver distintos proyectos:

1. Proyecto #1: sistema hidropónico
   Las características de este proyecto son:

$$\begin{aligned} -I_0 =& -x \\ f_s(I_0) =& (1,1,1) \end{aligned}$$

El valor actual de este proyecto sería:

$$\begin{aligned} VA_x =& 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.45 + 1 \cdot 0.18 \\ =& 0.93 \end{aligned}$$

Y el valor actual neto sería:

$$VAN_x = -x + 0.93$$

Y el proyecto se aceptaría solo si:

$$\begin{aligned} VAN \geq& 0 \\ -x + 0.93 \geq& 0 \\ 0.93 \geq& x \end{aligned}$$

El valor actual también se puede encontrar de otra forma:

$$\begin{aligned} VA_x =& \frac{E[f_s(k_0)]}{1 + E[r_x]} \\ =& \frac{1}{1 + E[r_x]} \\ E[r_x] =& 7.526\% \end{aligned}$$

Entonces esto dice que la tasa de descuento de este proyecto debería ser 7.526%. Entonces se puede decir varias cosas:

a. Siempre y cuando la inversión inicial sea menor a 0.93 debería hacerlo
b. Los flujos de caja de esta economía debería descontarlos al 7.526%. Esto es así porque este 7.5% también es el rendimiento esperado del bono libre de riesgo. Este proyecto se parece mucho al bono sin riesgo porque está ofreciendo un flujo de caja que es igual en todos los estados de la naturaleza. Tiene un perfil de riesgo muy similar al bono libre de riesgo.
   El β del sistema hidropónico sería 0 porque no tiene correlación con las dotaciones totales de la economía, o sea, que no tiene correlación con el mercado.

2. Abono fertilizante
   El flujo inicial $c_0 = -y$.

   Un fertilizante solo sirve aplicarlo cuando está lloviendo, de lo conctrario, se quema. (?)

   Este abono fertilizante va a tener un flujo de marginal:

$$f_s(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

donde $E[f_s] = 1$. El valor actual de este proyecto de abono fertilizante sería:

$$\begin{aligned} VA_y =& 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.18 \\ =& 0.81 \end{aligned}$$

Y el valor actual neto:

$$\begin{aligned} VAN_y = -y + 0.81 \geq& 0 \\ y \leq& 0.81 \end{aligned}$$

Entonces mientras la inversión inicial sea menor que 0.81, estaría dispuesto a hacerlo. Luego,

$$\begin{aligned} VA_y =& \frac{E[CF_y]}{1+E[r_y]} \\ E[r_y] =& 23.4\% \end{aligned}$$

Entonces observe que se está descontando el abono fertilizante con una tasa mucho más alta que el proyecto hidropónico. Esto se debe a que el abono fertilizante tiene un estado en donde no da pagos:

$$\begin{aligned} F_s &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ E_s &= \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pero en este estado (sequía) la dotación de la economía es de 4, por lo que entonces el β es positivo y es mayor que 1 $\beta_y > 1$:

$$\begin{aligned} F_s &: 1 \to 2 \to 100\% \\ E_s &: 5 \to 6 \to 20\% \end{aligned}$$

Es decir que el β es como de 5, porque el mercado sólo se estaría moviendo un 20% mientras que el instrumento un 100%.

3. Sistema de riego: este proyecto tiene un costo inicial de z: $c_0 = -z$ mientras que los flujos de caja son: $F_s(\cdot) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que es un instrumento riesgoso dado que sus flujos de caja van cambiando.
   Ahora hay que ver el valor actual del proyecto:

$$\begin{aligned} VA_z =& 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.45 + 0 \cdot 0.15 \\ =& 1.05 \end{aligned}$$

   Y el valor actual neto de este proyecto sería:

$$\begin{aligned} VAN_z = -z + 1.05 \geq& 0 \\ z \leq& 1.05 \end{aligned}$$

   Y finalmente:

$$\begin{aligned} 1.05 =& VA_z = \frac{E[f_s(k_0)]}{1+E[r_z]} = \frac{1}{1+E[r_z]} \\ E[r_z] =& -.476\% \end{aligned}$$

Y se puede ver que la tasa de descuento es negativa $\to$ porque funciona como un seguro, porque mientras el flujo de caja de este proyecto es:

$$\begin{aligned} F_s &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ E_s &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es decir que se está moviendo en contra de la economía, y de hecho más bien:

$$\begin{aligned} F_s &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ E_s &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\ & \quad 5 \quad 5 \quad 5 \end{aligned}$$

Por lo que entonces se pasa de una economía con riesgo, a una donde ya no existe el riesgo: se gana lo mismo en todos los estados de la naturaleza y esto sería lo que ocuparía justamente esta economía.

Por lo tanto, este proyecto tiene un β negativo $\beta_z < 0$, porque se mueve en dirección opuesta al mercado.

Lo importante de Fisher es entender que la tasa de interés depende tanto de elementos psicológicos como externos. De lo que se vio en la vez pasada también se vio que $r_f = \delta + \gamma\mu - \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}$ que también dependía de las preferencias (δ, γ) y de condiciones de la economía (μ, σ).

Y lo otro que decía Fisher es que no hay problemas con que haya separación entre propiedad y control siempre y cuando los gerentes estén maximizando el valor actual neto (VAN) de los proyectos.

Esto se vio para economías sin y con riesgo, sin embargo, para economías donde hay riesgo es necesario que el mercado completo. Si los mercados no están completos, esto no necesariamente se cumple: el gerente tendría que saber las preferencias los dueños de la empresa.

Ejercicio 11.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *Explique el concepto de money separation.* $\rightarrow$ Es cuando las personas optaban por dividir entre activos de renta fija y renta variable.
2. *Cuando hay preferencias de media y varianza, ¿qué tipo de separabilidad en carteras hay?* $\rightarrow$ Cuando hay preferencias de media y varianza se puede hacer separabilidad en dos carteras.

   Siempre que haya preferencias de media y varianza hay separabilidad en dos carteras. Si además hay activo libre de riesgo, hay *money separation*.

■

12. Modigliani Miller I en Mercados Completos

Este teorema se suele considerar como la base de las finanzas corporativas. Las finanzas corporativas se basan en valorar empresas, proyectos, por eso se ocupa haber llevado contabilidad.

Este teorema habla sobre cómo afecta la estructura del capital al valor de la empresa. Las empresas tienen dos formas de financiarse:

- Deuda D
- Patrimonio E (*Market Value Equity*)

La suma de los dos es el *enterprise value* o valor del negocio. Lo que se quiere entender es cuáles son los determinantes del valor del negocio. Lo que dice el teorema es que, bajo ciertas condiciones, los cambios en la estructura de la deuda no cambian el valor del negocio.

Los supuestos del modelo son los siguientes:

1. No hay costo de quiebras
2. Los impuestos son neutros: en la mayoría de países se subsidia la deuda $\rightarrow$ los pagos de intereses sobre la deuda son deducibles de la renta mientras que el pago de dividendos no lo son.
3. Se permite las ventas al descubierto
4. No hay poder de mercado
5. No hay información asimétrica

Lo destacable de la demostración de este teorema es que se hace por ausencia de arbitraje.

Ahora hay que ver las demostraciones.

12.1 Demostraciones

El estado de situación financiera son: activos, pasivos y patrimonio.

Una empresa

Activos	Pasivos
Efectivo	Deudas
Cuentas por pagar	E_t = patrimonio
Inventario	Pasivos totales
Propiedad	
Plantas	
Equipo	
Activos totales	

Al final debe cumplirse que activos totales = pasivos totales

Definición 12.1 — Pasivos. Son obligaciones o deudas con las cuales hay que cumplir.

Definición 12.2 — Patrimonio. Es el aporte que hicieron los socios.

Usualmente se suele hacer una separación entre activos corrientes (usualmente se pueden liquidar en un período de menos de 1 año) y activos no corrientes (usualmente **no** se pueden liquidar en un período de menos de 1 año).

Al final lo que dice el teorema, de forma intuitiva, es que el valor de una empresa se determina por la columna de la izquierda, y dado que siempre debe darse la igualdad contable entre activos totales y pasivos totales, aunque se redistribuyan los activos totales, esto no va a cambiar los valores totales de ambas columnas (puesto que siempre deben ser iguales) y entonces no cambia el valor de la empresa.

12.1.1 Demostración de Modigliani y Miller (1958)

La estructura de capital se pregunta cuánto endeudamiento debería tener la empresa: ¿debería financiarse el valor de la empresa con deuda o con patrimonio? Indica cuánto endeudamiento tiene la empresa. Tiene que estar entre 0 y 1.

0 significa que no se está endeudado para nada. 1 significa que se está al 100% endeudado.

Se consideran dos empresas con el mismo flujo de caja pero distinta estructura de capital:

1. Empresa U (*unlevered* o desapalancada). Esta empresa genera un flujo de caja $FC = a_t$ con $t = 1,\dots,T$. El valor de su deuda es 0 $D_u = 0$. El valor de sus acciones es E_u y el valor del negocio es $EV_u = E_u$
2. Empresa L (*levered* o apalacancada). Esta empresa genera un flujo de caja $FC = a_t$ con $t = 1,\dots,T$. El valor de su deuda es 0 $D_l > 0$ y realiza pagos d_l para $t = 1,\dots,T$. El valor de su patrimonio es E_l y tiene pagos $e_t = a_t - d_t$ para . El valor del negocio es $EV_l = D_l + E_l$.

Teorema 12.1 — Teorema Modigliani-Miller. El valor del negocio desapalancado tiene que ser igual al negocio apalancado: $EV_u = EV_l$.

Proposición 12.1 Esto se puede probar por contradicción:

- Suponga que, por ejemplo, $EV_l > EV_u$. Se compra barato y se vende al descubierto lo que está caro. Con la cartera resultante se hacen ganancias. De este modo, se tendría que comprar EV_u y se tendría que vender al descubierto EV_l. La cartera entonces:

Entonces hay que la posición neta de la cartera:

Entonces se generan posibilidades de arbitraje: conforme la gente compra más acciones de la empresa desapalancada y vende los instrumentos de la empresa apalancada, el precio de

Cartera	FC_0	FC_t
Compro α_{Eu}	$-\alpha E_u$	$+\alpha a_t$
Short sell αD_l	$+\alpha D_l$	$-\alpha d_t$
Short sell αE_l	$+\alpha E_l$	$-\alpha[a_t - d_t]$

Cartera	FC_0	FC_t
Compro α_{Eu}	$-\alpha E_u$	$+\alpha a_t$
Short sell αD_l	$+\alpha D_l$	$-\alpha d_t$
Short sell αE_l	$+\alpha E_l$	$-\alpha[a_t - d_t]$
Posición neta	$\alpha[E_l + D_l - E_u]$	$+\alpha[a_t - d_t - a_t + d_t]$
	$\alpha[EV_l - EV_u]$	0

una y otra se igualarán hasta cerrar las las brechas, por lo que entonces, si hubiera arbitraje habría una contradicción con la proposición original.

En los mercados financieros no puede haber arbitraje. Es una oportunidad demasiado fácil de ganar como para que no se hayan agotado ya dichas oportunidades.

12.1.2 Demostración en mercados completos de Stiglitz (1968)

Se va a considerar los estados de la naturaleza $\theta \in \Theta$, el flujo de caja $x(\theta)$ y un precio dado del estado de la naturaleza $p(\theta)$ y se van a considerar dos instrumentos financieros:

1. Bonos (deuda): tienen una tasa de interés bruta R y tienen un valor facial $VF = D$ y se tiene que el valor facial es igual al valor de mercado.
   - Si $x(\theta) \geq R \cdot D$: en estos estados de la naturaleza donde lo prometido a pagar es menor que el flujo de caja que genera la empresa, entonces puede pagar la deuda. Por lo tanto está en un estado de no quiebra $Q^c = \{\theta | x(\theta) \geq RD\}$
   - Si $x(\theta) \geq R \cdot D$: en estos estados de la naturaleza donde lo prometido a pagar es mayor que el flujo de caja que genera la empresa, entonces no puede pagar la deuda. Por lo tanto está en un estado de quiebra $Q = \{\theta | x(\theta) \leq RD\}$

   Los flujos de caja de los acreedores serían:

   $$d(\theta) = \begin{cases} R \cdot D \; \forall \; \theta \; \in \; Q^c \\ x(\theta) \; \forall \; \theta \; \in \; Q \end{cases}$$

   En el caso del estado de quiebra es un supuesto algo fuerte porque se está suponiendo que se recupera toda la deuda, pero eso no es cierto: esos costos en realidad no son cero porque hay que pagar abogados, contadores, etc.

   Entonces, la deuda es un instrumento complejo que se valora:

   $$\overset{MV}{D} = \sum_{\theta \in Q^c} = \overbrace{R \cdot D}^{FV} p(\theta) + \sum_{\theta \in Q} x(\theta) \cdot p(\theta)$$

   MV = *market value*. Y el supuesto que se hace es que el valor facial es igual al valor de mercado. R es la variable que se puede ajustar para garantizar entre el valor de mercado y el valor facial.

   Esto es una deuda riesgosa porque hay estados de la naturaleza donde hay quiebra.

   El no tener poder de mercado implica que no se puede cambiar la prima de mercado ni R_f. Pero una empresa sí puede ofrecer una u otra tasa de interés pero R se puede pensar como el cupón que se está dando.

2. Acciones: se quiere ver el valor de las acciones. Los flujos de caja de los acreedores serían:

   $$d(\theta) = \begin{cases} x(\theta) - R \cdot D \; \forall \; \theta \; \in \; Q^c \\ 0 \; \forall \; \theta \; \in \; Q \end{cases}$$

Entonces, el valor del patrimonio es:

$$E = \sum_{\theta \in Q^c} = [= x(\theta) - R \cdot D\}]\, p(\theta) + 0$$

El valor del negocio sería la deuda más el patrimonio:

$$\begin{aligned} EV &= \sum_{\theta \in Q^c} [\cancel{RD} + x(\theta) - \cancel{RD}]\, p(\theta) + \sum_{\theta \in Q} x(\theta) p(\theta) \\ &= \sum_{\theta \in Q^c} x(\theta) \cdot p(\theta) + \sum_{\theta \in Q} x(\theta) p(\theta) \end{aligned}$$

Y la unión de los conjuntos Q y Q^c es todo el conjunto de los estados de la naturaleza, por lo que entonces:

$$EV = \sum_{\theta \in \Theta} x(\theta) p(\theta)$$

Y en esta fórmula no aparece la estructura de capital de la empresa, por lo que entonces la estructura de capital no afecta el valor de negocio cuando hay mercados completos. El supuesto importante es que en estado de quiebra no hay costos de quiebra.

III Teoría de Carteras

13. Acciones

Las acciones tienen varias características:

1. **Da el derecho a los flujos de caja residuales de una empresa. Residuales significa que son los últimos en recibir dinero de la empresa.** Normalmente los primeros en recibir flujos de caja o los que tienen el derecho a recibir los primeros flujos de caja de la empresa son los trabajadores. Luego los proveedores, los acreedores. También tienen derecho a los flujos de caja el gobierno.
2. **Normalmente, da 'control' sobre la empresa, al menos nominalmente, ya que son los que escogen a los miembros de la junta directiva.** Los miembros de la junta directiva son los representantes legales de la empresa.

Estas dos potestades se le asignan a los accionistas porque como son los últimos en recibir los flujos de caja, ellos son quienes toman todas las decisiones. *"El que gran parte reparte, se deja la mejor parte"*. $\rightarrow$ Por esta razón los accionistas quisieran maximizar el valor del negocio para asegurar que les quede una gran parte a ellos.

La totalidad del patrimonio (*equity*) es la suma de las acciones de la empresa. Ese patrimonio tiene un valor en libros (*Book Value of Equity BVE*) y un valor de mercado (*Market Value of Equity*).

Para las empresas que se cotizan en bolsa, el valor de mercado ('*Market Value of Equity'* o MVE) se calcula de la siguiente manera: $MVE_j = N_j \cdot P_j$ también se conoce como la capitalización de mercado ('*Market Capitalization*' o *Market Cap*'), donde N_j es el número de acciones y P_j es el precio por acción. En realidad esto también se puede hacer para empresas que no cotizan en bolsa pero es más difícil.

Toda empresa cotizada tiene un *'Ticker'* que es una abreviatura por la que se puede ver en el mercado.

13.1 Hipótesis de mercados eficientes

Es una idea antigua y relativamente sencilla de probar. La primera persona en afirmar esto fue Bachelier en 1900. Planteó que los precios de la bolsa de valores tienen o siguen una caminata aleatoria. **Caminata aleatoria quiere decir que se está usando toda la información disponible a la hora de valorar los rendimientos $\rightarrow$ se está usando toda la información disponible en el momento. Si estoy usando toda la información disponible, los cambios en los rendimientos únicamente se dan debido a cambios inesperados o sorpresas, es decir, nueva información que no había sido incorporada anteriormente, porque si fuera información no sorpresiva, ya se hubiera incorporado a la hora de hacer la valoración**.

Cowles (1933) hizo un análisis empírico: vio los precios de las acciones, y después de una subida, ¿es más probable que el precio suba o baje? Luego Samuelson en 1973 hizo una demostración de la caminata aleatoria. Eugene Fama (1970,1971) hizo un recuento de la hipótesis de mercados eficientes (EMH) y las consecuencias de esto.

Sea V^* todos los flujos que genera un activo en el futuro, por ejemplo para una empresa como Apple o Amazon. Entonces, el precio de una acción como Amazon, ¿qué refleja? Si se trae a valor presente toda la información que se sabe de los flujos de caja de Amazon:

$$P_t = E_t\left[V^*\right]$$

Entonces el subíndice t indica que se está usando toda la información que se tiene disponible (que sea relevante) hasta ese entonces para valorar a Amazon. ¿Pero qué pasa con la valoración para los siguientes períodos?

$$P_{t+1} = E_{t+1}\left[V^*\right]$$

El rendimiento es $r_{t+1} = \frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$, por lo tanto:

De momento no nos vamos a preocupar por el denominador del rendimiento a la hora de aplicar la esperanza a ambos lados.

$$\begin{aligned} E_t\left[r_{t+1}\right] =& E_t\left[P_{t+1} - P_t\right] \\ =& E_t\left[E_{t+1}\left[V^*\right] - E_t\left[V^*\right]\right] \\ =& E_t\left[V^*\right] - E_t\left[V^*\right] \\ =& 0 \end{aligned}$$

Ley de las esperanzas iteradas:

$$E_t\left[E_{t+1}\left[V^*\right]\right] = E_t\left[V^*\right]$$

La moraleja es que entonces no hay correlación entre r_t y r_{t+1}: si hubiera correlación, habría un cierto patrón que se podría aprovechar, y al aprovecharse de esos patrones termina desapareciendo ese patrón u oportunidad de explotación.

Entonces ahora hay que probar la hipótesis de la caminata aleatoria, pero en economía financiera no sirve ver si una serie es estacionaria con una prueba Dickey Fuller por ejemplo.

r_{ms} es un rendimiento continuamente compuesto por mes para $s = 1, 2, \ldots, 12$. Ahora, para calcular el rendimiento anual sería sumar los rendimientos mensuales (desde enero hasta diciembre por ejemplo) $r_a = \sum s = 1^{12} r_{ms}$.

La varianza del rendimiento anual sería entonces $Var\left[r_a\right] = \sum_{s=1}^{12} \underbrace{Var[r_{ms}]}_{\sigma_m^2} = 12\sigma_m^2$. Como no hay autocorrelación las covarianzas serían 0.

13.2 Test de razón de varianzas

La prueba de razón de varianzas sería:

$$VR = \frac{\sigma_a^2}{12\sigma_m^2}$$

Si no hay autocorrelación este número debería ser 1.

14. Matemática de Media y Varianza

Vamos a empezar ya propiamente con la teoría de carteras y ver qué pasa cuando se mezclan un poco. La vez pasada vimos acciones y la idea es empezar ya a crear carteras de acciones.

14.1 Matemática de media y varianza

La pregunta fundamental es: ¿cómo invertir en múltiples activos? $\rightarrow$ de momento se ha invertido en uno u otro activo, pero ahora la idea es invertir, simultáneamente en más de un activo. Esto fue desarrollado por Markowitz en 1952 aproximadamente.

El supuesto básico de Markowitz es partir de que se tienen preferencias de media y varianzas. Los dos supuestos suficientes para tener preferencias de media y varianza eran:

1. Tener preferencias cuadráticas
2. Tener rendimientos elípticos

Los rendimientos de las acciones siguen una distribución...

Entonces lo que vamos a hacer es ver el comportamiento de media y varianza de las carteras. Vamos a empezar con dos activos y luego se generaliza a n activos.

r_x es un rendimiento sencillo, no continuamente compuesto, al igual que r_y. Y el rendimiento esperado es $E[r_j] \equiv \mu_j$.

Para el análisis nuestro lo más sencillo es asumir que se van a distribuir como una normal, aunque no necesariamente sea el caso, pero sí será un rendimiento elíptico.

La varianza de cada uno de los activos es $Var[r_j] \equiv \sigma_j^2$:

$$\begin{aligned} Var[r_j] &= E\left[(r_j - \mu_j)^2\right] \\ &= E\left[r_j^2\right] - \mu_j^2 \end{aligned}$$

Y por último, la covarianza:

$$\begin{aligned} Cov\left[r_x, r_y\right] &\equiv \sigma_{xy} \\ &\equiv \sigma_{yx} \\ &= E\left[r_x \cdot r_y\right] - \mu_x \mu_y \end{aligned}$$

También interesa saber el coeficiente de correlación entre activos:

$$\rho_{xy} \equiv \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \in [-1, 1]$$
$$\rho^2 = R^2$$

La correlación al cuadrado es igual al coeficiente de determinación R^2 de una regresión como las de econometría.

El vector μ es el que tiene las medias de todos los rendimientos $\mu = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}$ (vector de rendimientos). Por otro lado, la matriz de varianzas-covarianzas es:

$$V \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

Desde el punto de vista matricial, se puede decir que esta matriz es:

1. Simétrica $\rightarrow$ la matriz es igual a su transpuesta
2. Semidefinida positiva $\rightarrow$ la varianza de una cartera siempre es positiva

14.1.1 Media de las carteras

Se invierte w_x de la riqueza en el activo x, y w_y de la riqueza en el activo y.

Tiene que cumplirse que los pesos w sumen a uno:

$$w_x + w_y = 1$$

Por lo que entonces:

$$w_y = 1 - w_x$$

Observe que, por ejemplo, es posible que $w_x > 1$ o que $w_x < 0$. El segundo caso implicaría hacer una venta al descubierto del activo x, y por ende, se tendría que comprar aún más del activo y para "compensar".

En otras palabras, lo importante realmente es que los pesos sumen a uno, pero cada peso individualmente, puede ser mayor que 1 o menor que 0.

Entonces por comodidad se puede definir que $w \equiv w_x$ dado que al haber solo dos activos, los pesos pueden plantearse solo en términos de uno de los activos, en este caso, x.

Entonces, el rendimiento esperado de la cartera sería:

$$\begin{aligned} E\left[wr_x + (1-w)r_y\right] &= wE[r_x] + (1-w)E[r_y] \\ &= w\mu_x + (1-w)\mu_y \end{aligned}$$

Esto se puede reescribir matricialmente:

$$\begin{aligned} E\left[wr_x + (1-w)r_y\right] &= \begin{bmatrix} w_x & w_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} \\ &= w'\mu \end{aligned}$$

Y a partir de esto, se puede definir un nuevo vector que llamaremos w:

$$w = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \quad \in R^2$$

donde $w_x = w$ y $w_y = 1 - w$.

Que $w \in R^2$ significa que puede tomar valores tanto positivos como negativos.

Hay otro vector ι que va a estar lleno de 1's $\iota = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces $w'\iota = 1$ porque sería la suma de los pesos de la cartera.

14.1.2 Varianza de la cartera

La varianza de la cartera sería:

$$\begin{aligned} Var[w_x r_x + w_y r_y] =& w_x^2 \sigma_x^2 + 2 w_x w_y \sigma_{xy} + w_y^2 \sigma_y^2 \\ =& \begin{bmatrix} w_x & w_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \\ =& w'Vw \end{aligned}$$

La varianza de una cartera no puede ser negativa. En términos generales, sí podría ser 0, lo cual sucedería cuando los pesos sean 0. De momento esto no tiene mucho sentido, pero será posible cuando haya activos libre de riesgo.

Ejemplo 14.1 — Exxon Mobile y Apple. La media histórica de estas empresas son:

$$\mu = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 2.48 \\ 0.93 \end{bmatrix}$$

Esto lo que quiere decir es que el rendimiento promedio de Apple por mes es de 2.48 y el Exxon es de 0.93.

El $\frac{1}{100}$ se saca para no tener que estar usando tantos decimales.

La varianza sería:

$$V = \frac{1}{100^2} \begin{bmatrix} 50 & 8 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$$

Esto lo que dice es que Apple da un rendimiento bastante mayor a Exxon pero Apple también es más riesgosa que Exxon. La varianza no tiene una interpretación económica tan fácil. La desviación estándar sería:

$$\begin{aligned} \sigma_{AAPL} =& \sqrt{\frac{50}{100^2}} \\ =& 7.07\% \end{aligned}$$

Es decir, Apple tiene un rendimiento mensual de 2.48% y una desviación de 7.07%, lo cual es bastante amplio porque se podrían tener rendimientos de 2.48%±7.07% lo cual es un rango muy amplio. Para Exxon:

$$\sigma_{XOM} = \sqrt{\frac{19}{100^2}} = \qquad \sqrt{4.36\%}$$

Note que en este caso no hay dominancia entre las acciones porque Apple tiene mayor media pero también mayor varianza. Pero esto no es tan importante: en las carteras vamos a ver que es posible que interese mezclar activos dominados.

Estos activos tiene una correlación positiva:

$$\begin{aligned}\rho =& \frac{8}{\sqrt{50}\sqrt{19}}\\ \approx& 0.2533\end{aligned}$$

Y luego

$$\rho^2 = R^2 = 0.0641$$

Esto se interpreta como que si se corriera una regresión entre los rendimientos de Apple y Exxon, daría un coeficiente de determinación de 0.0641.

Ahora la idea es crear una cartera con estas dos empresas. Se va a invertir w en Apple y $(1-w)$ en Exxon.

$$\begin{aligned}\mu_w =& w\cdot 2.48\%_{(}1-w)0.93\%\\ =& 0.0155w + 0.0093\end{aligned}$$

Observe que si

$$\text{Si}\ \ w = \begin{cases} 1 & \Rightarrow\ \mu_w = 2.48\% \\ 0 & \Rightarrow\ \mu_w = 0.93\% \end{cases}$$

Observe que 0.93% también se puede pensar como 93 puntos base (jerga financiera). Como en finanzas usualmente se trabaja con números muy pequeños, es más cómodo trabajar en términos de puntos base para no estar arrastrando tantos decimales.

Ahora, ¿será posible encontrar una cartera que pague más del 2.48%? $\to$ Sí, inviertando más en Apple, por ejemplo $w = 2$ en AAPL y así $2\cdot 2.48\% = 4.96\%$, pero esto implicaría que se está vendiendo al descubierto Exxon para financiar esas compras extras en Apple.

De esta forma, $1-w = -1$ en XOM genera un $-1\cdot 0.93\% = -0.93\%$. Vea que así:

$$\begin{array}{rr} 2\cdot 2.48\% = & 4.96\% \\ + \ -1\cdot 0.93\% = & -0.93\% \\ \hline & +4.03\% \end{array}$$

Pero observe dos elementos de riesgo:

1. Se está invirtiendo todo en Apple, el activo más riesgoso.
2. Se hizo un *short* de Exxon.

Si el precio de Apple bajara y el Exxon subiera, lo perdería todo!

Entonces observe que sí es posible obtener un mayor rendimiendo con otra cartera, pero esto vendría a costa de tener más riesgo también.

La varianza de esta cartera sería:

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 =& \frac{1}{100}\begin{bmatrix} w & 1-w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 & 8 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ 1-w \end{bmatrix} \\
=& \frac{1}{100}\left[50w^2 + 16w(1-w) + 19(1-w^2)\right] \\
=& \frac{1}{100}\left[53w^2 - 22w + 19\right]
\end{aligned}$$

Ahora, ¿cómo verificar que la fórmula está funcionando bien? $\rightarrow$ ¿Qué pasaría si invierto todo en Apple o todo en Exxon? $\rightarrow$ Si invierto todo en Exxon entonces $w = 0$ y si invierto todo en Apple sería $w = 1$:

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2|_{w=0} =& \frac{19}{100^2} = \sigma_{XOM}^2 \\
\sigma_w^2|_{w=0} =& \frac{50}{100^2} = \sigma_{AAPL}^2
\end{aligned}$$

Ahora, observe que la expresión $53w^2 - 22w + 19$ la podemos derivar respecto a w:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_w^2}{\partial w} = 0 \Leftrightarrow 106w - 22 =& 0 \\
106w =& 22 \\
w =& \frac{22}{106} \\
=& 20.70\%
\end{aligned}$$

Ahora, para saber si es un máximo o un mínimo se usa el criterio de la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \sigma_w^2}{\partial w^2} = 106 > 0$$

Por lo tanto se encontró un punto mínimo dado que la segunda derivada es positiva.

A esta cartera se le llama cartera de mínima varianza o *Minimum Variance Portfolio (MVP)*.

Entonces esta cartera dice que $w = 0.2075$ es lo que invierto en Apple y $1 - w = 0.7925$ lo que invierto en Exxon.

La varianza de la cartera sería $\sigma_{MVP}^2 = \frac{16.7^2}{100^2}$ pero como la varianza no tiene una interpretación económica tan directa, la desviación estándar sería $\sigma_{MVP} = 4.09\%$.

Observe que la varianza de esta cartera es menor que la varianza de cada una de las acciones individualmente (7.07% y 4.36% para Apple y Exxon respectivamente).

Esto es una idea muy importante: se puede pensar como cuánto gano por la diversificación del riesgo. Se puede crear una cartera con una desviación estándar menor que cada uno de los activos individualmente.

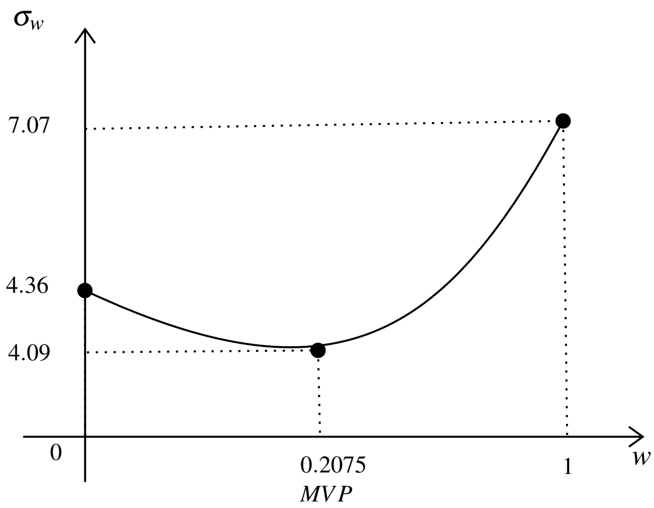
■

14.2 Diversificación del riesgo

Entonces suponga que se quiere graficar lo siguiente a partir del ejemplo de las dos acciones anteriores.

En el eje vertical se tiene la desviación estándar y en el eje horizontal se tiene el peso w que en este caso es cuánto de la riqueza invierto en Apple.

Note que cuando $w = 0$ se estaría invirtiendo todo en Exxon, y en ese caso la desviación sería de 4.36. La cartera de mínima varianza se construye invirtiendo un 20% de la riqueza en Apple y el resto en Exxon y esta tiene asociada una desviación de 4.09. Cuando se invierte todo en Apple $w = 1$ la desviación es de 7.07.



Entonces esta gráfica lo que dice es la combinación entre los pesos y la desviación estándar que resultan de invertir en Exxon y en Apple.

Observe que hay un tramo en que esa desviación baja, y luego del punto mínimo, vuelve a subir, ¿por qué? $\rightarrow$ Observe la función de varianza:

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= w\sigma_x^2 + 2w(1-w)\sigma_{xy} + (1-w)\sigma_y^2 \\ &= w\sigma_x^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_x\sigma_y + (1-w)^2\sigma_y^2\end{aligned}$$

Recuerde que $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$.

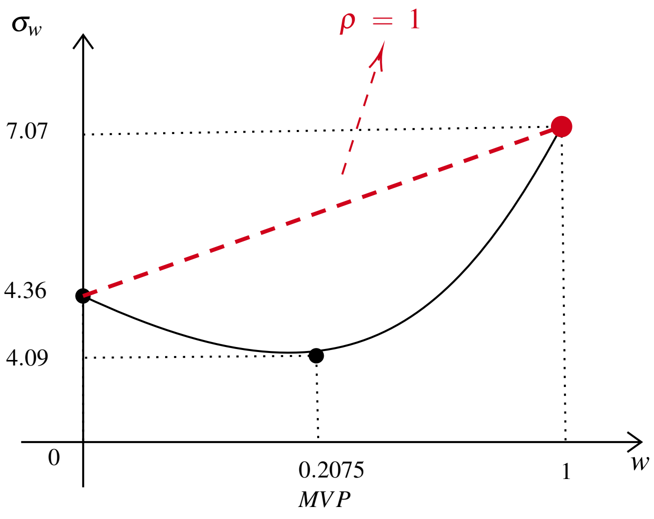
Y si $\rho = 1$ sería un caso drástico. Observe:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= w\sigma_x^2 + 2w(1-w)\sigma_x\sigma_y + (1-w)^2\sigma_y^2 \\ &= (w\sigma_x + (1-w)\sigma_y)^2\end{aligned}$$

Y como esa sería la varianza de la cartera, la desviación estándar sería:

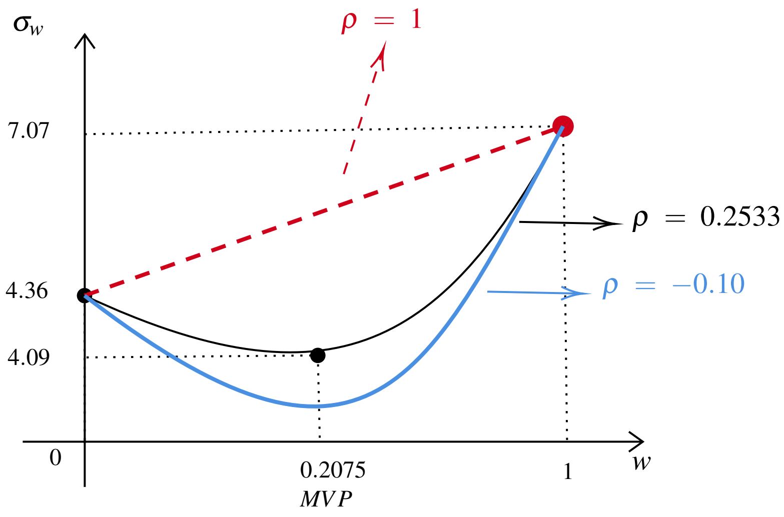
$$\sigma_w = w\sigma_x + (1-w)\sigma_y$$

De esta manera, en el gráfico anterior se puede concluir que cuando $\rho = 1$ entonces se tiene la línea que une los puntos:



Entonces, la cartera que combina Apple y Exxon tiene una curva en lugar de una línea recta $\rightarrow$ se está encontrando una cartera que tiene una varianza menor que los activos individualmente.

En la línea punteada se tenía que $\rho = 1$ pero en la cartera que tiene Apple y Exxon se tiene $\rho = 0.2533 \rightarrow$ ρ es una variable que mide la diversificación. Entonces, si $\rho < 0$ sería una cartera de mínima varianza con una menor desviación estándar incluso y se vería algo así:



Conforme ρ disminuye la curva se mueve hacia abajo $\rightarrow$ la cartera de mínima varianza va a estar todavía más abajo.

Entonces, por ejemplo, si $\rho = -1$ significa que lo que gana en una inversión lo pierde en otra. Entonces lo que pasaría es que la desviación estándar sería de 0 y se pegaría abajo en el eje $\rightarrow$ sería una cartera de cero riesgo, pero en la vida real, es poco probable que en la vida real haya una correlación de -1 entre las empresas.

Una correlación de - 1 entre las empresas significa que se mueven totalmente opuestas en proporción inversa igual a 1, pero lo que sí es más realista que suceda es que haya empresas con correlación negativa alta, pero de -1 es muy difícil.

Recuerde que la desviación estándar nunca podría ser menor a 0.

Entonces, a manera de resumen encontramos que para la cartera que construimos:

$$\mu_w = \frac{1}{100}\left[1.55 + 0.93w\right]$$
$$\sigma_w^2 = \frac{1}{100^2}\left[53w^2 - 22w + 19\right]$$

Lo que vamos a aprender más adelante es que la varianza se puede escribir como una función de la media (casi como una función de producción) en donde vamos a encontrar que:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left[\mu_w - \tfrac{A}{C}\right]^2$$

Y la desviación estándar va a ser:

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left(\mu_w - \frac{A}{C}\right)^2}$$

Y para este caso particular sería que $\frac{1}{C} = \frac{16.71^2}{100^2}$.

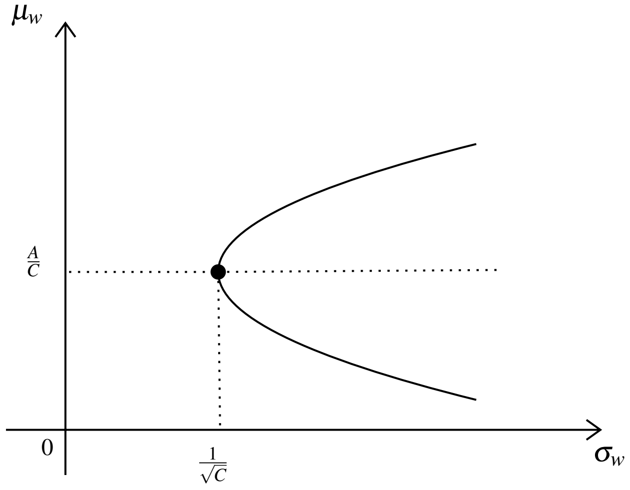
Entonces observe que cuando $\mu_w = \frac{A}{C}$ se obtendrá la varianza de la cartera de mínima varianza por lo que $\frac{1}{C} = \sigma_{MVP}^2$.

Esto implica entonces que:

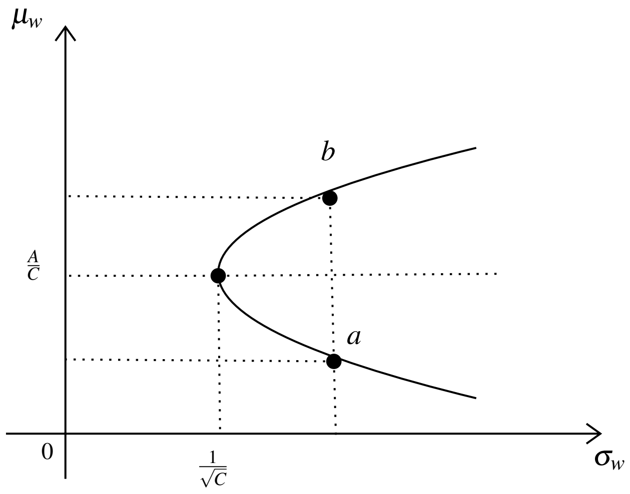
$$\begin{aligned} \mu_w &= \frac{A}{C} \\ &= \frac{1.25}{100} \\ &= 1.25\% \end{aligned}$$

Entonces esto permite graficar a la desviación estándar como función de la μ_w.

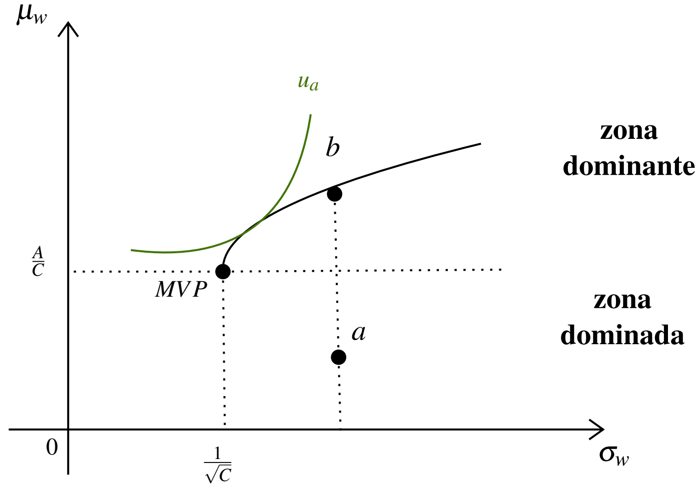
Observe que, en particular, cuando se tiene $\mu_w = \frac{A}{C}$ ahí la desviación estándar sería $\frac{1}{\sqrt{C}}$ y a partir de ahí se pueden ver cuáles son las posibilidades que se tienen (es la frontera de posibilidades):



Observe que la zona de $\frac{1}{\sqrt{C}}$ para abajo no nos interesaría (zona dominada) porque, para dos carteras a, b, la cartera b ofrece un mayor rendimiento para la misma desviación estándar:

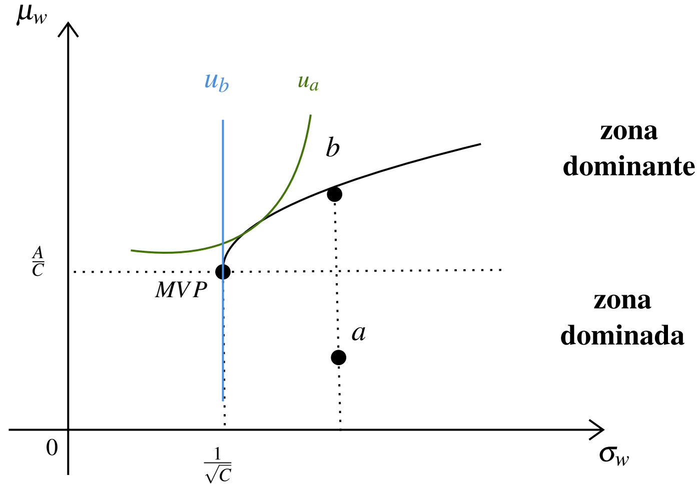


Entonces, si hay preferencias de media y varianza $\rightarrow$ las curvas de indiferencia serían convexas y con pendiente positiva y se verían algo así:



Observe que en la zona dominada hay carteras que ofrecen menores rendimientos para la misma desviación estándar, entonces se podría escoger otra cartera con más rendimiento sin aumentar la desviación estándar.

¿Alguien invertiría en la cartera de mínima varianza? $\rightarrow$ tendría que tener una función de utilidad totalmente vertical, y esa persona tendría que ser muy aversa al riesgo:

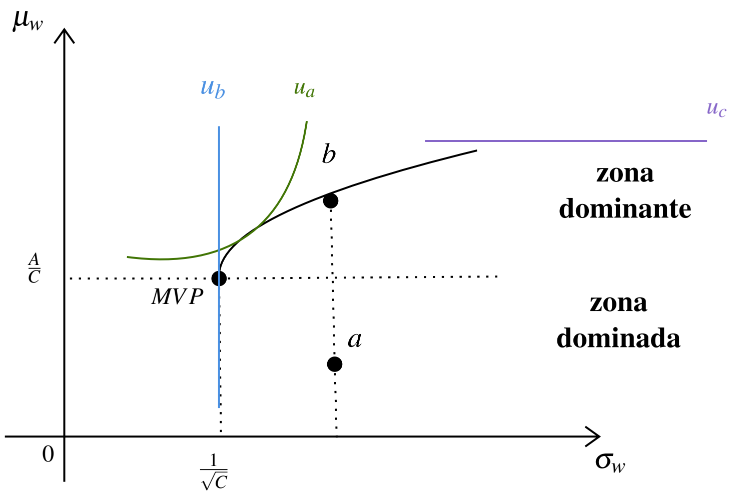


Solo una persona muy aversa al riesgo invertiría en la cartera de mínima varianza porque al tener una función de utilidad perfectamente vertical, los aumentos en el rendimiento no le aumentan la utilidad dada la desviación estándar.

Es decir, tendría que ser casi un caso de preferencias lexicográficas porque el agente b está indiferente sin importar cuánto rendimiento más le ofrezcan que eso no le va a aumentar la utilidad de la persona.

Casi todas las demás personas, invertirían en otras carteras que no sean la de mínima varianza. Entonces invertirían en carteras que están en la zona dominante.

Y finalmente, una persona neutra al riesgo, sería indiferente ante la desviación estándar, y dado que la frontera es una parábola, esta frontera eficiente se aplana en infinito, por lo que entonces esta persona vendería mucho al descubierto de Exxon para comprar infinito de Apple:



Entonces observe que probablemente las personas b, c no existen; lo normal va a ser toparnos con personas como a. De hecho observe que a sería neutro al riesgo en el intercepto, pero ya después empieza a subir su tolerancia al riesgo.

Ejercicio 14.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *Cuando hay ventas al descubierto se pueden definir los rendimientos continuamente compuestos en todos los casos. ¿Falso o verdadero?* → Falso porque con venta al descubierto no hay límite a lo que se puede perder, entonces se podría llegar a un caso en que el rendimiento sea cero o negativo y el logaritmo se indefine.
2. *La distribución lognormal se puede obtener con el teorema del límite central de una suma de variables.¿Falso o verdadero?* → Falso. Esto es cierto para distribuciones normales. Para la lognormal se puede llegar por *shocks* multiplicativos.
3. *Si un fondo suizo de bonos soberanos aumenta la duración de su cartera también aumenta su riesgo de mercado ¿Falso o verdadero?* → Verdadero.
4. *La dominancia estado por estado se puede demostrar usando la representación por igualdad en distribución. ¿Falso o verdadero?* → Es solo una igualdad ('pura y dura') y no una igualdad en distribución.
5. *El VAN de un bono es siempre menor a su valor actual. ¿Falso o verdadero?* → Verdadero. El VAN está pensado como el valor actual menos el costo inicial de inversión, pero en un bono no hay costo inicial de inversión, pero un bono no puede tener precio de 0 porque por la forma en la que se construye la maximización de mercados completos por definición tiene que ser mayor o igual a 0 (porque es la suma de precios puros y como los precios puros son positivos entonces el bono no puede tener precio de 0).

■

15. La frontera eficiente

La frontera eficiente consiste en la creación de carteras cuando se tienen n activos riesgosos. A esto se le conoce como *Mean Variance Efficient Frontier (MVEF)*.

15.1 Notación matricial

Sea $X = w'a$. La derivada $\frac{\partial x}{\partial w} = a$, donde a es un vector de dimensiones $n \times 1$. Ahora, si $x \equiv w'Vw$ entonces su derivada es $\frac{\partial x}{\partial w} = 2\underbrace{V_{n\times n}w_{n\times 1}}_{n\times 1}$.

Observe que la segunda derivada es como si fuera el caso donde $X = Vw^2$. En notación matricial sería el equivalente a $X = w'Vw$.

La matriz V es la matriz de varianzas y covarianzas, la cual se caracterizaba por:

1. Ser semidefinida positiva
2. Ser simétrica

15.2 Frontera eficiente

La idea es construir una cartera w que cumpla con lo siguiente:

1. Minimice la desviación estándar σ_w dado un rendimiento fijo μ_w
2. Los pesos de las carteras pueden sumar a 1 (aunque individualmente pueden ser mayor a 1 o menores a 0 por la posibilidad de la venta al descubierto)
3. Haya n activos riesgosos con rendimientos simples $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ y su rendimiento esperado sea $E[r] = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$. Además, hay un vector de 1's $\iota = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}$

Vamos a suponer que los rendimientos tienen una distribución conjuntamente normal a pesar de que vimos que en la realidad no hay una distribución normal.

Entonces $r \sim (\mu, V)$ donde V es la matriz de varianzas y covarianzas:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Asumir la normalidad es importante porque la distribución normal es la única distribución paretiana que es estable paretiana: esto quiere decir que la suma de variables normales es también normal.

15.2.1 Lagrangiano

La idea es minimizar la varianza, por lo tanto se tiene el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max -\frac{1}{2}w'Vw \quad \text{tal que } w'\iota =& 1 \\ w'\mu =& \mu_w \end{aligned}$$

Recuerde que $w'Vw = \sigma_w^2$ es igual a la varianza de la cartera. El menos delante del problema de maximización es porque se requiere un mínimo. Además, el $\frac{1}{2}$ sale porque la idea es que como la expresión va a quedar cuadrática, la fracción me va a ayudar a cancelar ese 2 que saldrá como exponente eventualmente.

Además, note que la primera restricción es que los pesos deben sumar a 1, mientras que la segunda lo que dice es que el rendimiento de la cartera debe ser uno concreto μ_w. Entonces, por ejemplo, si se quiere un rendimiento $\mu_w = 1\%$, la idea es buscar la cartera que minimiza la varianza para conseguir ese 1% de rendimiento.

Así, el lagrangiano sería entonces:

$$\mathscr{L} : -\frac{1}{2}w'Vw + \lambda_1 \left[w'\mu - \mu_w\right] + \lambda_2 \left[w'\iota - 1\right]$$

Los multiplicadores de Lagrange indican:

- λ_1: cuánto cambia la varianza ante un cambio en la media $\rightarrow$ es el efecto de pedir un poco más de rendimiento sobre la varianza $\lambda_1 > 0$. Tiene una clara interpretación económica.
- λ_2: la restricción del λ_2 tiene que ver con que la suma de los pesos debe sumar 1, y por ende no tiene una interpretación económica más allá de la suma de los pesos.

A continuación, hay que ver los pasos para resolver el lagrangiano:

1. Encontrar las condiciones de primer orden y despejar para ${}_1, \lambda_2$
2. Agarrar los pesos de la cartera y plantearlos como función de la media $w = f(\mu_w)$
3. Calcular la varianza de la cartera $\sigma_w^2 = w'Vw = g(\mu_w)$ y esto sería la frontera eficiente.

15.2.2 Solución

Sabiendo los pasos para obtener la frontera eficiente, entonces se procede con su solución siguiendo los pasos ya indicados:

1. Encontrar las condiciones de primer orden y despejar para ${}_1, \lambda_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = 0 \Leftrightarrow -Vw + \lambda_1 w + \lambda_2 \iota =& 0 \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \Leftrightarrow w'\mu =& \mu_w \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \Leftrightarrow w'\iota =& 1 \end{aligned}$$

La expresión resultante de la primera condición de primer orden es de dimensión $n \times 1$.

Ahora, se puede reescribir lo anterior:

$$\begin{aligned}
Vw =& \lambda_1 w + \lambda_2 \iota \\
V^{-1}Vw =& \lambda_1 V^{-1} w + \lambda_2 V^{-1} \iota \\
w =& \lambda_1 V^{-1} w + \lambda_2 V^{-1} \iota
\end{aligned}$$

La idea es pre o antemultiplicar por V^{-1} para despejar para los pesos.

Ahora, aplicamos transpuesta a ambos lados:

$$w' = \lambda_1 \mu' V^{-1} + \lambda_2 \iota' V^{-1}$$

Ahora, ya sabemos cuánto es w' y podemos evaluar en la segunda y tercera condición de primer orden:

$$\begin{aligned}
w'\mu =& \mu_w \\
\Leftrightarrow \left(\lambda_1 \mu' V^{-1} + \lambda_2 \iota' V^{-1}\right) \mu =& \mu_w \\
\lambda_1 \mu' V^{-1} \mu + \lambda_2 \iota' V^{-1} \mu =& \mu_w
\end{aligned}$$

Ahora, evaluando en la tercera condición de primer orden:

$$\begin{aligned}
w'\iota =& 1 \\
\left(\lambda_1 \mu' V^{-1} + \lambda_2 \iota' V^{-1}\right) \iota' =& 1 \\
\lambda_1 \mu' V^{-1} \iota + \lambda_2 \iota' V^{-1} \iota =& 1
\end{aligned}$$

Esto que se acaba de encontrar, se puede presentar en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mu_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu' V^{-1} \mu & \iota' V^{-1} \mu \\ \mu' V^{-1} \iota & \iota' V^{-1} \iota \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Pero esto, también se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, surgen las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
A \equiv& \iota' V^{-1} \mu = \mu' V^{-1} \iota \\
B \equiv& \mu' V^{-1} \mu \\
C \equiv& \iota' V^{-1} \iota \\
D =& BC - A^2
\end{aligned}$$

Todo esto va a tener un significado más adelante! Observe que D es el determinante de la matriz más a la izquierda.

Nos va a interesar escribir B como $B = \frac{A^2}{C} + \frac{D}{C}$.
Entonces, nosotros tenemos

$$\begin{bmatrix} B & A \\ A & C \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pero la idea del primer paso es despejar λ_1, λ_2 y esto lo podemos lograr con la inversa (de álgebra lineal):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} \mu_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Y con esto, concluye el primer paso. Sin embargo, va a ser importante tener presente las definiciones de A, B, C.
Recuerde que habíamos dicho que la matriz de varianzas y covarianzas V es simétrica y semidefinida positiva. Entonces, V^{-1} hereda las mismas propiedades y por ende también es simétrica y semidefinida positiva.

$$\begin{aligned} A \equiv & \iota' V^{-1} \mu = \mu' V^{-1} \iota \\ B \equiv & \mu' V^{-1} \mu \\ C \equiv & \iota' V^{-1} \iota \end{aligned}$$

Ahora, como V^{-1} es semidefinida positiva, entonces ante un vector $a_{n\times 1} \Rightarrow a' V^{-1} a \geq 0$; en otras palabras: esta expresión es 0 solo si el vector a estuviera lleno de 0's.
A partir de aquí entonces se puede ver que $B \geq 0$, porque la única manera en la que podría ser 0, es si μ estuviera lleno de 0's. Luego, C, tiene que ser estrictamente mayor 0 $C > 0$ porque está multiplicada por vectores llenos de 1's.Con respecto a A, ya no aplica la propiedad de ser semidefinida positiva, porque para eso tiene que ser el mismo vector multiplicando a la matriz V^{-1} pero en el caso de A es ι' y μ, de manera que no se puede decir nada al respecto, aunque lo normal es que sea positiva.
También existe una demostración para ver que $D > 0$ pero no la vemos aquí (está en el libro).
Ahora, ya con esto podemos pasar al segundo paso para encontrar la frontera eficiente.

2. Agarrar los pesos de la cartera y plantearlos como función de la media $w = f(\mu_w)$
Teníamos que

$$\begin{aligned} w = & V^{-1} \begin{bmatrix} \mu & \iota \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \\ = & \lambda_1 V^{-1} \mu + \lambda_2 V^{-1} C \end{aligned}$$

Pero ya sabemos cuánto es λ_1, λ_2, por lo que entonces:

$$w = \frac{1}{D} V^{-1} \begin{bmatrix} \mu & \iota \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} \mu_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces ya tenemos los pesos de la cartera. Vamos a calcular su inversa:

$$w^{-1} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu' \\ \iota'\end{bmatrix} V^{-1}$$

Con eso se termina el segundo paso, en esta ecuación de pesos de la cartera eficiente.

3. Calcular la varianza de la cartera $\sigma_w^2 = w'Vw = g(\mu_w)$ y esto sería la frontera eficiente. Finalmente, el tercer paso es encontrar la función de la frontera eficiente. Habíamos dicho que la mínima varianza es $\sigma_w^2 = w'Vw$, y como ya tenemos los pesos:

$$\sigma_w^2 = \underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu' \\ \iota'\end{bmatrix} V^{-1}}_{w'} \cdot V \cdot \underbrace{V^{-1}\begin{bmatrix}\mu & \iota\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix}}_{w}$$

Esta expresión se puede simplificar un poco haciendo uso de la matriz identidad:

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 &= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu' \\ \iota'\end{bmatrix} V^{-1} \cdot V \cdot V^{-1}\begin{bmatrix}\mu & \iota\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu' \\ \iota'\end{bmatrix} V^{-1} \cdot \begin{bmatrix}\mu & \iota\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu'V^{-1}\mu & \mu'V^{-1}\iota \\ \mu'V^{-1}\iota & \iota'V^{-1}\iota\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & A \\ A & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Y recordando que: $\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B & A \\ A & C\end{bmatrix}^{-1}_{2\times 2}\begin{bmatrix}\mu_w \\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix}C & -A \\ -A & B\end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix}\mu_w \\ 1\end{bmatrix}$, la expresión anterior se puede reescribir:

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 &= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & A \\ A & C\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}B & A \\ A & C\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mu_w \\ 1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_w \\ 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Así entonces:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{D}\begin{bmatrix}\mu_w & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & -A \\ -A & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_w \\ 1\end{bmatrix}$$

Entonces la frontera eficiente sería:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{D}\left[C\mu_w^2 - 2A\mu_w + B\right]$$

Pero, ahora se puede evaluar B (siguiendo la definición) para obtener una mayor intuición económica:

$$\begin{aligned}
\sigma_w^2 &= \frac{1}{D}\left[C\mu_w^2 - 2A\mu_w + \frac{A^2}{C} + \frac{D}{C}\right] \\
&= \frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left[\mu_w^2 - 2\left(\frac{A}{C}\right)\mu_w + \left(\frac{A}{C}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left(\mu_w - \frac{A}{C}\right)^2
\end{aligned}$$

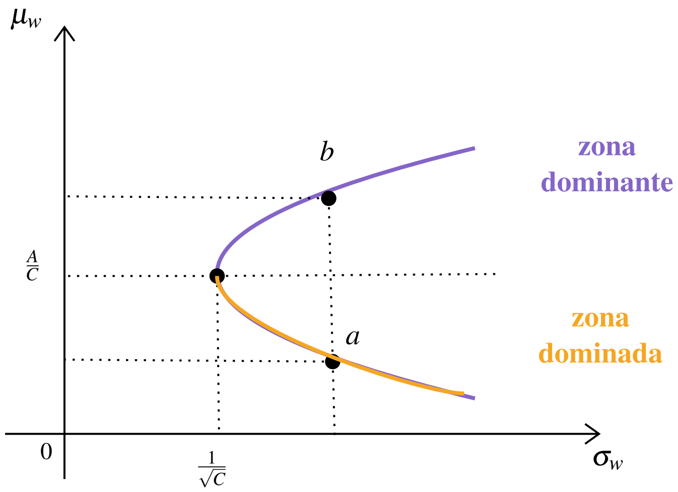
Y esta sería la fórmula de la frontera eficiente.

Esta derivación es importante porque dice cuál es la relación entre la media y la varianza de las carteras que están en la frontera eficiente.

15.2.3 Interpretación económica de la frontera eficiente

Vamos a suponer varios casos:

- $\mu_w = \frac{A}{C} \rightarrow \sigma_w^2 = \frac{1}{C}\ \sigma_w = \frac{1}{\sqrt{C}}$ esta es la cartera de mínima varianza (MVP) $\rightarrow$ ninguna cartera puede tener menor varianza que esta
- C: $\uparrow\ n \rightarrow$ si aumentan los activos se tienen más grados de libertad y la cartera de mínima varianza disminuye $\downarrow\ MVP$ entonces $\uparrow\ C$. C tiene que ver con la mínima varianza, y conforme añado más activos, C tiene que subir.
- $\frac{A}{C} = \mu_{MVP}$ (es el rendimiento de la cartera de mínima varianza. Conforme aumentan los activos $\uparrow\ n \rightarrow \uparrow$ es ambiguo. Lo importante de la cartera de mínima varianza es justamente la varianza, pero de la media no estamos seguros. Sí sabemos que C aumenta, pero A puede bajar o subir.
  Si la cartera mía $\mu_w < \frac{A}{C}$ o si más bien $\mu_w > \frac{A}{C}$, sería entonces como tener las siguientes zonas:



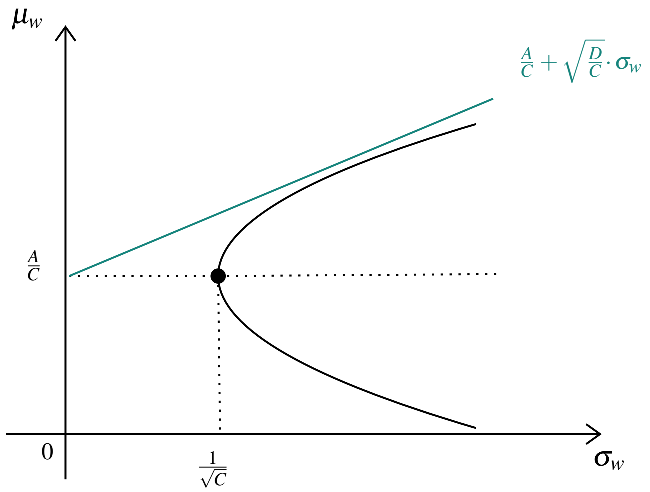
- Suponga que

$$\left(\mu_w - \frac{A}{C}\right)^2 = \frac{D}{C}\left(\sigma_w^2 - \frac{1}{C}\right)$$
$$\mu_w - \frac{A}{C} = \pm\frac{D}{C}\left(\sigma_w^2 - \frac{1}{C}\right)$$
$$\mu_w = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}\left(\sigma_w^2 - \frac{1}{C}\right)}$$
$$\mu_w = \frac{A}{C} \pm \sqrt{\frac{D}{C}}\sqrt{\left(\sigma_w^2 - \frac{1}{C}\right)}$$

Esta es la media de la cartera eficiente. Así entonces, sabiendo que $\frac{1}{C} > 0$:

$$
\begin{aligned}
\mu_w &< \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{C}}\sqrt{\sigma_w^2} \\
&= \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma_w \\
\mu_w &> \frac{A}{C} - \sqrt{\frac{D}{C}}\sqrt{\sigma_w^2} \\
&= \frac{A}{C} - \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma_w
\end{aligned}
$$

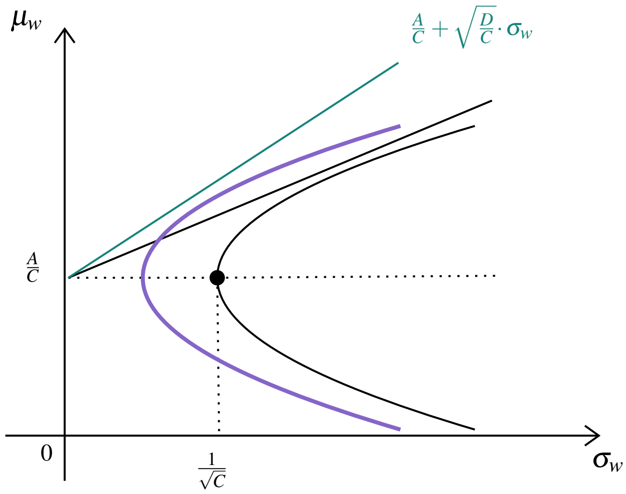
Entonces, la ecuación $\mu_w < \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma_w$ es la media de la parte dominante, y lo que dice es que se puede tirar un rayo dado por $\frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma_w$:



Así entonces, matemáticamente, el término $\sqrt{\frac{D}{C}}$ es la pendiente de la curva: entonces se puede interpretar como una tasa de cambio entre μ_w y σ_w. Así las cosas, si se aumenta la variabilidad $\Delta\ \sigma_w \uparrow \Rightarrow\ \Delta\ \mu_w \simeq \Delta\sqrt{\frac{D}{C}}$.

Esto no es exactamente la tasa de cambio, es una aproximación y más adelanta vamos a descubrir el número que sí representa esa tasa de cambio; se puede ver más bien como un techo a esa tasa de cambio.

Así, conforme aumenta el número de activos, esto es bueno porque se tienen más grados de libertad, entonces la frontera eficiente se mueve o desplaza hacia la izquierda, y esa pendiente tiene que aumentar.



Que la pendiente aumente, significa que la tasa de cambio $\sqrt{\frac{D}{C}} \uparrow$ también aumenta. Ya se había dicho que C aumenta conforme aumenta el número de activos, ¿pero entonces qué pasaría con D? $\rightarrow$ tendría que aumentar más que proporcionalmente con respecto a C para que la expresión como un todo esté aumentando.

Ejercicio 15.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *Hable sobre 'C' y para qué sirve.* $\rightarrow C = \iota' V^{-1} \iota$. Sirve porque la varianza mínima es $\frac{1}{C}$ y la desviación mínima es $\frac{1}{\sqrt{C}}$.
   ¿Y qué se sabe de C cuando aumenta el número de activos? $\rightarrow$ Cuando aumenta el número de activos la varianza de la cartera disminuye por lo que C debe estar aumentando.
2. *Hable de las características de la matriz V.* $\rightarrow$ Es semidefinida positiva y es simétrica.
   ¿Y qué significa que sea semidefinida positiva? $\rightarrow$ Que si se tiene un vector de pesos w se tiene que $w'Vw \geq 0$ porque $w\iota = 1$ entonces de ahí sale.

16. Índices de Mercado y *Spanning* de carteras

La vez pasada que teníamos las acciones de Apple y Exxon, estas estaban en la frontera eficiente, pero cuando teníamos 10 acciones, estas ya no estaban en la frontera eficiente. Eso es lo que vamos a estudiar ahora.

16.1 *Spanning* de carteras

La idea es que a partir de dos carteras que estén en la frontera eficiente, se puede encontrar cualquier otra cartera.

Hasta el momento se ha estudiado una cartera normal. Pero vamos a ver varios tipos:

1. Cartera normal: hay un vector de pesos w (qué porcentaje de mis ahorros dedico a cada activo). Tiene la característica que $w'\iota = 1$.
2. Cartera autofinanciada: se caracteriza porque $w'\iota = 0$. Significa que se hace una venta al descubierto por un lado y con ese dinero se compran otras acciones.

Lo que vimos la vez pasada es que si una cartera está en la frontera eficiente $w \in MVEF$ se puede escribir de la forma $w = V^{-1}\begin{bmatrix}\mu & \iota\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix} = \frac{1}{D}V^{-1}\begin{bmatrix}\mu & \iota\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C & -A \\ -A & B\end{bmatrix}_{2\times 2}\begin{bmatrix}\mu_w \\ 1\end{bmatrix}$. Ahora, tratando de simplificar esto un poco:

$$\begin{aligned}
w =& \frac{1}{D}\begin{bmatrix}V^{-1}\mu & V^{-1}\iota\end{bmatrix}_{1\times 2}\begin{bmatrix}C\mu_w - A \\ B - A\mu_w\end{bmatrix}_{2\times 1} \\
=& \frac{1}{D}\left[V^{-1}\mu\left(C\mu_w - A\right) + V^{-1}\iota\left(B - A\mu_w\right)\right] \\
=& \frac{1}{D}\underbrace{\left[CV^{-1}\mu - AV^{-1}\iota\right]}_{h}\mu_w + \underbrace{\left[BV^{-1} - AV^{-1}\mu\right]}_{g} \\
=& g + h\mu_w
\end{aligned}$$

donde $g \equiv \dfrac{BV^{-1} - AV^{-1}\mu}{D}$ y $h \equiv \dfrac{CV^{-1}\mu - AV^{-1}\iota}{D}$. Pero, recuerde que las definiciones:

$$
\begin{aligned}
A \equiv & \iota' V^{-1} \mu = \mu' V^{-1} \iota \\
B \equiv & \mu' V^{-1} \mu \\
C \equiv & \iota' V^{-1} \iota \\
D = & BC - A^2
\end{aligned}
$$

Entonces, lo que estamos diciendo es que si una matriz está en la frontera eficiente, se puede escribir de esa manera $w = g + h\mu_w$. Ahora lo que sigue es estudiar cuáles son las propiedades de esas matrices g y h.

16.1.1 Características de g y h

Si una cartera está sobre la frontera eficiente $w \in MVEF$, se puede escribir como $w = g + h\mu_w$, donde $g \equiv \dfrac{BV^{-1} - AV^{-1}\mu}{D}$ y $h \equiv \dfrac{CV^{-1}\mu - AV^{-1}\iota}{D}$.

Entonces ahora se quiere encontrar $\iota' g$ y $\iota' h$:

$$
\begin{aligned}
\iota' g = & \frac{B\overbrace{\iota' V^{-1} \iota}^{C} - A\overbrace{\iota' V^{-1} \mu}^{A}}{D} \\
= & \frac{\overbrace{BC - A^2}^{D}}{D} \\
= & \frac{D}{D} \\
= & 1
\end{aligned}
$$

$\iota' g$ indica que la suma de las $g = 1$. Entonces g en una cartera sobre la frontera eficiente se puede interpretar como que g es una cartera normal porque los pesos deben sumar 1.

Ahora falta ver el caso de h:

$$
\begin{aligned}
\iota' h = & \frac{C\overbrace{\iota' V^{-1} \mu}^{A} - A\overbrace{\iota' V^{-1} \iota}^{C}}{D} \\
= & \frac{CA - AC}{D} \\
= & 0
\end{aligned}
$$

Esto quiere decir que entonces h **más bien sería una cartera autofinanciada. Entonces es lo que quiere decir es que si está viendo una cartera sobre la frontera eficiente** $w \in MVEF$**, necesariamente esa cartera tiene una estructura de la forma** $w = g + h\mu_w$**, es decir, una cartera normal más una cartera autofinanciada**.

Entonces, suponga que uno quisiera un rendimiento de $\mu_w = 0$ para una cartera que está sobre la frontera eficiente, ¿cómo sería esa cartera? $\rightarrow$ siguiendo la fórmula de arriba $w_0 = g$. Entonces g es una cartera normal y que además tiene media 0.

Pero si se pide un rendimiento de $\mu_w = 1$ (es decir, como es un rendimiendo simple, se estaría pidiendo un rendimiento del 100%) entonces se tendría $w_1 = g + h$, es decir, esta sería la cartera que me daría un 100% de rendimiento.

Aquí lo importante es que el *spanning* de carteras plantea lo siguiente. Suponga que se tienen dos carteras a, b que están en la frontera eficiente $w_a, w_b \in MVEF$ donde α es un valor:

$$w_c \equiv \alpha w_a + (1-\alpha) w_b \quad n \times 1$$

w_c también va a estar en la cartera eficiente $w \in MVEF$. Por esto era que la combinación de Apple y Exxon sí estaba sobre la frontera eficiente, porque ambas empresas individualmente estaban en la frontera eficiente. Pero las demás empresas (cuando se agregaron 10) estas no estaban en la frontera, entonces la cartera que las combinaba tampoco estaba sobre la frontera.

16.2 Demostración

Decir que una cartera está en la frontera eficiente $w_a \in MVEF$, equivale a decir que esa cartera se puede reescribir

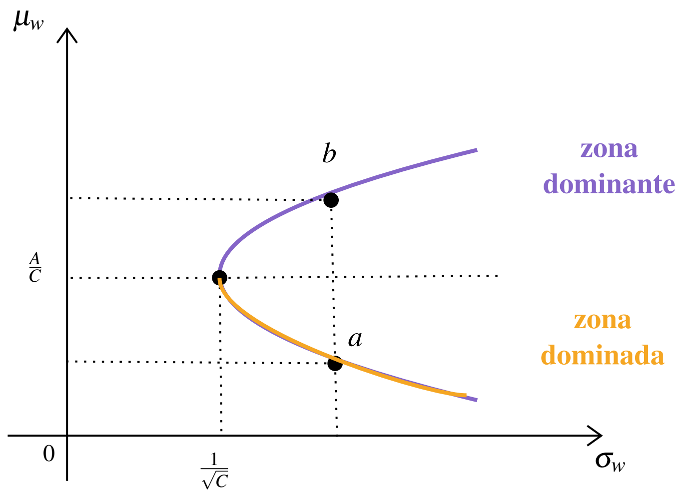
$$w_a \in MVEF \Leftrightarrow w_a = g + h\mu_a$$
$$w_b \in MVEF \Leftrightarrow w_b = g + h\mu_b$$

Entonces, la cartera w_c

$$\begin{aligned} w_c &= \alpha w_a + (1-\alpha) w_b = \alpha g + h\alpha\mu_a + (1-\alpha) g + h(1-\alpha)\mu_b \\ &= g + h\underbrace{[\alpha\mu_a + (1-\alpha)\mu_b]}_{\equiv \mu_c} \\ &= g + h\mu_c \end{aligned}$$

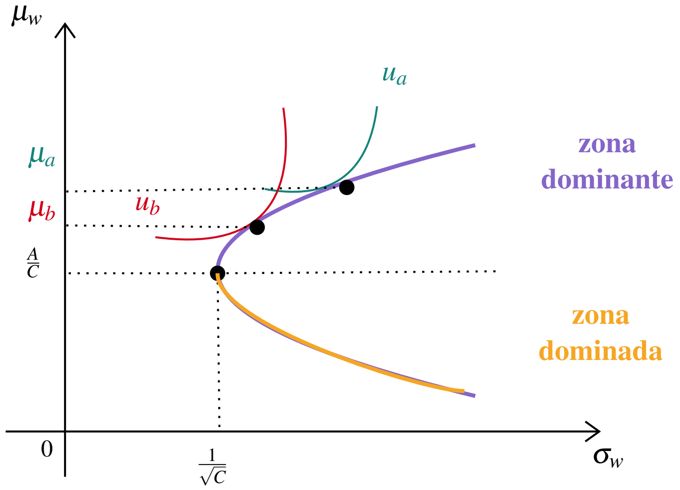
Es decir, que la cartera w_c, al poder escribirse de esta manera, está en la cartera eficiente $w_c \in MVEF$.

Esto va a servir para identificar dónde están las cosas de la cartera eficiente.



El punto de mínima varianza es una especie de frontera entre la zona dominada y la dominante. A nosotros nos interesa la zona dominante.

Ahora, para saber qué punto específico de la frontera voy a escoger, es una función de utilidad. A partir de aquí, se ubica la tangencia con la frontera eficiente y su respectiva media, con lo cual se podría ver cómo fabricar la cartera en base a esa media:



Aquí, en particular, se puede observar que B es más averso al riesgo que A.

Todas las personas racionales van a escoger carteras que estén en la frontera eficiente, y más específicamente, en la zona dominante de la frontera eficiente.

16.3 Consecuencia

Todas las personas van a escoger una cartera que esté sobre la frontera eficiente, lo cual quiere decir que $\forall\ i$ se pued escribir la cartera i como $w_i = g + h\mu_i$, y además, escogerán una cartera en la zona dominante, con lo que se obtiene que $\mu_i > \frac{A}{C}$.

Entonces, sea α_i el porcentaje de la riqueza mundial del agente i (el más rico del mundo: Jeff Bezos) y así sucesivamente todas las personas del mundo. Así la riqueza de todas las personas suma la riqueza del mundo:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1$$

Y el mercado se va a definir como la suma ponderada de las carteras:

$$\begin{aligned}
w_m \equiv& \sum_{i=1}^{I} \alpha_i w_i \\
=& \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \left[g + h\mu_i\right] \\
=& g \underbrace{\sum_{i=1}^{I} \alpha_i}_{1} + h \underbrace{\sum_{i=1}^{I} \alpha_i \mu_i}_{\mu_m}
\end{aligned}$$

Observe que $\alpha_i \mu_i$ se puede interpretar como la media ponderada: α_i es el ponderador de la riqueza de cada individuo y μ_i es la media de cada cartera.

Por otro lado, la suma de los pesos α_i es igual a 1 porque es lo que representa el peso de cada persona según su riqueza y en el mundo todas las personas deben sumar a 1.

Entonces:

$$w_m = g + h\mu_m$$

Económicamente se acaba de descubrir que la cartera de mercado es una cartera normal. Se le conoce como cartera mundial o de mercado y lo importante es que la cartera de mercado está sobre la frontera eficiente.

16.4 Índices de mercado

16.4.1 Índice de precios al consumidor (IPC)

Uno de los índices más representativos para Costa Rica es el índice de precios al consumidor (IPC). Este índice es un número que se utiliza para medir la inflación.

Ejemplo 16.1 — Midiendo la inflación con el IPC. Si se tienen los siguientes datos:

- Mayo 2020: 185.21
- Abril 2020: 186.00
- Mayo 2019: 183.00

Estos valores se obtienen a partir de la construcción de una canasta de consumo. Podría ser que por ejemplo en enumere de la siguiente manera en base al orden de consumo en el país:

1. Arroz (12% de consumo)
2. Frijoles (8% de consumo)
3. Cerveza (5% de consumo)

...

4.

300. Alquiler de VHS (0.001% de consumo)

Ahí uno pensaría que esa canasta está desactualizada por incluir el VHS.

Pero observe lo siguiente: si el arroz sube 10% de precio, la canasta se encarecerá más que si la cerveza sube 10%, porque justamente está ponderada por la importancia de consumo.

El índice de precios está pensado para calcular la inflación principalmente. Entonces se podría ver la inflación interanual de mayo para 2020:

$$\begin{aligned}\pi_{\text{mayo, 2020}} &= \frac{185.21 - 183}{183} \\ &= 0.012 \\ &= 1.2\%\end{aligned}$$

La inflación mensual sería:

$$\begin{aligned}\pi_{\text{mayo,2020}} &= \frac{185.21 - 186}{186} \\ &< 0\end{aligned}$$

Pero viendo lo del VHS, uno pensaría que se debería actualizar la canasta para que ya no tenga el VHS. Si se quisiera mantener 300 artículos, uno pensaría en sustituir VHS por servicios de *streaming* por ejemplo.

El INEC tuvo que ajustar la canasta en la pandemia para sacar de la canasta cosas como los viajes en avión o estadías en hotel.

16.4.2 Índices de mercado

Cuando vimos el tema de los fondos de inversión vimos un fondo activamente manejando, el contrafondo. También existen los fondos de inversión indexados.

*Análisis de la hoja con varios índices.

Ejercicio 16.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿Alguien leyó el artículo?* $\rightarrow$ No.
2. *¿Qué es un índice value-weighted? Y de un ejemplo.* $\rightarrow$ Es una manera de formular los ponderadores para un índice.
   ¿Y un ejemplo? $\rightarrow$ El S&P 500.
3. *¿Qué es la razón de Sharpe y para qué sirve?* $\rightarrow$ Es una medida del rendimiento de un activo descontada por el riesgo.
4. *¿Qué es el spanning de carteras?* $\rightarrow$ Cuando se tienen dos carteras a, b que estén en la frontera eficiente $\in MVEF$, una combinación de estas dos también está en la frontera eficiente.
   ¿Y para qué sirve? $\rightarrow$ Permite calcular la cartera de mercado que está en la frontera eficiente.
5. *¿Qué es el Capital Market Line?* $\rightarrow$ Lo que hace es dar cuánto es que se invierte en el activo libre de riesgo (por ejemplo cuando $w = 1$) luego cuando está entre 0 y 1 es porque se invierte en el activo libre de riesgo y en activos riesgosos, también está cuando se hace *short* del activo libre de riesgo para invertir en activos riesgosos.
   Eso está bien, pero ¿qué es? $\rightarrow$ Es como la frontera eficiente cuando hay activo libre de riesgo y tiene la pendiente que es igual a la razón de Sharpe y el intercepto es r_f. En el eje x va a tener la desviación estándar y en el eje y va a tener el rendimiento esperado.
6. *¿Qué es la cartera q?* $\rightarrow$ Es la única que está en la frontera eficiente y en el CML. Es la que tiene la razón de Sharpe más alta. Se forma cuando $w_0 = 0$ (solo invierto en activos riesgosos).

17. CAPM de Sharpe

Este capítulo extiende el concepto de equilibrio del mercado para determinar el precio de mercado del riesgo y la medida apropiada del riesgo para un solo activo. Un modelo económico para resolver este problema, llamado el modelo de valoración de activos de capital (CAPM), fue desarrollado casi simultáneamente por Sharpe [1963, 1964] y Treynor [1961], y luego desarrollado aún más por Mossin [1966], Lintner [1965, 1969] y Black [1972].

Este modelo muestra que las tasas de rendimiento de equilibrio de todos los activos riesgosos son una función de su covarianza con la cartera de mercado. Un segundo modelo importante de fijación de precios de equilibrio, llamado la teoría de valoración por arbitraje (APT), fue desarrollado por Ross [1976]. Es similar al CAPM en que también es un modelo de valoración de activos de equilibrio. Se ve que el rendimiento de cualquier activo riesgoso es una combinación lineal de varios factores comunes que afectan los rendimientos de los activos.

Comenzamos con una lista de las suposiciones que se utilizaron por primera vez para derivar el CAPM. El CAPM se desarrolla en un mundo hipotético donde se hacen las siguientes suposiciones sobre los inversores y el conjunto de oportunidades:

1. Los inversores son individuos aversos al riesgo que maximizan la utilidad esperada de su riqueza.
2. Los inversores son tomadores de precios y tienen expectativas homogéneas sobre los rendimientos de los activos que tienen una distribución normal conjunta.
3. Existe un activo libre de riesgo tal que los inversores pueden pedir prestado o prestar cantidades ilimitadas a una tasa libre de riesgo.
4. Las cantidades de activos son fijas. Además, todos los activos son comercializables y perfectamente divisibles.
5. Los mercados de activos son sin fricciones, y la información es gratuita y está disponible simultáneamente para todos los inversores.
6. No hay imperfecciones del mercado como impuestos, regulaciones o restricciones a la venta en corto.

Vale la pena discutir algunas implicaciones de estos supuestos. Por ejemplo, si los mercados son sin fricciones, la tasa de endeudamiento es igual a la tasa de préstamo, y podemos desarrollar un conjunto eficiente lineal llamado la línea de mercado de capitales (Fig. 17 y la ecuación $E[R_p] = R_f + \underbrace{\frac{E[r_m] - R_f}{\sigma(R_m)}}_{\text{pendiente}} \cdot \sigma(R_p)$). Si todos los activos son divisibles y comercializables, excluimos la posibilidad de capital humano como normalmente lo pensamos.

Si los inversores tienen creencias homogéneas, entonces todos tienen el mismo conjunto eficiente lineal llamado la línea de mercado de capitales. Proporciona una relación lineal simple entre el riesgo y el rendimiento para carteras eficientes de activos.

Vamos a dos versiones del CAPM: una es de Sharpe y otra de Black. La teoría del CAPM es el punto alto de la teoría de carteras. Fue desarrollada en 1964 por William Sharpe. Esto también fue trabajado de manera independiente por Treynor y Lintner.

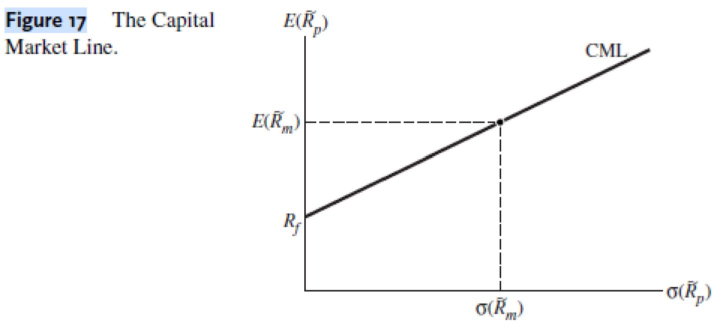


Figure 17.1: *Capital Market Line*

Lo que estos autores hicieron fue tomar el desarrollo de Markowitz de la frontera eficiente y añadieron un activo libre de riesgo y ver qué pasaba con ese caso. Uno de los hallazgos más importantes es que sale una fórmula que dice que el rendimiento esperado de una acción es la tasa libre de riesgo más el β de esa acción por la prima de riesgo $E[r_j] = r_f + \beta_j E[r_m - r_f]$.

Aquí $\beta_j \equiv \frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$. Otra de las conclusiones importantes del CAPM de Sharpe es que el índice por capitalización de mercado va a estar en la frontera eficiente $r_m \in MVEF$ y que además tiene la razón de Sharpe más alta.

A partir de aquí es que nacen los fondos de inversión indexados por este desarrollo teórico.

La prueba del CAPM requiere que en equilibrio la cartera de mercado debe ser una cartera eficiente. Debe situarse en la mitad superior del conjunto de oportunidades de varianza mínima representado en la Fig. 1.

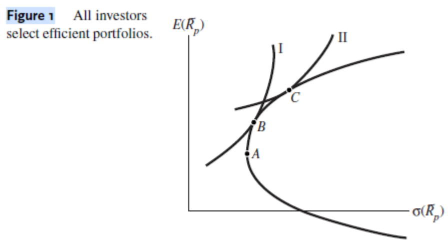


Figure 17.2: Frontera eficiente

Una forma de establecer su eficiencia es argumentar que, debido a que los inversores tienen expectativas homogéneas, todos percibirán el mismo conjunto de oportunidades de varianza mínima. Incluso sin un activo libre de riesgo, todos seleccionarán carteras eficientes independientemente de sus tolerancias al riesgo individuales. Dado que todos los individuos mantienen proporciones positivas de su riqueza en carteras eficientes, entonces la cartera de mercado debe ser eficiente porque (1) el mercado es simplemente la suma de todas las participaciones individuales y (2) todas las participaciones individuales son eficientes.

Volveremos a este punto importante cuando discutamos la crítica de Roll más adelante en el capítulo.

17.1 2 activos: uno riesgoso y otro libre de riesgo

Se va a invertir w_0 en un activo sin riesgo que tiene un rendimiento r_f y $1 - w_0$ en un activo riesgoso que tiene un rendimiento de r_j. Es posible que $w_0 < 0$: sería hacer una venta al descubierto del activo libre de riesgo, y es equivalente a endeudarse para invertir en el activo riesgoso. También es posible que $w_0 > 1$, pero lo importante es que los pesos sumen 1.

La cartera se define

$$r_w \equiv w_0 r_f + (1-w_0) r_j$$

Y de lo que aprendimos en separación de carteras, esto se puede definir de la siguiente manera:

$$r_w = r_f + (1-w_0)(\overbrace{r_j - r_f}^{\substack{\text{rendimiento}\\ \text{en exceso}}})$$

Lo primero que vamos a hacer es obtener la media de esta cartera:

$$\begin{aligned} E[r_w] \equiv & \mu_w \\ = & r_f + (1-w_0)E[r_j - r_f] \\ \equiv & r_f + (1-w_0) z_j \end{aligned}$$

donde $z_j \equiv E[r_j - r_f]$.

Es decir, z_j es la prima de riesgo. Los rendimientos en exceso son $\tilde{z}_j = r_j - r_f$.

Se puede definir $\mu_w - r_f \equiv z_w = (1-w_0) z_j$ la primera de riesgo de la cartera. Esto implica que:

$$\Rightarrow (1-w_0) = \frac{z_w}{z_j}$$

Ahora también se va a calcular la varianza de la cartera:

$$\begin{aligned} Var(r_w) \equiv & \sigma_w^2 \\ = & (1-w_0)^2 \sigma_j^2 \\ (1-w_0)^2 \equiv & \frac{\sigma_w^2}{\sigma_j^2} \\ = & \left[\frac{z_w}{z_j}\right]^2 \end{aligned}$$

Recuerde que $Var(r_f) = 0$ porque justamente es el activo libre de riesgo.

Y a esto se le puede sacar raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} \frac{z_w}{z_j} = & \pm \frac{\sigma_w}{\sigma_j} \\ z_w = & \pm \frac{\overbrace{z_j}^{E[r_j]-r_f}}{\sigma_j} \cdot \sigma_w \\ \frac{z_j}{\sigma_j} \equiv & \frac{E[r_j] - r_f}{\sigma_j} \end{aligned}$$

Observe que lo que se tiene es la razón de Sharpe del activo j. Para un activo libre de riesgo la razón de Sharpe será 0.

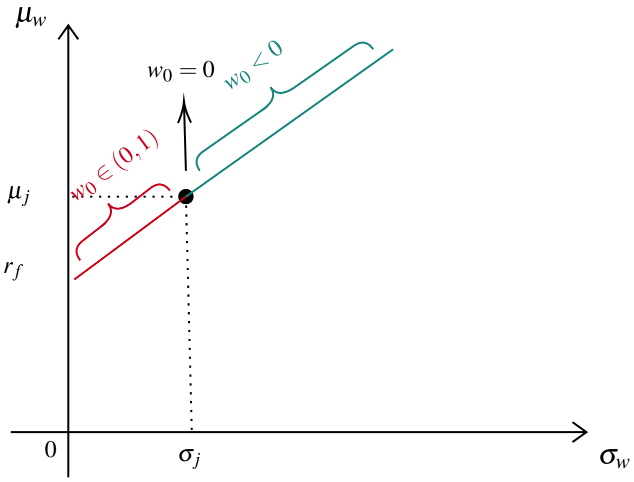
$$SR_j \equiv \frac{\mu_j - r_f}{\sigma_j}$$

$$z_w = \pm SR_j \cdot \sigma_w$$

y esto nos dice que:

$$\mu_w = r_f \pm SR_j \cdot \sigma_w$$

Y si esto se graficara se obtendría que:

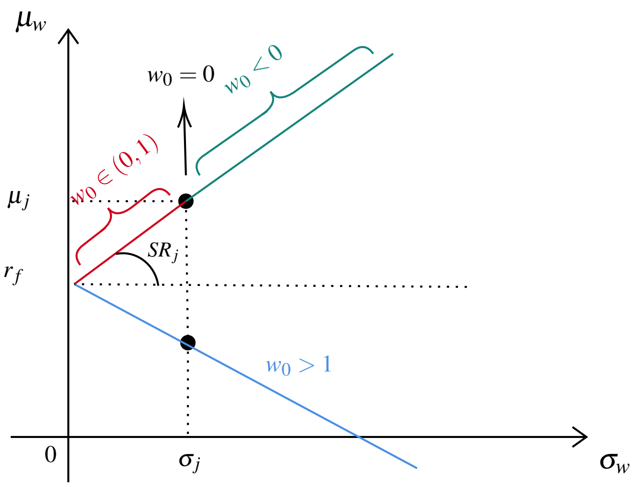


Lo mínimo que se podría obtener de desviación estándar que se podría tener es con el activo libre de riesgo en r_f, o sea que $w_0 = 1$. Luego el activo j tiene un rendimiento r_j y σ_j sería la desviación estándar.

La razón de Sharpe sería la pendiente de la línea que sale de r_f.

Observe que $w_0 > 1$ se puede interpretar, económicamente, como que se está vendiendo al descubierto el activo riesgoso para comprar del activo libre de riesgo. $\rightarrow$ eso más bien es muy riesgoso porque se está vendiendo al descubierto activos riesgosos, lo cual es muy riegoso.

A partir de aquí sale la raíz negativa que habíamos encontrado anteriormente.



Observe que esta zona celeste sería una mala idea: estaría vendiendo al descubierto activos riesgosos y además estaría obteniendo un rendimiento por debajo de r_f.

La línea recta que conecta el activo libre de riesgo y la cartera de mercado es la línea de mercado de capitales. Sabemos que si debe existir un equilibrio de mercado, los precios de todos los activos deben ajustarse hasta que todos sean mantenidos por los inversores. No puede haber exceso de demanda. En otras palabras, los precios deben establecerse de manera que la oferta de todos los activos sea igual a la demanda para mantenerlos.

En consecuencia, en equilibrio la cartera de mercado consistirá en todos los activos comercializables mantenidos en proporción a sus pesos de valor. La percepción de Sharpe y Treynor, que les permitió usar los hechos anteriores para determinar un precio de equilibrio de mercado para el riesgo, fue que en equilibrio la cartera de mercado ya tiene el peso de valor, w_i por ciento, invertido en el activo riesgoso i. Por lo tanto, el porcentaje a en las ecuaciones anteriores es la demanda excedente para un activo riesgoso individual. Pero sabemos que en equilibrio la demanda excedente para cualquier activo debe ser cero. Los precios se ajustarán hasta que todos los activos sean mantenidos por alguien.

La línea de mercado de capitales también es una relación de equilibrio. Dada la eficiencia del mercado, la cartera tangente, M, debe ser la cartera de mercado donde todos los activos se mantienen según sus pesos de valor de mercado.**La Ecuación $E[\tilde{R}_i] = R_f + \left[E[\tilde{R}_m - R_f\right] \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$ es conocida como el modelo de valoración de activos de capital (CAPM). Se muestra gráficamente en la Fig. 17.3, donde también se llama la línea de mercado de valores.**

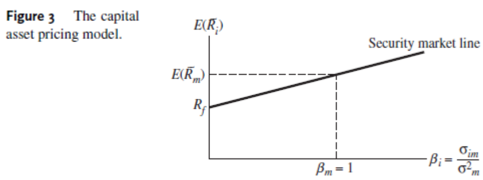
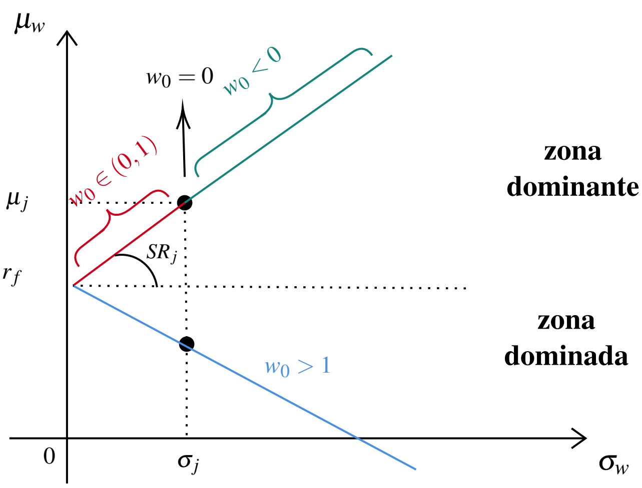


Figure 17.3: Capital Market Line o CAPM de Sharpe

La tasa de rendimiento requerida sobre cualquier activo, $E(R_i)$ en la Ecuación del CAPM, es igual a la tasa de rendimiento libre de riesgo más una prima de riesgo. La prima de riesgo es el precio del riesgo multiplicado por la cantidad de riesgo. En la terminología del CAPM, el precio del riesgo es la pendiente de la línea, la diferencia entre la tasa de rendimiento esperada de la cartera de mercado y la tasa de rendimiento libre de riesgo. La cantidad de riesgo a menudo se llama beta, β_i: $\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\text{COV}(R_i,R_m)}{\text{VAR}(R_m)} \quad (10)$. Es la covarianza entre los rendimientos del activo riesgoso, i, y la cartera de mercado, M, dividida por la varianza de la cartera de mercado.

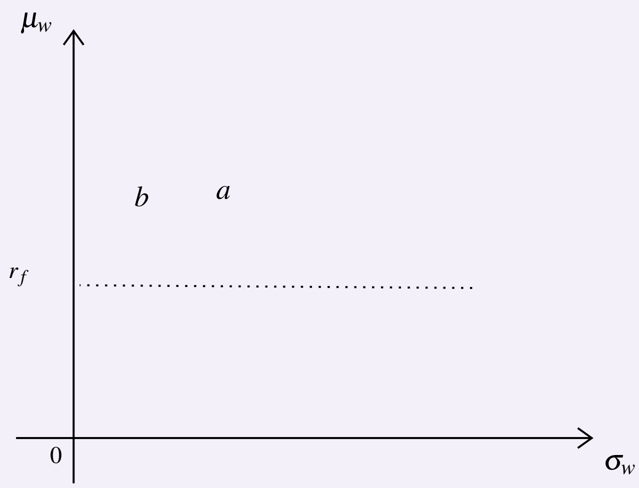
El activo libre de riesgo tiene una beta de cero porque su covarianza con la cartera de mercado es cero. La cartera de mercado tiene una beta de uno porque la covarianza de la cartera de mercado consigo misma es idéntica a la varianza de la cartera de mercado $\beta_m = \frac{\text{COV}(R_i,R_m)}{\text{VAR}(R_m)} = \frac{\text{VAR}(R_m)}{\text{VAR}(R_m)} = 1$.

Así como en la frontera eficiente, aquí también hay una zona dominada (nadie en su sano juicio va a invertir ahí) y dominante (todo el mundo va a estar ahí). La aversión al riesgo es lo que determina si una persona va a estar más cerca o más lejos de la r_f en la zona dominante.

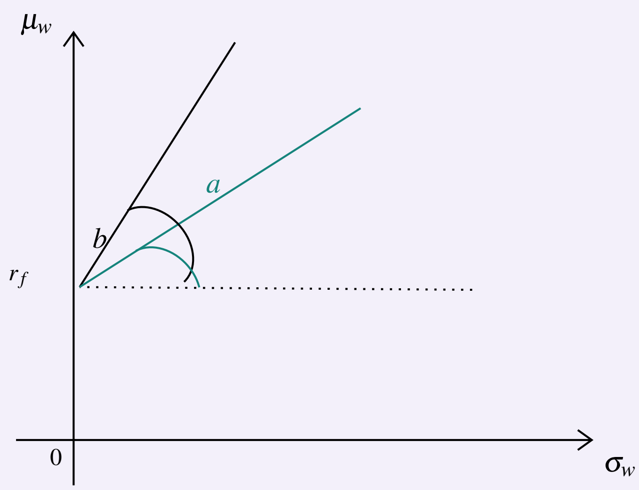


Aquí lo más importante es pensar en el activo riesgoso, pero lo más importante es la razón de Sharpe, porque eso es lo que permite apalancarse.

Ejemplo 17.1 — Comparando dos activos. Observe que, por ejemplo, si tuviera dos activos a, b de la siguiente forma:



Acá el activo b domina a a, pues tienen el mismo rendimiento pero b tiene menos desviación estándar. Pero qué pasaría si más bien fuera así:



La intuición correcta es que hay que fijarse en la pendiente: el que tiene la pendiente más alta es el más atractivo de combinar con el activo libre de riesgo. ■

Este el mismo razonamiento que hay que aplicar cuando se generaliza a n activos: dentro del universo de todos los posibles activos, el más atractivo para combinar es el que tenga la razón de Sharpe más alta.

17.2 $n+1$ activos: n riesgosos y otro libre de riesgo

Se va a invertir w_0 en un activo sin riesgo que tiene un rendimiento r_f y $w \in \mathbb{R}^n$ en un activos riesgosos que tienen rendimientos de $r \in \mathbb{R}^n$. Lo importante es que los pesos sumen 1 $w_0 + \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, y su equivalente en notación matricial es que $w_0 + w'\iota = 1$.

Vamos a suponer que $r \in N(\mu, V)$.

Recuerde que para tener preferencias de media y varianza es suficiente suponer rendimientos elípticos, pero aquí estamos con el caso más conocido que es que la distribución sea normal.

La cartera $r_w = w_0 r_f + \sum_{j=1}^{n} w_j r_j$. El activo sin riesgo tiene cero varianza y cero covarianza con los demás. Eso se puede definir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_w =& r_f + \sum_{j=1}^{n} w_j (r_j - r_f) \\ =& r_f + w'\tilde{z} \end{aligned}$$

donde $r_w - r_f \equiv \tilde{z}_w = w'\tilde{z}$.
Ahora hay que calcular el rendimiento y la desviación estándar de esta cartera:

$$\begin{aligned} z_w \equiv& E[\tilde{z}_w] \\ =& w'z \end{aligned}$$

donde $z \equiv \mu - \imath r_f$ es un vector de primas de riesgo.
¿Cuál sería la varianza de la cartera? $\rightarrow$ r_f no tiene varianza, así que:

$$\sigma_w^2 = w'Vw$$

¿Se podría hacer que la varianza fuera cero? $\rightarrow$ Tendría que hacer dos cosas:
1. Invertir todo en el activo libre de riesgo
2. Que los pesos o el vector de pesos (w) sea 0

Ahora lo que sigue es minimizar la desviación estándar de la cartera.

17.2.1 Minimización de desviación estándar

El problema sería

$$\max -\frac{1}{2} w'Vw \quad \text{tal que } \; zw = w'z$$

Recuerde que aquí el signo de menos se utiliza para que sea una minimización en lugar de una maximización, mientras que el $\frac{1}{2}$ es para cancelar cuando luego en la derivada haya que sacar un dos por las matrices transpuestas.

La restricción aquí es solamente una, mientras que en la frontera eficiente habían dos restricciones; en particular, había una restricción que decía que los pesos debían sumar a 1, pero aquí esta restricción, económicamente, está diciendo que dado un rendimiendo en exceso z_w (es decir, cuánto más quiero en ganancia adicionalmente) cuál es la cartera que minimiza la varianza, por lo que podríamos decir que la otra restricción de la suma de los pesos, ya está incluida de manera implícita.

Entonces el lagrangiano para este problema de optimización sería:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} w'Vw + \lambda \left[w'z - zw \right]$$

Nuevamente, observe que aquí solo está saliendo un λ en lugar de 2. Este multiplicador de Lagrange lo que está diciendo es cuánta varianza estoy sacrificando varianza si pido un poco más de rendimiendo en exceso zw.

Podríamos llamar a esto una tasa de sacrificio entre z_w versus σ_w^2. Es importante ver que este multiplicador es función del rendimiento en exceso $\lambda(z_w)$, por lo que tendrá distintos valores según el rendimiento que se pida.

Y ahora, las condiciones de primer orden serían:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial w} = 0 \Leftrightarrow -Vw + \lambda z &= 0 \\
\Leftrightarrow Vw &= \lambda z \\
\Leftrightarrow w' &= \lambda z' V^{-1}
\end{aligned}
$$

Y con esto, lo que vamos a hacer es definir lo siguiente:

- Una cartera q cuya característica va a ser que $w_0 = 0$. Esto está diciendo que lo especial de la cartera q es que no tendrá del activo libre de riesgo y es una cartera puramente riesgosa. Esto lo que implica es que $w'\iota = 1$.
  Esta cartera va a generar una prima de riesgo z_q y λ_q específicos.

$$
\begin{aligned}
w'_q &= \lambda_q z' V^{-1} \\
w'_q \iota &= \lambda_q z' V^{-1} \iota \\
&= 1
\end{aligned}
$$

  De aquí se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\lambda_q &= \frac{1}{z' V^{-1} \iota} \\
&\equiv \frac{1}{G} \\
G &\equiv z' V^{-1} \iota
\end{aligned}
$$

  Observe que esta letra G se parece a la letra A en la frontera eficiente.
  Estábamos haciendo una minimización de la varianza de la cartera sujeto a obtener una cierta primea; λ_q me dice el costo de esa restricción. $\rightarrow$ Conforme tengo más activos ese costo baja, entonces G sube.

$$
\begin{aligned}
w_q &= \lambda_q V^{-1} z \\
&= \frac{V^{-1} z}{z' V^{1} \iota}
\end{aligned}
$$

  Ahora hay que sacar la media de esta cartera:

$$
\begin{aligned}
z_q &\equiv z' w_q \\
&= \frac{z' V^{-1}}{z' V^{-1} \iota} \\
&\equiv \frac{H}{G}
\end{aligned}
$$

  Observe que esta letra H se parece a la letra B en la frontera eficiente.
  También note que la razón de Sharpe de esta cartera es $\sqrt{H}$ y esto siempre tiene que ser positivo $\rightarrow$ si el número de activos sube, H sube porque se puede conseguir una mejor relación de rendimiento y riesgo.

Y la varianza de la cartera q se saca de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sigma_q^2 =& w_q' V w_q \\
=& \frac{1}{G^2} z' V^{-1} V V^{-1} z \\
=& \left(\frac{z'V^{-1}}{G}\right) V \left(\frac{V^{-1}z}{G}\right) \\
=& \frac{z'V^{-1}z}{G^2} \\
=& \frac{H}{G^2}
\end{aligned}$$

Ahora, para ver la intuición económica de esto, vamos a empezar por obtener la razón de Sharpe de este activo:

$$\begin{aligned}
SR_q =& \frac{\mu_q - r_f}{\sigma_q} = \qquad \frac{z_q}{\sigma_q} \\
=& \frac{\frac{H}{G}}{\frac{\sqrt{H}}{G}} \\
=& \sqrt{H} \\
SR_q^2 =& H
\end{aligned}$$

La interpretación económica de H es que es la razón de Sharpe al cuadrado.

Es importante interiorizar qué es lo que dice la razón de Sharpe.

Y con respecto a λ_q:

$$\begin{aligned}
\lambda_q =& \frac{\sigma_q^2}{z_q} \\
=& \frac{\frac{H}{G^2}}{\frac{H}{G}} \\
=& \frac{1}{G} \\
G =& \frac{1}{\lambda_q}
\end{aligned}$$

G es un coeficiente de dispersión.

17.2.2 Covarianzas

Ahora vamos a ver covarianzas. Vamos a ver la cartera q pero en términos de varianza y prima de riesgo:

$$w_q = \frac{\sigma_q^2}{z_q} \cdot V^{-1} z$$

La idea es que vamos a calcular la covarianza entre z_q y z_j, donde esta otra z_j es una cartera arbitraria (es decir, puede o no estar en la frontera eficiente) y tiene unos pesos $w_j :\ n \times 1$ donde $w_j \iota' = 1$ y $w_j' z \equiv z_j$.

La covarianza sería entonces

$$
\begin{aligned}
Cov(z_q, z_j) =& w_j' V w_q \\
=& \left(\frac{\sigma_q^2}{z_q}\right) w_j' V V^{-1} z \\
=& \left(\frac{\sigma_q^2}{z_q}\right) w_j' z \\
=& \left(\frac{\sigma_q^2}{z_q}\right) z_j
\end{aligned}
$$

Y ahora quisiéramos despejar z_j:

$$
z_j = \underbrace{\frac{Cov(z_q, z_j)}{\sigma_q^2}}_{\beta} \cdot z_q
$$

donde $z_j \equiv E[r_j] - r_f$ y $z_q \equiv E[r_q] - r_f$. Por lo tanto, esto se puede reescribir:

$$
\begin{aligned}
E[r_j] - r_f =& \beta_j [E[r_q - r_f] \\
E[r_j] =& r_f + \beta_j [E[r_q - r_f]
\end{aligned}
$$

Y esto último se llama el *Security Market Line (SML)*.

Ahora, la idea es identificar la cartera q con argumentos económicos para saber cuál es: primero de manera gráfica y luego por una cuestión de oferta y demanda, vamos a ver a qué tiene que ser igual.

Ideas importantes de la cartera q:
- Es una cartera que es tangente de la línea que sale de r_f.
- Hay *Money separation*. *Money separation* significa que una parte de los ahorros se dedicaba a comprar activos riesgosos y otra al activo libre de riesgo. Pero aquí, la cartera riesgosa es la misma para todos: q. Lo que va a pasar es que compran más o menos q o más o menos del activo libre de riesgo, pero la idea es que comprarán de estos dos.
- A la cartera q también se le llama *ex-post* eficiente. Luego vamos a ver por qué se le llama así.

Ahora sigue ver cómo poder identficar a esta cartera q.

17.3 Identificación cartera q

El proceso de identificación de la cartera q es simplemente un razonamiento de oferta y demanda: hay una demanda agregada de todos los hogares del mundo y hay que igualarlo a la oferta total. ¿Cuál es la oferta total? $\rightarrow$ la capitalización total de mercado de todos los activos.

Se quiere encontrar una cartera $w_0 \neq 0$ (se está pidiendo prestado o vendiendo al descubierto) entonces se genera que $w'\iota \neq 1$. Habíamos visto que la cartera que resolvía la minimización es igual a $w = \lambda_w V^{-1} z$. Esto significa que $w' = \lambda_w z' V^{-1}$.

Recuerde que el multiplidador de lagrange es función del rendimiento en exceso $\lambda(z_w)$ entonces cambia conforme cambien las condiciones, por lo que $\lambda_w \neq \lambda_q$.

Así entonces:

$$
\begin{aligned}
z_w &= w'z \\
&= \lambda_w \underbrace{z'V^{-1}z}_{H} \\
&= \lambda_w \cdot H
\end{aligned}
$$

Es decir, que la media tiene que ver con H. Ahora se quiere calcular la varianza de esta cartera:

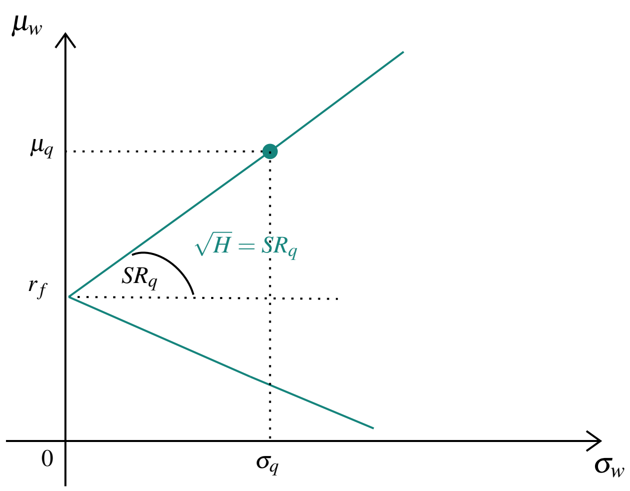
$$
\begin{aligned}
\sigma_w^2 &= \\
&= w'V^{-1}w \\
&= \left(\lambda_w^2\right) z'V^{-1}VV^{-1}z \\
&= \left(\lambda_w^2\right) z'V^{-1}z \\
&= \lambda_w^2 \cdot H
\end{aligned}
$$

Y la razón de Sharpe es:

$$
\begin{aligned}
SR_w &= \frac{z_w}{\sigma_w} \\
&= \frac{\lambda_w \cdot H}{\lambda_w \cdot \sqrt{H}} \\
&= \sqrt{H}
\end{aligned}
$$

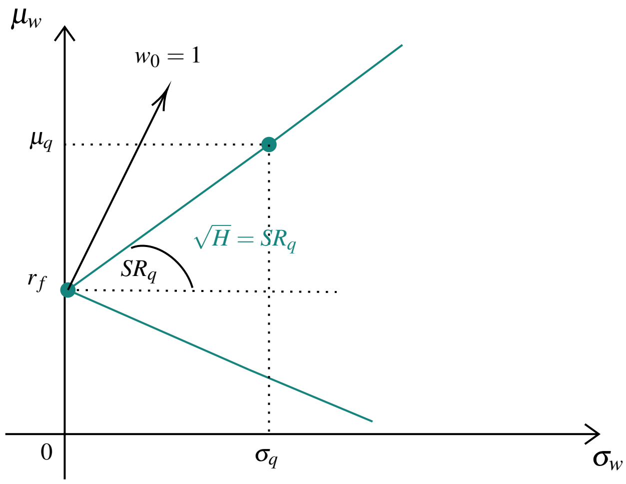
Recuerde que la razón de Sharpe de la cartera q era $SR_q = \sqrt{H}$.

Entonces lo que estamos viendo es que la razón de Sharpe de cualquier otra cartera, tiene la misma razón de Sharpe de q, entonces lo que está diciendo es que $\mu_w = r_f \pm \sqrt{H} \cdot \sigma_w$.

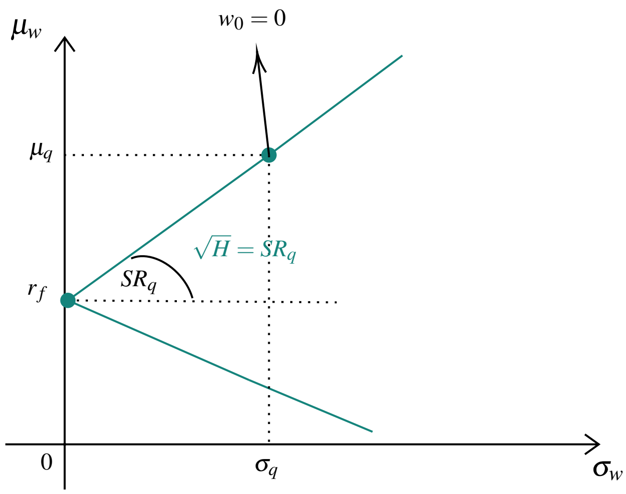


Y a partir de aquí, podemos identificar los siguientes puntos:

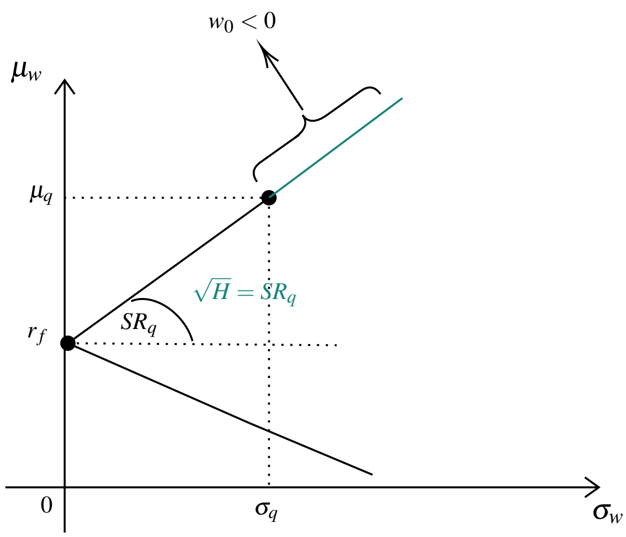
- Para tener cero riesgo: $w_0 = 1$


μ_w
$w_0 = 1$
μ_q
$\sqrt{H} = SR_q$
SR_q
r_f
0
σ_q
σ_w

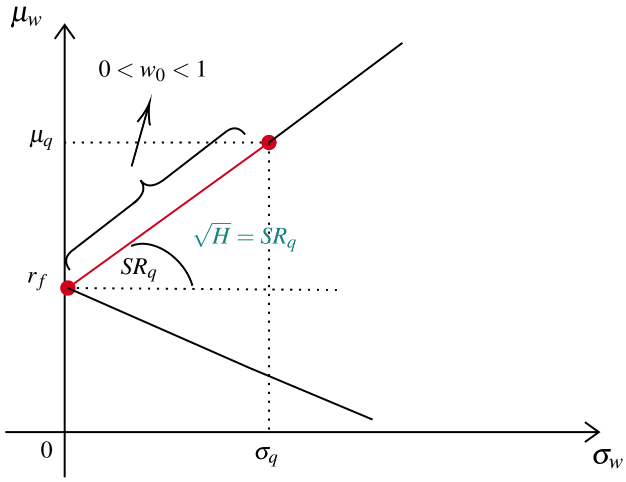
- $w_0 = 0$


$w_0 = 0$
μ_w
μ_q
$\sqrt{H} = SR_q$
SR_q
r_f
0
σ_q
σ_w

- $w_0 < 0$

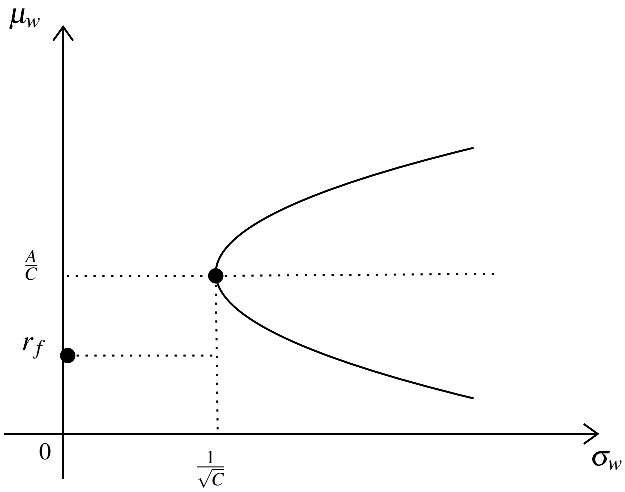

$w_0 < 0$
μ_w
μ_q
$\sqrt{H} = SR_q$
SR_q
r_f
0
σ_q
σ_w

- $0 < w_0 < 1$

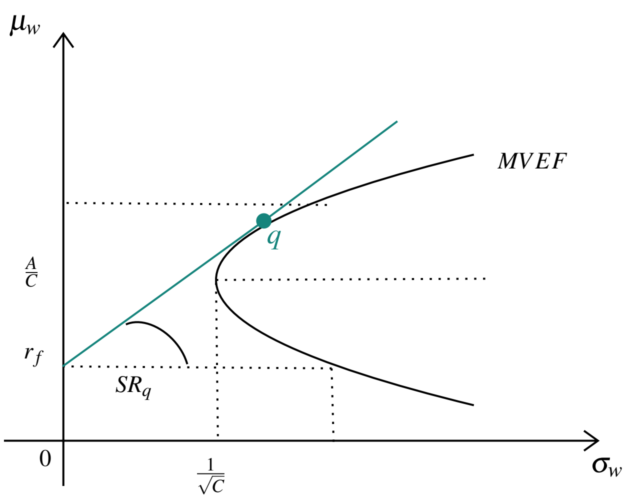


Esto se parece mucho a cuando inicialmente veíamos solamente dos activos: que se combinaba uno y otro.

Antes, se tenía una frontera eficiente de la siguiente forma:



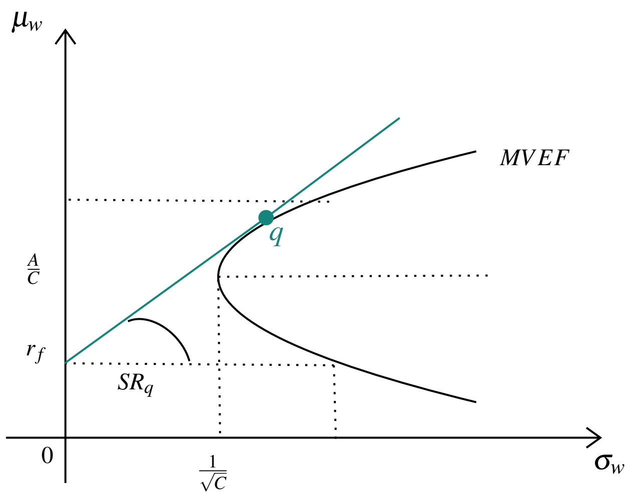
Entonces, ¿cuál de estos puntos de la frontera eficiente me gustaría usar para apalancarme? → la idea es llegar a la razón de Sharpe más alta, entonces voy a buscar el punto de mayor pendiente que sea tangente a la frontera eficiente.



Entonces, q sería justamente la cartera dentro de la frontera eficiente que tenga la razón de Sharpe más alta.

Queda pendiente por ver que, por oferta y demanda, q va a ser igual al mercado.

Entonces, como repaso: se había encontrado que gráficamente:



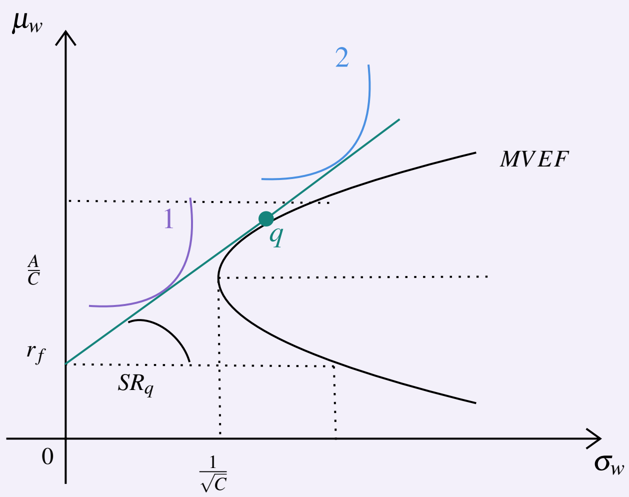
La cartera q es la que tiene la razón de Sharpe más alta (es decir, la pendiente más grande). Además, esta cartera tiene unos pesos w_q que tenían la particularidad de que $w_q'\iota = 1$: está conformada solamente por activos riesgosos.

Luego, la covarianza entre una cartera q y otra j $Cov(r_q, r_j) \Rightarrow E[r_j] = r_f + \beta_j E[r_q - r_p]$. Pero lo que sigue es un proceso de identificación para hallar esa cartera q.

Lo que vamos a ver es que q es un índice de mercado ponderado por capitalización de mercado.

Lo primero que hay que hacer es demostrar que hay separabilidad en dos fondos: la idea de separabilidad en carteras era que todo mundo iba a invertir en dos activos: en un activo libre de riesgo y la cartera q, no le va a importar ninguna otra cartera. Lo que sí va a cambiar de persona a persona es cuánto dedica o invierte en cada una.

Ejemplo 17.2 — Dos tipos de personas. Así por ejemplo, se podrían tener dos personas distintas $1, 2$:



Aquí la diferencia es que la persona 1 es más aversa al riesgo que la persona 2. La persona 1 combina activo sin riesgo con activos riesgosos (una parte de q). La persona 2 vende al descubierto del activo libre de riesgo para financiar la compra de activos riesgosos (de la carta q). ■

Entonces, la idea es que todas las personas compran más o menos de q y de r_f.

Hay que establecer ciertos conceptos de oferta y demanda. Primero, con respecto a la demanda de activos riesgosos, se tiene:

$$\begin{aligned} A_i &= \text{ahorro total agente i} \\ (1-w_{i0})A_i &= \text{ahorro en q} \end{aligned}$$

Habíamos visto que es posible que $w_{i0} > 1$ (la persona pide prestado para invertir más en el activo riesgoso). Pero $w_{i0} < 1$ forma parte de la zona dominanda: un agente racional no lo haría aunque sí lo puede hacer (sería vender al descubierto de q para comprar del activo libre de riesgo).

Ahora, generalizando esto para todos los agentes:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{I}(1-w_{i0})A_i}_{\substack{\text{demanda total}\\ \text{activos riesgosos}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{J} MVE_j}_{\substack{\text{oferta total}\\ \text{activos riesgosos}}}$$

La oferta es igual a la capitalización de todos los activos.

El MVE es el *market cap*. La demanda agregada tiene que ser igual al *market cap*.

17.3.1 Identificación w_q

Cuando invierto en activos riesgosos, estoy invirtiendo en la cartera q. Vamos a ver qué características tiene esta cartera q.

Mi demanda es $(1-w_{i0})A_i \cdot w_q = d_i$. Esta demanda tiene una dimensión $n \times 1$: es el número de activos riesgosos. La demanda total sería:

$$\begin{aligned} d = &\sum_{i=1}^{I}(1-w_{i0})A_i \cdot w_q = w_q \sum_{i=1}^{I}(1-w_{i0})A_i \\ =&w_q \sum_{j=1}^{n} MVE_j \\ =&\begin{bmatrix} MVE_1 \\ MVE_2 \\ \vdots \\ MVE_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, despejando:

$$\begin{aligned} w_q =& \begin{bmatrix} \frac{MVE_1}{\sum MVE} \\ \frac{MVE_2}{\sum MVE} \\ \vdots \\ \frac{MVE_n}{\sum MVE} \end{bmatrix} \\ =&w_m \\ q =&m \end{aligned}$$

Este vector es un índice ponderado por la capitalización de mercado: lo que se está diciendo es que $q = m$ donde m sería un índice como el S&P 500 o el CRSP y esto ya permite trabajar empíricamente.

Por eso era importante ver los índices de capitalización de mercado: según esta teoría ese índice *value-weighted* va a ser el que tiene la razón de Sharpe más alta.

Recuerde que los dos principales tipos de fondos eran:

- Indexados: el costo de mantenerlos era muy barato.
- Activamente manejados: los que contrataban MBA's de Harvard.

Cuando esta teoría salió en 1964 les parecía mediocre lo que decía esta teoría puesto que apoyaba a los índices indexados. Los fondos de inversión indexados son una buena inversión (bastante buena).

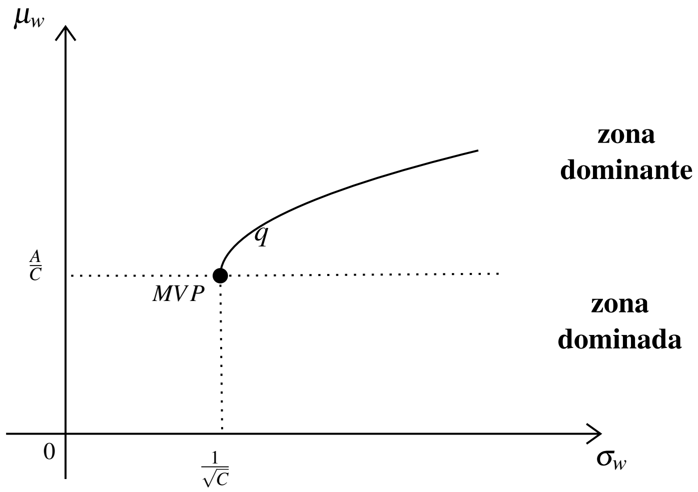
Entonces lo que dice el CAPM de Sharpe es que el rendimiento esperado $E[r_j]$ es igual a $E[\tilde{r}_j] = r_f + \beta_j \left[E[\tilde{r}_m] - r_f\right]$ donde el mercado es un índice *value-weighted*. $\rightarrow$ esta ecuación se llama el *Security Market Line*.

Un *test t* se usa para la significancia de una sola variable. Para un *test F* se usa para varias restricciones.

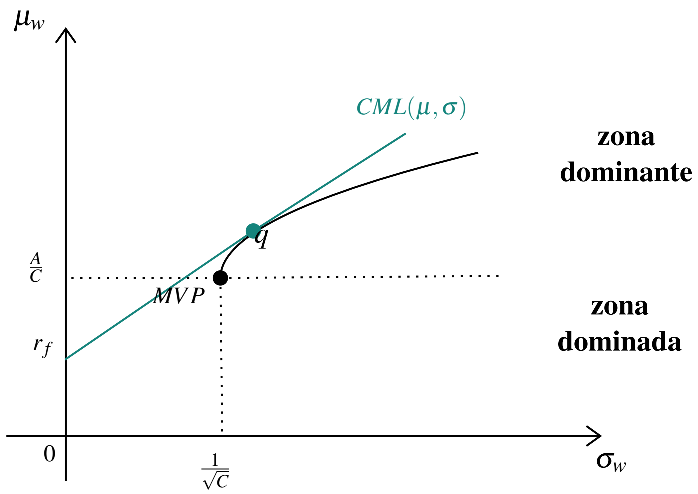
17.3.2 Resumen de resultados

A continuación un resumen de los resultados importantes que hemos encontrado hasta ahora:

1. El primer resultado es que pudimos encontrar la frontera eficiente. Encontramos la cartera de mínima varianza, así como la zona dominada y la zona dominante.



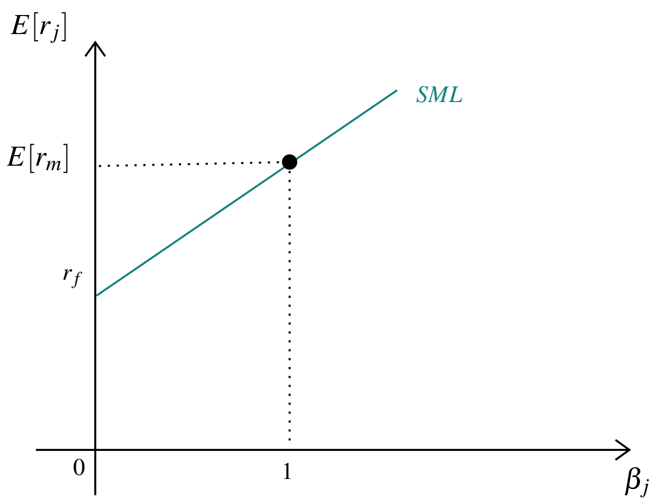
Luego, encontramos el *Capital Market Line (CML)* que está en función de la media y la desviación estándar:



2. Encontramos, por razonamiento económico de oferta y demanda, que $q = m$. Hay separabilidad en dos carteras: la cartera libre de riesgo y la cartera q (activos riesgosos)
3. **Finalmente, el CAPM, usando la identificación $q = m$, dice que el rendimiento de un activo es igual a la tasa libre de riesgo más β por el valor esperado del rendimiento del exceso:**

$$E[r_j] = r_f + \beta_J E[r_m - r_f]$$

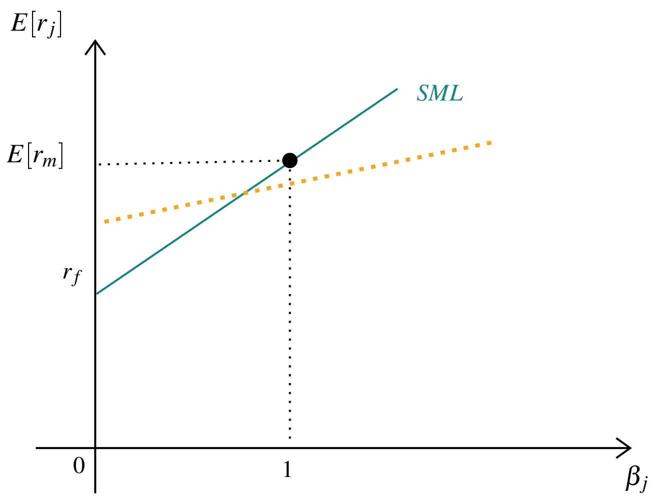
donde $\beta_j \equiv \frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)}$.
El resultado de esta ecuación se llama el *Security Market Line (SML)* y gráficamente es una relación entre el rendimiento esperado y el β_j:



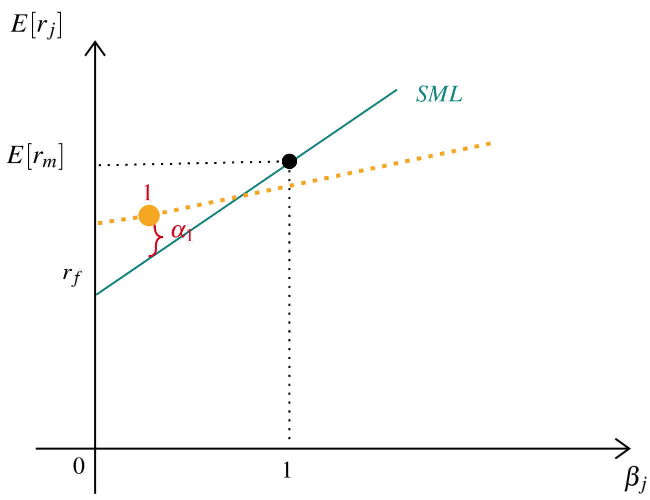
Cuando:
- $\beta_j = 0$ el activo va a rendir r_f
- $\beta_j = 1$ el activo va a rendir como el mercado $E[r_m]$

De ahí sale el trazo del SML.

Lo que me dice el SML es: dado el β_j que tenga una empresa (es decir, su covarianza con el mercado), entonces tiene que tener tal rendimiento.
Un paper encontró que a partir de esto que encontramos, se veía una línea como la que vemos a continuación:



O sea, que la pendiente real es menor a la pendiente teórica. Sin embargo, hay una interpretación para estas diferencias. Por ejemplo, la cartera 1 tiene esta diferencia:



Esa diferencia entre lo real y lo esperado se llama α_j. Entonces la cartera 1 tiene un $\alpha_1 > 0$. Observe que las empresas que tienen $\beta_j < 1$ tienen un $\alpha > 0$, pero las que $\beta_j > 1$ tienen un $\alpha < 0$. Esto es una anomalía con respecto a lo que teóricamente dice el CAPM que debería suceder.
Entonces el CAPM no es una cosa perfecta, pero sí es una aproximación a los datos reales.

17.4 Implementación empírica del CAPM

La idea sería correr la siguiente regresión:

$$z_{jt} = \alpha_j + \beta_j z_{mt} + \varepsilon_{jt}$$

donde $z_{jt} = r_{jt} - r_{ft}$ y $z_{mt} = r_{mt} - r_{ft}$.

Vea que entonces hay que usar un índice de mercado ponderado por capitalización.

A esto se le llama modelo de mercado. Es un modelo general que fue descubierto antes del CAPM. Siguiendo al CAPM de Sharpe debería ser que $\alpha_j = 0$ (es decir, esto es lo que el CAPM de Sharpe le impondría al modelo de mercado).

El CAPM de Sharpe le dice a uno que $\alpha_j = 0$.

Si se saca la varianza del rendimiento:

$$\underbrace{\sigma_j^2}_{\substack{\text{riesgo}\\ \text{total}}} = \underbrace{\beta_j^2 \sigma_m^2}_{\substack{\text{riesgo}\\ \text{de mercado}}} + \underbrace{\sigma_{\varepsilon_j}^2}_{\substack{\text{riesgo}\\ \text{idiosincrático}}}$$

Esta expresión anterior es el riesgo total del activo y tiene dos componentes:
- Riesgo de mercado
- Riesgo idiosincrático

En cuanto a ε_{jt} uno podría suponer que es idéntica e independientemente distribuido en el tiempo. Aquí, siguiendo el tema de la caminata aleatoria, no habría autocorrelación o habría muy poca.

Ahora, en el tiempo, no es realista suponer que tenga la misma volatilidad en el tiempo. Así que esto ha sido criticado.

Recuerde que en econometría R^2 es el coeficiente de determinación: nos dice cuánta de la variabilidad de la variable dependiente, es explicada por las variables independientes. En otras palabras, *qué tan bueno es nuestro modelo explicando'*.

Entonces, en econometría normalmente queremos un modelo con un alto R^2, sin embargo, en el contexto aquí empleado más bien es deseable un R^2 bajo. ¿Por qué? $\rightarrow$ Porque aquí es qué parte de la volatilidad está explicada por el modelo.

Al riesgo de mercado también se le llama riesgo sistemático (o riesgo diversificable) y el riesgo idiosincrático se suele conocer como riesgo no sistemático (o riesgo no diversificable).

Ejemplo 17.3 — Haciendo dieta. Hay dos propuestas de dietas:

- Comer 1kg de lechuga
- Comer 1kg de chocolate

Pero lo realmente interesante no es el peso, sino las calorías: las calorías son una unidad de energía para aumentar un gramo de agua a un grado centígrado.

Un kilo de lechuga tiene 30 calorías pero un kilo de chocolate tiene 5500 calorías. 7700 calorías equivalen a subir 1 kilo de peso para siempre.

Entonces, hay peso que es posible reducir y otro peso que no es posible reducir. Entonces, si uno se comiera un kilo de lechuga y se suben 0.0039 kilos de peso irreducible, pero un kilo de chocolate sube 0.7143 kilos.

En cambio la lechuga es casi todo peso saluble (agua) 0.9961 mientras que el chocolate tiene 0.2857 de peso saluble.

El peso saluble no importa porque ese se pierde, lo que importa es el que no se puede perder.

■

Así las cosas, el riesgo idiosincrático es diversificable: si diversifico una cartera lo suficiente lo pierdo. Pero el riesgo no diversificable es el que, sin importar cuánto diversifique la cartera, no lo puedo perder, entonces el riesgo interesante o importante es el no diversificable.

Ejemplo 17.4 — Dos empresas riesgosas. Suponga que usted tiene las siguientes dos empresas que descomponen su riesgo de la siguiente manera:

	Riesgo no diversificable	**Riesgo diversificable**
AAPL	20%	80%
JPM	70%	30%

Aquí en este caso la empresa JPM es más riesgosa $\rightarrow$ porque en Apple, gran parte de su riesgo (80%) lo puedo 'eliminar' diversificando mi cartera, pero en JPM, no importa cuánto diversifique la cartera, siempre habrá un 70% del riesgo que no podré controlar o disminuir.

Apple es como la lechuga y JPM como el chocolate.

■

Observe que entonces el riesgo diversificable 'no se le cobra' a las empresas porque puede ser perdido fácilmente mediante diversificación.

Observe que entonces, si se tuviera $R^2 = 0.18$ esto significa:

$$\begin{aligned} R^2 &= 0.18 \\ &= \frac{\beta_j^2 \sigma_m^2}{\sigma_j^2} \end{aligned}$$

Entonces R^2 podríamos decir que es la parte del riesgo total que no es diversificable. En consecuencia, tener un R^2 bajo es bueno, porque indica que hay una menor parte del riesgo que no es diversificable, y el resto sí se podría diversificar.

18. CAPM de Black

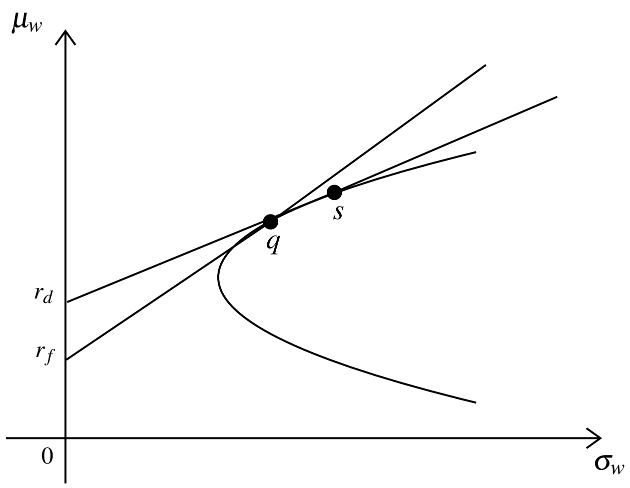
Vamos a ver la primera alteración del CAPM. La justificación para haber hecho esta modificación 7 años después del CAPM de Sharpe se puede dividir en dos:

1. Una primera justificación es empírica: el SML se encuentra que existe una menor pendiente e intercepto que el propuesto por Sharpe. Había $\alpha_j < 0$ cuando $\beta_j > 1$ y $\alpha_j > 0$ cuando $\beta_j < 1$.

   Es decir, que el aspecto empírico es que no estaba funcionando el CAPM de Sharpe, dado que justamente surgió una estrategia de inversión en fondos de acuerdo a sus β's.

2. La otra motivación es que Sharpe hizo el supuesto que $r_f = r_d$. Pero en la realidad esto es poco realista: usualmente cobran una tasa de interés mayor sobre los préstamos que pido que lo que paga un bono del Tesoro de Estados Unidos.

   Esto genera una serie de resultados diferentes a la hora de ver el CML: esto era cuando tenía en el eje y tenía el rendimiento y en el eje x tenía la media.



Cuando $r_d \neq r_f$:

Partiendo de r_f (punto p), se puede trazar una línea encontrando un punto que sea tangente con la frontera eficiente: esa tangencia sería la cartera q. Cuando yo presto puedo ubicarme entre p y q. Pero luego, partiendo de r_d, puedo trazar otra línea con tangencia en la cartera s: esto hace que nazcan zonas de inversión.

Vamos a analizar estas tres zonas de inversión.

18.1 Geometría de la frontera eficiente

Cuando una cartera está en la frontera eficiente, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma_j^2 =& w_j' V w_j \\ =& \frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)^2\end{aligned}$$

Y esto implica que:

$$\frac{1}{C} = \sigma_j^2 - \frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)^2$$

Para entender bien la geometría de la frontera eficiente, también es importante calcular las pendientes entre la media y la desviación estándar:

$$\Psi =\sigma_j^2 - \frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)^2 \equiv 0$$

Esta función me explica la varianza en términos de la media.

La derivada de esto se obtiene a continuación, y usando el teorema de la derivada implícita:

$$\begin{aligned}d\Psi = \Psi_\sigma \, d\sigma + \Psi_m u \, d\mu =& 0 \\ \frac{d\mu}{d\sigma} =& -\frac{\Psi_\sigma}{\Psi_\mu}\end{aligned}$$

Este es el teorema de la función implícita.

Y entonces podemos obtener:

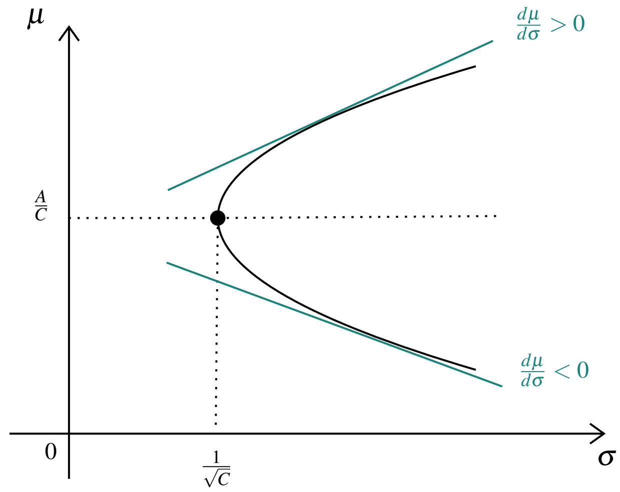
$$\begin{aligned}\Psi_\sigma =& 2\sigma_j \\ \Psi_\mu =& -2\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)\end{aligned}$$

Entonces la pendiente de la frontera eficiente es:

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{\sigma_j}{\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)}$$

Entonces vamos a analizar:

- $\mu_j > \frac{A}{C}$: para este caso la pendiente sería positiva
- $\mu_j < \frac{A}{C}$: para este caso la pendiente sería negativa



- $\mu_j = \frac{A}{C}$: para este caso la pendiente sería infinito. Más que la interpretación geométrica interesa la interpretación económica: lo que pasa es que estando en este punto, si se aceptara un poquito de riesgo, el rendimiento aumentaría en infinito $\rightarrow$ esto sería para personas totalmente aversas al riesgo

Ahora vamos a ver las covarianzas entre dos carteras

18.2 Covarianzas $w_i, w_j \in MVEF$

La pregunta es: ¿cuál sería la covarianza entre dos carteras que están en la frontera eficiente?

$$
\begin{aligned}
Cov(r_i, r_j) &= w_j' V w_i \\
&= \frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left(\mu_i - \frac{A}{C}\right)\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)
\end{aligned}
$$

Esto tiene sentido porque la varianza de una acción es la covarianza consigo misma.

La cartera de mínimima varianza es un caso especial:

$$
Cov(r_{MVP}, r_j) = \frac{1}{C} > 0
$$

Es decir, que la cartera de mínima varianza siempre tendrá una covarianza de $\frac{1}{C}$ con cualquier otra cartera que esté en la frontera eficiente.

Ahora, considere cualquier cartera $w_j \in MVEF$ (excepto la cartera de mínima varianza): ¿existe una cartera w_{cj} tal que $Cov(r_{cj}, r_j) = 0$? $\rightarrow$ Para ver si existe, sigamos la fórmula recién descubierta:

$$
\begin{aligned}
Cov(r_{cj}, r_j) &= 0 \\
\frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left(\mu_{cj} - \frac{A}{C}\right)\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Y entonces lo que quisiéramos es despejar μ_{cj} para ver cuál tendría que ser la media de la cartera con cero covarianza.

$$
\mu_{cj} = \frac{A}{C} - \frac{\frac{1}{C}}{\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)}
$$

Esta ecuación nos dice cómo encontrar esa cartera que tendría cero covarianza. Entonces ya tenemos esta cartera que tiene dos particularidades: 1. está en la frontera eficiente y 2. tiene cero covarianza con la cartera w_j.

Nuevamente, como hicimos anteriormente, consideremos los posibles casos:

- $\mu_j > \frac{A}{C}$: para este caso el segundo término sería negativo y por lo tanto $\mu_{cj} < \frac{A}{C}$
- $\mu_j < \frac{A}{C}$: para este caso el segundo término sería positivo y por lo tanto $\mu_{cj} > \frac{A}{C}$

Luego, como la cartera está en la frontera eficiente se puede escribir:

$$w_{cj} = g = h\mu_{cj}$$

Esto implica que si tengo la media de la cartera, se pueden encontrar los pesos de esa cartera.

Ahora, lo que se quiere es encontrar gráficamente a esta cartera.

cj es como el gemelo malo de la cartera j.

18.2.1 Análisis gráfico w_{cj}

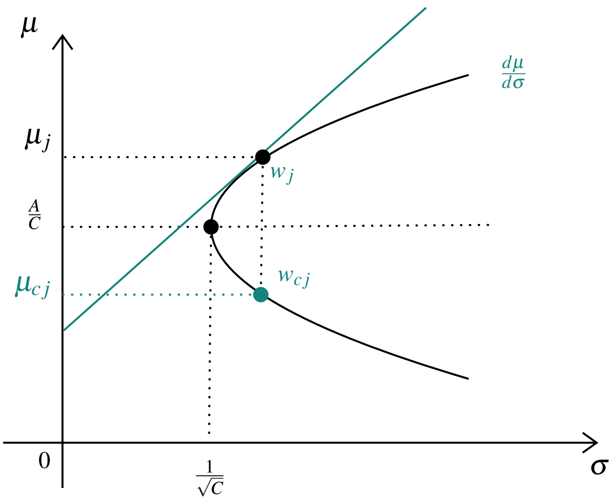
Habíamos visto que

$$\mu_{cj} = \frac{A}{C} - \frac{\frac{1}{C}}{\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)}$$

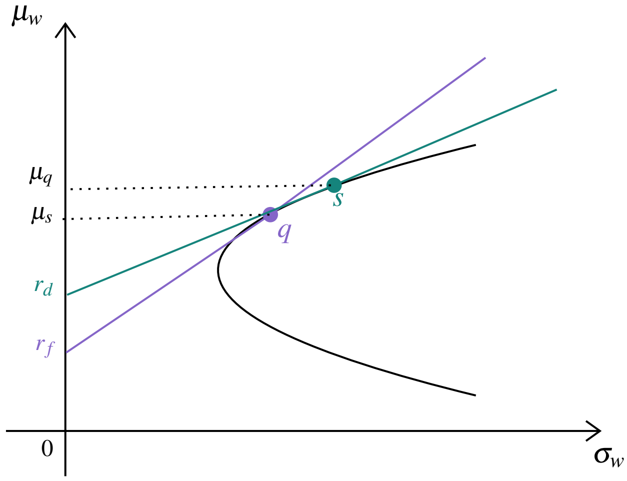
Y los que vamos a hacer es evaluar en ese $\frac{1}{C}$:

$$\begin{aligned}
\mu_{cj} =& \frac{A}{C} - \frac{\left[\sigma_j^2 - \frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)^2\right]}{\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)} \\
=& \frac{A}{C} + \left(\mu_j - \frac{A}{C}\right) - \frac{\sigma_j^2}{\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)} \\
=& \mu_j - \underbrace{\frac{\sigma_j}{\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)}}_{\text{pendiente}} \cdot \sigma_j \\
=& \mu_j - \frac{d\mu}{d\sigma}| \cdot \sigma_j
\end{aligned}$$

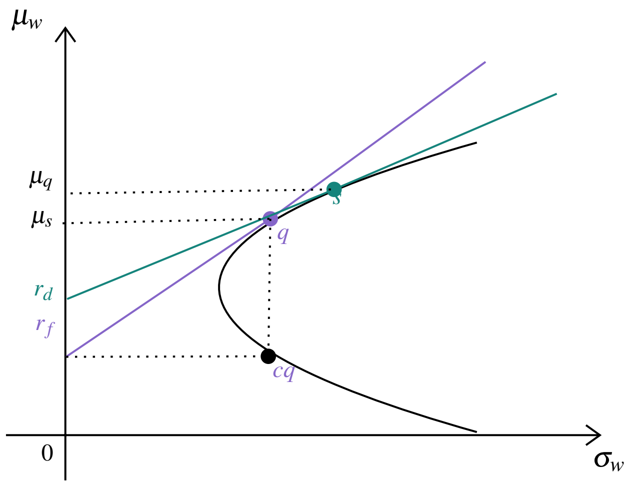
Y con esto estamos casi listos para encontrar al gemelo malo:



Ahora viene la parte económicamente importante: habíamos visto dos carteras que surgían de pedir prestado o de prestar (cartera q y s):



Y a partir de aquí, podemos ver las medias de los gemelos malos para q y s:



Y a partir de esto podemos ver que:

$$\mu_{cq} = r_f$$
$$\mu_{cs} = r_d$$

De momento no hemos visto para qué sirve esto, sino solamente ciertas características de la frontera eficiente así como la existencia de los 'gemelos malos'.

18.3 Ecuación cero-beta

La cartera de mercado está en la frontera eficiente $w_m \in MVEF$ y su media está entre $\mu_m \in [\mu_q, \mu_s]$, y al estar en la frontera eficiente, se puede escribir de la siguiente manera:

$$w_m = g + h\mu_m \; Spanning$$
$$w_m = \lambda_1 V^{-1}\mu + \lambda_2 V^{-1}\iota \text{ lagrangiano}$$
$$w\prime_m = \lambda_1 \mu\prime V^{-1} + \lambda_2 \iota\prime V^{-1}$$

Y los multiplicadores de lagrange eran:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 =& \frac{C\mu_m - A}{D} = \frac{C}{D}\left(\mu_m - \frac{A}{C}\right) > 0 \\
\lambda_2 =& \frac{B - A\mu_m}{D} < 0
\end{aligned}
$$

Recuerde que el multiplicador λ_1 sí tiene interpretación económica: tiene que ser positivo y tiene que ver con qué pasa a la desviación estándar si pido una media más alta.

Por el contrario, λ_2 no tiene sentido económico pero sí tiene relevancia geométrica.

Ahora considere una cartera j arbitraria (puede o no estar en la frontera eficiente). La covarianza entre esta cartera con la cartera de mercado sería:

$$
\begin{aligned}
Cov(r_j, r_m) =& w'_m V w_j \\
=& \left[\lambda_1 \mu' V^{-1} + \lambda_2 \iota' V^{-1}\right] V w_j \\
=& \lambda_1 \mu' w_j + \lambda_2 \iota' w_j
\end{aligned}
$$

Ahora la idea es desarrollar una expresión para el CAPM (donde el CAPM era una media en base a varias cosas). Entonces el plan es despejar μ_j:

$$
\begin{aligned}
\mu_j =& \frac{Cov(r_j, r_m)}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\
=& \frac{Cov(r_j, r_m)}{Var(r_m)} \cdot \frac{\sigma_m^2}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\
=& -\underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_{1} + \beta_j \cdot \underbrace{\frac{\sigma_m^2}{\lambda_1}}_{2}
\end{aligned}
$$

Entonces, se busca expresar estos lagrangianos en términos de números de que ya se conozcan; es decir, vamos a calcular 1 y 2.

18.3.1 Cálculo cero-beta

Entonces tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} =& \frac{A\mu_m - B}{C\mu_m - A} \\
=& \frac{A\mu_m - \frac{A}{C}}{C\left[\mu_m - \frac{A}{C}\right]} - \frac{\frac{D}{C}}{C\left[\mu_m - \frac{A}{C}\right]} \\
=& \frac{A\cancel{\left[\mu_m - \frac{A}{C}\right]}}{C\cancel{\left[\mu_m - \frac{A}{C}\right]}} - \frac{\frac{1}{C}}{\frac{C}{D}\left[\mu_m - \frac{A}{C}\right]} \\
=& \frac{A}{C} - \frac{\frac{1}{C}}{\frac{C}{D}\left[\mu_m - \frac{A}{C}\right]} \\
=& \mu_{cm}
\end{aligned}
$$

Todo esto para decir que ya encontramos la media del gemelo malo. Ya encontramos el primer término de los lagrangianos anteriores:

$$\begin{aligned}\mu_j =& -\underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_{1} + \beta_j \cdot \frac{\sigma_m^2}{\lambda_1} \\ =& \mu_{cm} + \beta_j \cdot \underbrace{\frac{\sigma_m^2}{\lambda_1}}_{2}\end{aligned}$$

Nos queda por encontrar el factor número 2:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_m^2}{\lambda_1} =& \frac{\frac{1}{C} + \frac{C}{D}\left(\mu_m - \frac{A}{C}\right)^2}{\frac{C}{D}\left(\mu_m - \frac{A}{C}\right)} \\ =& \mu_m \left[-\frac{A}{C} + \frac{\frac{1}{C}}{\frac{C}{D}\left(\mu_m - \frac{A}{C}\right)}\right] \\ =& -\mu_m \left[\frac{A}{C} + \frac{\frac{1}{C}}{\frac{C}{D}\left(\mu_m - \frac{A}{C}\right)}\right] \\ =& \mu_m - \mu_{cm}\end{aligned}$$

Todo esto que hemos hecho es para hallar la fórmula del CAPM de Black:

$$\begin{aligned}\mu_j =& \mu_{cm} + \beta_j \left[\mu_m - \mu_{cm}\right] \\ E[r_j] =& E[r_{cm}] + \beta_j E[r_m - r_{cm}]\end{aligned}$$

Esto es un SML modificado. Ahora hay que entender qué significa.

18.4 *Security Market Line* de Black

Acabamos de encontrar que el rendimiento de un activo es:

$$E[r_j] = E[r_{cm}] + \beta_j E[r_m - r_{cm}]$$

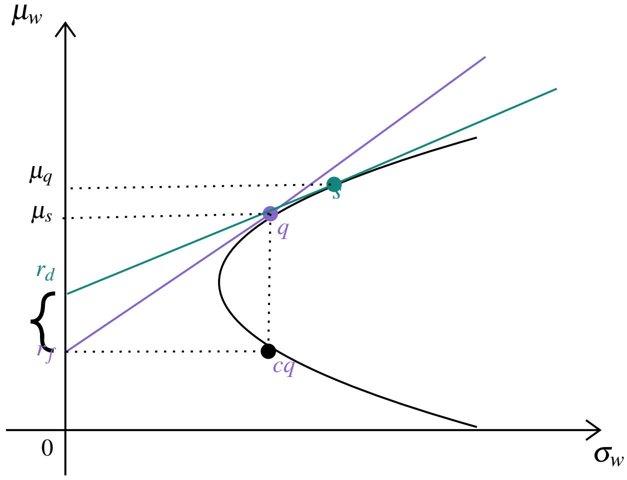
Es cierto que el rendimiento de mercado va a cumplir que:

$$E[r_q] < E[r_m] < E[r_s]$$

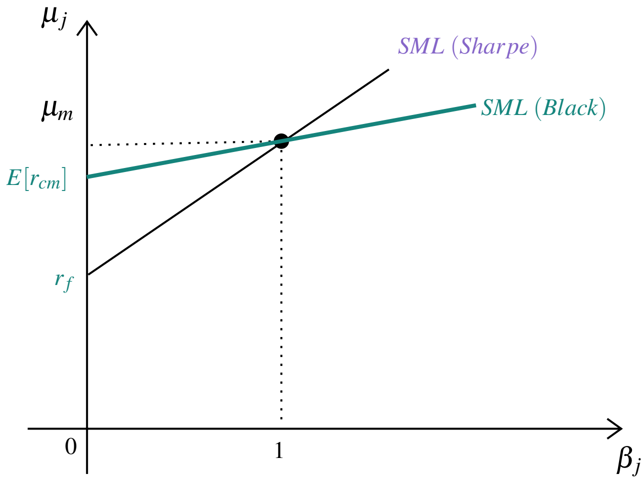
Entonces, viendo la fórmula del gemelo malo:

$$\mu_{cj} = \frac{A}{C} - \frac{\frac{1}{C}}{\frac{C}{D}\left(\mu_j - \frac{A}{C}\right)}$$

Entonces, con esto ya se puede saber que el gemelo malo del mercado estará entre r_f y r_d $E[r_{cm}] \in [r_f, r_d]$:



Y específicamente se sabe que $E[r_{cm}] \geq r_f$. Veamos el CAPM de Sharpe y de Black:



Observe que esto se parece más a lo que se había encontrado empíricamente, que la pendiente es un poco más baja que lo que sugiere el CAPM de Sharpe.

18.5 Interpretación de Black

Otra interpretación del CAPM de Black es que dice lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
r_j &= r_{cm} + \beta_j[r_m - r_{cm}] + \varepsilon_j \\
r_j &= (1 - \beta_j) r_{cm} + \beta_j r_m + \varepsilon_j
\end{aligned}
$$

Aquí r_j ya no es la media sino el rendimiento propiamente dado.

Pero para hacer la interpretación empírica se ocupan los rendimientos en exceso:

$$
\begin{aligned}
r_{jt} - r_{ft} &= (1 - \beta_j)[r_{cmt} - r_f] + \beta_j[r_{mt} - r_{ft}] + \varepsilon_j \\
z_{jt} &= (1 - \beta_j) z_{cmt} + \beta_j z_{mt} + \varepsilon_{jt}
\end{aligned}
$$

Observe que aquí hay dos variables regresoras o explicativas, mientras que en el CAPM de Sharpe había solamente una, y eso va a tener una interpretación relevante. Se dice que el CAPM de Sharpe era un modelo de un 1 factor pero el de Black es de dos factores.

Y ahora el valor esperado se define $z_j \equiv E[z_{jt}]$ y entonces me dice:

$$z_j = (1-\beta_j)z_{cm} + \beta_j z_m$$

Pero, el modelo de mercado corre la regresión siguiente:

$$z_{jt} = \alpha_j + \beta_j z_{mt}$$

El CAPM de Sharpe impone la restricción de que en la regresión anterior $\alpha_j = 0$. Pero más bien la restricción que impone Black es que $\alpha_j = (1-\beta_j)z_{cm}$. Entonces va a ser que para:

- $\beta_j < 1 \;\Rightarrow\; \alpha_j > 0$
- $\beta_j > 1 \;\Rightarrow\; \alpha_j < 0$

Este modelo casi no se usa, porque aunque empíricamente se aproxima más a lo que pasa en la realidad, es muy difícil encontrar al *gemelo malo*. Lo que sigue ver son el CAPM de consumo y las pruebas que se hicieron para probarlo.

Ejercicio 18.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *Hable acerca de la razón de Sharpe del mercado y ¿qué dice el CAPM de Sharpe acerca de la razón de Sharpe del mercado?* $\to$ La razón de Sharpe es como una especie de premio a la variabilidad y geométricamente es la pendiente entre el r_f y hasta el CML. Esa razón de Sharpe la sacamos en el CAPM de Black y en el CAPM de Sharpe. En el CAPM de Sharpe la cartera de mercado es la que tiene la razón de Sharpe más alta.
2. *¿Cuál es la diferencia entre el CML y el SML?* $\to$ La diferencia es en lo que se relaciona: el CML es una frontera eficiente cuando hay activo libre de riesgo (ahí se tiene de ejes μ y la desviación estándar) y en el SML se tiene un rendimiento con un β.
3. *Explique qué es la cartera cero-beta en general.* $\to$ No se contesta.
4. *Explique qué es la cartera cero-beta del mercado.* $\to$ No se contesta.

■

19. CAPM de Consumo

El concepto *ex dividendo* de una acción significa que, por ejemplo, si Apple tiene la fecha *ex dividendo* el 08 de mayo, las personas que tengan la acción el 7 de mayo, tienen derecho a los dividendos que reparta la empresa; las personas que tengan la acción del 8 de mayo en adelante, no tienen derecho a los dividendos que ofrece la empresa.

Esto existe porque las empresas suelen tener muchísimos accionistas y necesitan unos días para saber a quiénes pagarle los dividendos. Usualmente el día de *ex dividendo* el precio de la acción baja porque justamente de ese día en adelante se recibirán flujos de caja que no incorporan dividendos.

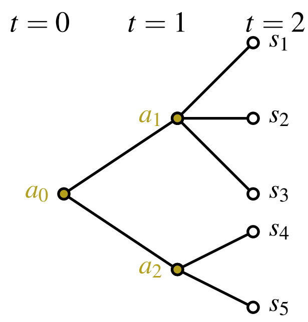
El interés del CAPM de consumo va en dos sentidos:

1. Generar un modelo multiperíodos
2. Desarrollar una relación entre relaciones de utilidad con un modelo de valoración

19.1 Supuestos

Los supuestos del modelo de CAPM de consumo son los siguientes:

1. Hay mercados completos (economía Arrow-Debreu)
2. Hay t períodos (puede pensarse en tiempo discreto o continuo pero nosotros lo vemos en tiempo discreto y la lógica sigue siendo la misma)
3. Hay J instrumentos complejos V_{jt} (este es el valor *ex-dividendo*) y X_{jt} es el dividendo del período t
4. La información se vería algo así (supongamos tres períodos):



Esto lo que significa es que hay 5 estados de la naturaleza. Conforme avanza el tiempo, uno puede descartar que habrán ciertos estados de la naturaleza que no se van a dar. Esto se llaman filtraciones F_t estado de información en el período t.

Conforme pasa el tiempo se refina la idea de lo que pueda pasar en la economía y la incertidumbre o riesgo se van desapareciendo poco a poco.

5. Hay expectativas homogéneas. A veces el CAPM de consumo se trabaja con un agente representativo pero aquí no lo vamos a hacer así. Más bien se tienen las probabilidades de un estado dado en t π_{st} son iguales para todos los agentes $\forall\ i$.
   Entonces, por ejemplo, pensando en el árbol anterior:

$$\pi(a_1, F_1) = \pi_{s1} + \pi_{s2} + \pi_{s3}$$

   O sea, esto sería la posibilidad de haber llegado a esa parte del árbol.
6. Utilidades cardinales separables en el tiempo.

$$V_i = \sum_{t=0}^{T} u_{it}(c_{it})$$

Importante aquí notar que u_{it} ya incorpora el factor de descuento. Por ejemplo:

$$u_{it} = e^{-\delta t} u_i(c_{it})$$

7. Por lo general se tiene un agente representativo, aunque es un supuesto terrible. Esto es más que todo útil para la macroeconomía.

19.2 Precios de equilibrio

Lo que vamos a hacer es utilizar las intuiciones que vimos en mercados completos y ver qué pasa cuando se tienen muchos períodos.

19.2.1 Dos períodos

Los precios puros estaban dados por:

$$\begin{aligned} P_s =& \pi_s \cdot \frac{u'(c_{is})}{u'(c_{i0})} \\ \equiv& \pi_s \cdot M_{is} \end{aligned}$$

Estamos introduciendo la nueva notación M_{is}. En macroeconomía a esto se le suele llamar factor estocástico de descuento o SDF (*stochastic discount factor*). Y esto tiene que ver con el agente representativo.

19.2.2 t períodos

Generalizando para t períodos, se tendría:

$$\begin{aligned} P_{st} =& \pi_{st} \cdot \frac{u'_{it}(c_{it})}{u'_{it-1}(c_{it-1})} \\ \equiv& \pi_{st} \cdot M_{ist} \end{aligned}$$

Ahora vamos a valorar una acción desde el punto de vista $t-1$.

Ejemplo 19.1 — Valorando una acción de Apple. La acción de Apple tiene dos componentes en el tiempo t: se tienen dos flujos de caja

1. Los dividendos
2. El valor *ex-dividendo* de la acción

$$\begin{aligned} V_{jt-1} =& \sum_{s_t \in S_t} \{X_{jst} + V_{jst}\} P_{st} \\ =& E\left[M_{it} \cdot (X_{jt} + V_{jt}) \,|F_{t-1}\right] \end{aligned}$$

Ahora hay que expresar lo anterior en términos de rendimientos.

$$\begin{aligned} 1 =& E\left[M_{it} \cdot \left(\underbrace{\frac{X_{jt}}{V_{jt-1}}}_{\text{dividendo}} + \underbrace{\frac{V_{jt}}{V_{jt-1}}}_{\text{plusvalía}} \right) |F_{t-1}\right] \\ 1 =& E\left[M_{it}(1 + r_{jt}\right] \end{aligned}$$

■

Esto lo que nos da es una fórmula para encontrar los rendimientos de un activo. Esta es la ecuación de Euler.

Esta fórmula sería muy útil, pero el SDF no es observable. Por eso, lo que sigue es establecer una serie de supuestos para tratar de encontrar el SDF.

19.3 Euler y CAPM de consumo

Recordando lo que habíamos visto de la covarianza:

$$\begin{aligned} Cov(x,y) =& E[x \cdot y] - E[x]E[y] \\ E[xy] =& Cov(x,y) + E[x]E[y] \\ 1 =& E[M_{it}(1 + r_{jt}] \\ =& E[M_{it}]E[1 + r_{jt}] + Cov(M_{it}, (1 + r_{jt}) \\ =& E[M_{it}]\,(1 + E[r_{jt}]) + Cov(M_{it}, r_{jt}) \end{aligned}$$

Ahora, la idea es llegar a una expresión similar a la del CAPM. Para simplificar, considere un activo sin riesgo en el período t que paga r_{ft} $\forall$ $s_t \in S_t$ (en todos los estados de la naturaleza). Luego, sabiendo que $E[r_{ft}] = r_{ft}$, y como no cambia, su covarianza con lo que sea es de 0.

Usando esto en la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} 1 =& E[M_{it}]\,(1 + r_{ft}) \\ E[M_{it}] =& \frac{1}{1 + r_{ft}} \\ =& V_{ft} \end{aligned}$$

Esto es igual al bono cupón cero en el período t. Ahora, la idea es eliminar ese SDF para que nos quede en términos de variables observables:

$$
\begin{aligned}
1 =& \frac{1+E[r_{ft}]}{1+r_{ft}} + Cov(M_{it}, r_{jt}) \\
1+E[r_{jt}] =& (1+r_{ft}) - (1+r_{ft})Cov(M_{it}, r_{jt}) \\
E[r_{jt}] =& r_{ft} - (1+r_{ft})Cov(M_{it}, r_{jt})
\end{aligned}
$$

Ya casi eliminamos el M_{it}, solo queda en la covarianza. Entonces ahora hay que ver unos supuestos. Sabemos que:

$$M_{ist} \equiv \frac{u'_{it}(c_{ist})}{u'_{it-1}(c_{ist-1})}$$

Recordemos lo que veíamos en mercados completos $\rightarrow$ Cuando la dotación total era muy alta, eso significa que los rendimientos son muy altos: ¿qué le pasa al consumo de los agentes en esos estados de la naturaleza? $\rightarrow$ es un consumo alto y por lo tanto la utilidad marginal disminuye.

Entonces la relación entre M_{it} y el rendimiento r_{jt} es negativa $Cov(\overbrace{M_{it}}^{-}, r_{jt})$.

Pero ahora el objetivo es quitarnos de encima M_{it}. Actualmente hay dos posibilidades:

1. Utilidades cuadráticas (Rubistein 1976)
2. Rendimientos Brownianos (como es en varios períodos no es exactamente normal, pero para efectos nuestros podemos pensar que es normal en tiempo continuo: Breeden 1979)

Ya habíamos usado algo así para las preferencias de media y varianza, y en realidad queremos volver a algo así como preferencias de media y varianza. Vamos a ver una versión simplificada del modelo de Breeden.

19.3.1 Modelo de Breeden simplificado

Este modelo lo que dice es que el consumo de hoy es igual a al consumo del período de ayer más un pequeño cambio:

$$C_{it} = C_{it-1} + \Delta C_{it}$$

Entonces vamos a hacer una expansación de Taylor de la utilidad marginal del consumo pasado:

$$u'_i(c_{it}) \approx u'_i(c_{it-1}) + \Delta c_{it} u''_i(c_{it-1})$$

Y el factor estocástico de descuento:

$$M_{its} = \frac{u'_i(c_{it})}{u'_i(c_{it-1})}$$

Y evaluando en la fórmula anterior:

$$M_{its} \simeq 1 + \Delta c_{it} \cdot \underbrace{\frac{u''_i(c_{it-1}}{u'_i(c_{it})}}_{ARA}$$

Entonces lo que vamos a hacer es usar la tolerancia al riesgo y no la aversión al riesgo absoluta:

$$M_{its} \simeq 1 - \frac{\Delta c_{it}}{\tau_i}$$

donde $\tau_i = \frac{u_i'(c_{it-1})}{u_i''(c_{it-1})}$ y τ_i es constante. Esto significa que si la tolerancia es constante, entonces la aversión al riesgo absoluta es constante, entonces se tiene una utilidad CARA (no es un supuesto muy bueno pero para lo que estamos haciendo está bien).

Observe que $\Delta c_{it} = c_{it} - c_{it-1}$. Aquí, de estas dos partes el c_{it} es estocástico pero el consumo pasado no porque ya se conocería.

Entonces el CAPM de consumo es:

$$\begin{aligned} E[r_{jt}] &= r_{ft} - (1 + r_{ft}) Cov\left[1 - \frac{\Delta c_{it}}{\tau_i}, r_{jt}\right] \\ &= r_{ft} + \frac{(1 + r_{ft})}{\tau_i} Cov[c_{it}, r_{jt}] \end{aligned}$$

Entonces ya casi llegamos, porque lo tenemos en base a variables observables que son los consumos de los individuos, entonces lo único que queda no observable es la tolerancia al riesgo y por eso se va a querer despejarlo:

$$\frac{(1 + r_{ft})}{\tau_i} \cdot Cov[c_{it}, r_{jt}] = E[r_{jt} - r_{ft}]$$

Recuerde que $E[r_{jt} - r_{ft}]$ es la prima de riesgo entonces se va a definir como z_{jt} que indica que ya es valor esperado.

Además, recuerde que la prima de riesgo es la que tiene el valor esperado pero el rendimiento exceso no tiene valor esperado, sino que es lo que va a tener en cada estado de la naturaleza que le genera un cierto exceso.

$$\tau_i = \frac{(1 + r_{ft})}{z_{jt}} \cdot Cov[c_{it}, r_{jt}]$$

Ahora lo que se va a hacer es sumar todas las tolerancias al riesgo (en este modelo no se usaba agente representativo, solamente se ocupaba una tolerancia al riesgo constante):

$$\begin{aligned} T &\equiv \sum_{i=1}^{T} \tau_i \\ &= \frac{(1 + r_{ft})}{z_{jt}} Cov[c_t, r_{jt}] \end{aligned}$$

Entonces ya tenemos el consumo agregado: lo que interesa no es el consumo individual de cada uno de los agentes sino el consumo agregado. Ahora hay que despejar z_{jt}:

$$z_{jt} = \frac{(1 + r_{ft})}{T} Cov[c_t, r_{jt}]$$

Ya esto se parece mucho al CAPM. Esto es un activo cualquiera. Pero ahora consideremos al mercado (podemos pensarlo como un índice ponderado por capitalización de mercado), que va a tener un rendimiento:

$$z_{mt} = \frac{(1+r_{ft})}{T} Cov[c_t, r_{mt}]$$

Y vamos a dividir uno entre el otro:

$$\frac{z_{jt}}{z_{mt}} = \frac{\cancel{\frac{(1+r_{ft})}{T}} Cov[c_t, r_{jt}]}{\cancel{\frac{(1+r_{ft})}{T}} Cov[c_t, r_{mt}]}$$

Aquí lo que estamos haciendo es usando la prima del mercado z_{mt} para deshacernos de la variable de tolerancia al riesgo.

Entonces lo que vamos a hacer es un 'truco': vamos a multiplicar y dividir a ambos lados por la varianza del mercado.

$$\frac{z_{jt}}{z_{mt}} = \frac{\frac{Cov[c_t, r_{jt}]}{Var[c_t]}}{\frac{Cov[c_t, r_{mt}}{Var[c_t]}]}$$

Esto es como un β del consumo agregado, que sí es una variable observable. Por lo tanto:

$$\frac{z_{jt}}{z_{mt}} = \frac{\frac{Cov[c_t, r_{jt}]}{Var[c_t]}}{\frac{Cov[c_t, r_{mt}}{Var[c_t]}]} \equiv \frac{\beta_{jc}}{\beta_{jm}}$$

Entonces la fórmula del CAPM de consumo es:

$$z_{jt} = \frac{\beta_{jc}}{\beta_{jm}} \cdot z_{mt}$$

$$E[r_{jt}] - r_{ft} = \frac{\beta_{jc}}{\beta_{jm}} \cdot [E[r_{mt} - r_{ft}]$$

$$E[r_{jt}] = r_{ft} + \frac{\beta_{jc}}{\beta_{mc}} \cdot (E[r_{mt} - r_{ft})$$

Y este es el CAPM de consumo.

El problema de esta ecuación es que este consumo varía muy poco: la gente busca suavizar su consumo porque no quieren que cambie mucho (es casi una constante). Además, las utilidades CARA demasiado aversas al riesgo como para ser introducibles.

Entre los logros destaca que es un modelo multiperiodos y que introduce las utilidades a la hora de valorar activos y esto puede ser interesante.

Observe que si el consumo fuera igual al mercado $c_t =$ mercado (usted solo puede consumir lo que el mercado genera) esto generaría que $\beta_{mc} = 1$ (esto no sucede empíricamente) se llegue igualmente al CAPM.

A partir de aquí, el enfoque que empezaron a tomar las finanzas del CAPM de consumo en 1979 es por el lado de las pruebas empíricas.

20. *Tests* débiles del CAPM

Vamos a empezar a ver análisis empíricos en las finanzas. Finanzas es la parte de economía que se parece más a las ciencias naturales debido a la abundancia de datos y a las pruebas empíricas.

Primero vamos a ver un poco sobre filosofía de las ciencias.

20.1 Karl Popper

Nació y creció en Vienna durante el siglo XX. En Vienna en ese tiempo estaban pasando muchas cosas. Primero él fue Marxista y eso va a ser relevante. Fue discípulo de Adler. Algo que le impactó mucho fue una conferencia que dio Einstein sobre la teoría de la relatividad.

A Popper le impactó mucho algunas de las predicciones que hacía esta teoría. Por ejemplo, si un objeto era lo suficientemente masivo, se doblaría la velocidad de la luz. Para Popper esa predicción era muy fuerte, dado que de verificarse que no fuera cierta, la teoría se caería.

Entonces Popper a partir de aquí, empezó a distinguir diferencias entre lo que sería una ciencia y una pseudociencia. En base a esto, por ejemplo, la astrología sería una pseudociencia. Esto es el estudio del horóscopo. Es una pseudociencia porque no tiene predicciones que puedan ser debatibles.

> Ejemplo 20.1 — **Predicciones de la astrología.** La astrología puede hacer predicciones como por ejemplo: *"hoy conocerás a alguien muy especial"*, pero esto puede significar demasiadas cosas entonces no son proposiciones de las cuales se les pueda rebatir. ■

Un ejemplo de la ciencia sería la física de Einstein o de Newton.

> Ejemplo 20.2 — **Preddiciones de la física de Einstein.** Einstein propuso que si la luz pasaba por un objeto masivo, la luz se doblaría de una manera particular. Esta es una proposición que, con los instrumentos adecuados, podría ser verificable o constrastable. ■

Entonces las ciencias, tienen predicciones o hipótesis falsificables que permiten ver si la teoría se cumple o no.

Popper también definió una pre-ciencia, donde él encajaba al psicoanálisis de Freud o de Adler. Freud proponía la existencia de cosas como la conciencia, subconciente, el síndrome de Edipo, etc. Entonces, si bien es cierto son propuestas o hipótesis más desarrolladas que las de la astrología, en ese entonces, a como estaban formuladas, todavía no eran falsificables sus proposiciones. Entonces, Popper decía que podía llegar a ser una ciencia pero aún no lo era exactamente.

La pseudociencia, por ejemplo, era el Marxismo. Karl Marx tenía una predicción de lo que iba a suceder en la historia: iba a haber una revolución del proletariado en los países más desarrollados porque era donde había más desigualdad. Entonces, para Popper inicialmente sí era una ciencia, pues Marx hizo una predicción de algo concreto que ocurriría. Sin embargo, conforme pasó el tiempo, la revolución se dio pero no en los países desarrollados, sino en Rusia (la Unión Soviética) entonces la teoría de Marx falló.

Entonces la gente empezó a ajustar la teoría de Marx para encajarla con lo que realmente pasó, entonces surgió el *marxismo-leninismo*.

Luego, Imre Lakatos (otro filósofo de la ciencias) propuso la existencia de programas de investigación:

- Programas progresivos: existen hipótesis falsificables que no se cumplen exactamente y los supuestos se van refinando paulatina o progresivamente (esto es lo que sucedió con el CAPM, que primero surgió el de Sharpe, pero luego fue refinado en sus supuestos o hipótesis mediante el CAPM de Black).
- Programas degenerativos: desde el 300 a.C existía la astronomía Ptolomeica, en Grecia. Ptolomeo tenía una teoría sobre el movimiento de las estrellas. Conforme pasó el tiempo, la gente se empezó a dar cuenta que la teoría de Ptolomeo funcionaba peor y peor. Entonces se empezaron a introducir excepciones a las hipótesis, comprometiendo así, de manera significativa a las hipótesis originales.

Lakatos decía que las pseudociencias no tenían poder predictivo sobre fenómenos no conocidos. Entonces para él, una ciencia tenía que poder hacer predicciones sobre el funcionamiento de las cosas antes de que ocurrieran. Para él, algunas pseudociencias eran: la astronomía Ptolomeica, el psicoanálisis de Freud, el marxismo soviético, la astrología, la psiquiatría, la sociología, el darwinismo y la economía neoclásica.

Entonces de acuerdo a Lakatos, cursos como microeconomía I o II, solamente explicarían cosas que ya han pasado. Por ejemplo, en economía se hace uso de las funciones de utilidad, y se pueden crear funciones de utilidad que se adecúen a las hipótesis planteadas, que pueden decir casi lo que sea (como en la astrología); las utilidades no pueden ser contrastables porque nos las inventamos casi a conveniencia.

Igual con el Darwinismo, que decía como habían evolucionado los seres pero no cómo segurían evolucionando.

Volviendo a Popper y la física de Einstein. Dos de las predicciones de Einstein son:

1. Una manzana cae de un árbol **menos riesgosa**
2. La luz se dobla ante un objeto masivo **más riesgosa**

Para Popper, de estas dos predicciones, la que valdría más la pena probar o *testear* sería la segunda $\rightarrow$ la primera predicción es compartida por otras teorías, como la física de Newton, así que desprobar esta teoría, supondría un golpe para ambas teorías y no solo para Eistein, pero la **hipótesis fuerte** solo puede ser cierta bajo la física de Einstein y no la de Newton.

Por ende, es más provechoso hacer pruebas sobre las hipótesis fuertes porque estas nos permitirían descartar a una teoría sobre otra, dado que sabríamos que la que hace esa predicción, ha sido falseada.

Entonces ahora, lo que haremos es ver las hipótesis débiles y fuertes del CAPM para hacer pruebas sobre estas.

20.2 Hipótesis en finanzas

Suponga que se tiene las siguientes hipótesis. Existen las hipótesis débiles, como:

$$z_j = \beta_j \cdot z_m$$

Esto sale del CAPM de Sharpe. Esto es una hipótesis débil porque el modelo de mercados completos también hace esta predicción: que existe una relación entre el β y el rendimiento esperado, a pesar de que mercados completos es muy distinto al CAPM (y más adelante veremos que el APT también tiene la misma predicción).

Entonces, en caso de que esto fuera cierto, existen varias teorías que lo afirman, de manera que no nos permite descartar a una teoría sobre otra.

En el modelo de Black se vio que:

$$z_j = (1 - \beta_j) \cdot z_m$$

Pero también hay versiones de mercados completos (así como el APT) que también arrojan esta misma predicción. Estas predicciones son hipótesis débiles.

Pero una hipótesis fuerte es la siguiente:

$$w_m = g + h\mu_m$$

el mercado está en la frontera eficiente $\in MVEF$

Esto es una hipótesis fuerte de Markowitz. Otro ejemplo de Sharpe sobre la cartera del mercado es que:

w_m es la carta razón de Sharpe más alta

Esto lo que significaba entonces era la tangencia entre la cartera q con el CML.

Entonces vamos a empezar a *testear* primero estas hipótesis débiles y sus supuestos auxiliares.

20.3 Hipótesis y supuestos auxiliares

Lo que dice el CAPM de Sharpe es que la prima de riesgo de un activo es igual a β por la prima de riesgo del mercado.

$$z_j = \beta_j z_m$$

Estas primas de mercado son esperanzas *ex-ante*. Entonces se corre una regresión de la forma:

$$\bar{z}_{jt} = \hat{\alpha}_{j_{\hat{\beta}_j \bar{z}_{mt}}}$$

El rendimiento promedio del activo y del mercado de la regresión anterior pueden fallar por varias razones:

1. Los supuestos de Sharpe (1964) no son suficientemente realistas (por ejemplo podría ser que las tasas de pedir prestado y la de prestar sean diferente, no hay preferencias de media y varianza, etc.).
2. La implementación empírica también podría fallar porque la distribución *ex-ante* sea distinta a la distribución *ex-post*. Por ejemplo la pandemia provocó que la realidad fuera diferente a las expectativas que había antes.
3. $\hat{\alpha}_j$ y $\hat{\beta}_j$ podrían tener un error de medición o tener un sesgo incluido. Dependiendo de los activos que se extraigan se puede tener un *error en variables* . Entonces por eso es que se agarran carteras y no activos individuales porque los errores son menores. También podría haber sesgo de selección: como cuando se agarran las 10 empresas más grandes para hacer la frontera eficiente.

20.4 *Tests* empíricos del CAPM

Vamos a ver varios *tests* empíricos del CAPM.

1. Blume y Friend (1970): sección cruzada
2. Fama y Macbeth (1972): panel
3. Black, Jensen y Scholes (1973): serie de tiempo

Fama fue el que estudió si había caminata aleatoria o no en el mercado; encontró que hay una correlación pero relativamente baja.

20.4.1 Blume y Friend (1970)

Ellos hacen lo siguiente:

1. Construyen N carteras $j = 1, \dots, N$. Tienen que ser no tantas carteras para que cada una tenga varios activos y así α y β estén calculados sin tantos errores variables.
2. Para cada cartera corren la siguiente regresión:

$$z_{jt} = \alpha_j + \beta_j z_{mt} + \varepsilon_{jt}$$

3. Obtener $\hat{\alpha}_j$ y $\hat{\beta}_j$. A partir de aquí podría haber varios tipos de sesgo:
   - Sesgo de medición (errores variables)
   - Sesgo de selección
4. Corren la siguiente regresión de sección cruzada;

$$\bar{z}_j = a + b\hat{\beta}_j$$

El CAPM de Sharpe plantea:

$$H_0 : a = 0 \ \wedge \ b = \bar{z}_m$$

Y en el *test* ellos encuentran que

$$a > 0 \ \wedge \ b < \bar{z}_m$$

con $b > 0$. Entonces lo que encuentran es que el CAPM de Black sí es compatible con este resultado. Además encuentran que en una muestra de 1960-1968 que $a > 0 \ \wedge \ b < 0$. Esto pasó porque hubo un fallo: de 1960-1968 porque probablemente la distribución *ex-ante* coincidiera con la *ex-post*.

Esto de que $b < 0$ es como si estuviera pidiendo que los activos actuaran como un seguro. Puede pensarse, por ejemplo, en Zoom: esta fue una empresa que le fue muy bien cuando la economía fue impactada por el Covid, pero más bien ellos ahí tuvieron un auge.

Entonces, sería teóricamente posible pedir o tener rendimientos menores a los de la tasa libre de riesgo, y esto sería en los casos en que se quiere un seguro, porque es para los casos en los que se va contramercado.

20.4.2 Black, Jensen y Scholes

Es un modelo sencillo y parecido al de Blume y Friend.

Ellos tienen datos de 1926-1965, pero agarran un primer tracto de 1926-1930.

1. Calcular $\hat{\beta}_j \ \forall \ j = 1, \dots, J$
2. Ordenan $\hat{\beta}_j$ de mayor a menor.
3. Crean 10 carteras: cartera 1 es la que tiene los β más altos hasta que la cartera 10 que tiene los β más bajos.
4. Calculan el rendimiento r_{it} $i = 1, \dots, 10$ para $t = 1931$
5. Recalculan los pasos anteriores con datos mensuales.

Al final, van a a tener 10 carteras con 420 meses para cada carteras y corren la siguiente regresión:

$$z_{it} = \alpha_i + \beta_1 z_{mt} + \varepsilon_{it}$$

Y en ese sentido es que es una serie de tiempo. Grafican el rendimiento versus el β.

Salieron dos resultados significativos:

1. Uno puede aprovechar los resultados con respecto a la significancia de los α en términos de si se puede o no, adoptar una estrategia de inversión que permita hacer o no dinero.

Vamos a seguir con los *tests* empíricos del CAPM. Repasando el *test* de Black, Jensen y Scholes, lo que nos decía era que α_j que uno encuentra debería ser igual a $(1-\hat{\beta}_j)$ por el rendimiento en exceso de la cartera cero-beta:

$$H_0 : \hat{\alpha}_j = (1-\hat{\beta}_j)\bar{z}_{cm}$$

Lo que sabemos de la cartera cero-beta es que, en valor absoluto será:

$$|z_{cm}| < |r_d - r_f|$$

Entonces vamos a usar una aproximación de esa cartera.

20.5 Fama y Macbeth (1972)

Esta es una metodología que se usa mucho porque Fama hizo otro paper muy famoso en 1992.

Lo que hacen es considerar que estamos considerando un mundo con el CAPM de Sharpe:

$$E[r_j] = r_f + \beta_j E[r_m - r_f]$$

Y ellos lo que hacen es *testear* 3 cosas del CAPM:

1. Hay una relación lineal entre el rendimiento $E[r_j]$ y β_j
2. β_j es una medida completa de riesgo, y ninguna otra medida tiene efecto, por ejemplo el riesgo idiosincrático.
3. Hay una prima de riesgo positiva $E[r_m - r_j] > 0$

Esto lo prueban mediante dos pasos:

1. Van a hacer carteras y van a estimar los $\hat{\beta}_j$ de estas carteras (parecido a Black, Jensen y Scholes). Esto es una serie de tiempo.
2. Lo segundo es que agarran una regresión de sección cruzada período por período $t = 1,\ldots,T$ de la siguiente manera:

$$r_{jt} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_{1t}\beta_j + \hat{\gamma}_{2t}\beta_j^2 + \hat{\gamma}_{3t}s_j + \hat{\eta}_{jt}$$

Tienen el rendimiento de cada período y lo corren con una constante, una variable independiente y las demás regresoras.

s_{jt} tiene que ver con el riesgo idiosincrático, es decir, el riesgo que sí es diversificable.

Esta regresión incluye el β_j^2 es para ver si hay no-linealidades entre la relación del rendimiento y del β: si $\hat{\gamma}_2$ saliera significativo sería evidencia de que hay no-linealidades.

s_j se incluye como regresor porque si $\hat{\gamma}_{3t}$ fuera significativo me diría que el rendimiento esperado se ve afectado por el riesgo idiosincrático y sería un rechazo del CAPM. Como es una sección cruzada se estima para $t = 1,\ldots,T$.

Lo que hacen es obtener un γ promedio:

$$\overline{\gamma}_i \equiv \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{\gamma}_{it}$$

Y tiene una varianza $Var(\overline{\gamma}_i = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\left(\tilde{\gamma}_{it} - \overline{\gamma}_i^2\right)$. Los supuestos o hipótesis que ellos hacen son las siguientes:

a. $E[\tilde{\gamma}_{2t}] = 0$
b. $E[\tilde{\gamma}_{3t}] = 0$

c. $E[\tilde{\gamma}_{1t}] = E[r_{mt} - r_{ft}] = 0$. Y para probarlo directamente lo plantean de una forma distinta:

$$E[\hat{\gamma}_{1t} - r_{mt} + r_{ft}] = 0$$

d. $E[\tilde{\gamma}_{0t}] = E[r_{ft}]$

$$\begin{aligned} E[\tilde{\gamma}_{0t}] - E[r_{ft}] &= 0 \\ E[\tilde{\gamma}_{0t} - r_{ft}] &= 0 \end{aligned}$$

3.

Ellos encuentran que en efecto $E[\tilde{\gamma}_{2t}] = 0$, lo cual es evidencia de una relación lineal. También encuentran que $E[\tilde{\gamma}_{3t}] = 0$ el riesgo idiosincrático no afecta el rendimiento esperado; no pasa que las empresas que tengan mayor riesgo idiosincrático tengan un mayor rendimiento esperado, tal y como dice la teoría económica que es fácilmente diversificable.

También la hipótesis $E[\hat{\gamma}_{1t} - r_{mt} + r_{ft}] = 0$ la rechazan, dado que esa prima de mercado va a ser menor que 0 en general. Encuentran que $E[\tilde{\gamma}_{0t} - r_{ft}] = 0$ va a ser mayor que 0, es decir que $[\tilde{\gamma}_{0t} > r_{ft}$.

20.5.1 Fama y French (1992,1993)

Ellos encuentran que la relación entre el rendimiento en exceso $\bar{z}_j$ y β_j desparece para el período 1963-1990, el β se vuelve insignificante y hay períodos incluso para los que es negativo. Hasta ese entonces, habían usado datos de 1926-1965 y ellos vuelven a hacer el estudio con datos nuevos y encuentran que la relación del rendimiento en exceso con el β ya no es tan fuerte.

Esto pudo haber sido porque hubo cambios en la distribución post y la *ex-ante*. Valdría la pena volver a agarrar los datos del 1926 hasta ahora para ver si se vuelve a cumplir o no.

Hay una estrategia de carteras: en la estimación de Black, Jensen y Scholes había carteras con α's negativos y positivos, y la idea era ver si con eso se podía hacer ganancia, a esto se le llama estrategia de betas bajas.

20.5.2 Estrategia de β's bajos: BJS

Se van a agarrar las carteras con α significativo: la cartera 2 y la cartera 9. Entonces una estrategia es comprar de la cartera 9 y venden al descubierto la cartera 2. Es decir, compran una cartera con los β bajos y venden al descubierto una cartera con los β altos.

Recuerde que las carteras estaban ordenadas por la magnitud de los β: la cartera 1 tiene los β más altos, mientras que la cartera 10 tiene los β más bajos.

Esta estrategia da:

$$\begin{aligned} \bar{z}_j &= 0.1968 + 0.6291\bar{z}_m \quad \#9 \\ \bar{z}_j &= -0.1938 + 1.3838\bar{z}_m \quad \#2 \\ \hline z_k &= 0.3906 - 0.7547\bar{z}_m \end{aligned}$$

Esta cartera genera un α positivo pero sigue habiendo el riesgo de mercado todavía, entonces se puede terminar de completar esta cartera comprando 0.7547 del mercado:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{j3} &= +0.7547\bar{z}_m \quad \#9 \\ \hline z &= 0.3906 \end{aligned}$$

Entonces lo que se hizo fue:

1. Comprar la cartera 9 (β's bajos)
2. Vender al descubierto la cartera 2 (β's altos)
3. Comprar un poco del mercado $\rightarrow$ esto elimina el riesgo de mercado

Es decir, estoy explotando que hay α's bajos y α's altos, sin apostar a si el mercado va a subir o bajar: esto es una ineficiencia que existe entre una y otra; esto se llama neutralidad al mercado $\rightarrow$ no apuestan contra o a favor del mercado sino solamente contra anomalías que se presenten.

Ahora sí siguen ver los *tests* fuertes del CAPM.

21. *Tests* fuertes del CAPM

En 1977 Richard Roll escribe un artículo muy importante donde se hace una crítica de todos los *tests* que se habían hecho de los tres débiles que habían salido hasta ese momento.

Cuando vimos el tema de el análisis de filosofía de la ciencia uno una de las cosas que era importante es que a la hora de hacer análisis empíricos tienen que hacer supuestos auxiliares.

Esos supuestos auxiliares puede ser que estén bien o mal. Roll se fijó en uno que es importante. Desarrolló primero que nada lo que vimos de la frontera eficiente, entonces dice la relación de CAPM de Sharpe y CAPM de Black es esta relación $z_j = z_{cm} + \beta_j(z_m - z_{cm})$.

Pero lo que dice de eso no ni siquiera deberíamos hacer una regresión; esto es matemáticamente. Entonces dice si es que la cartera está en la frontera eficiente es el CAPM de Black. Si además de estar en la frontera eficiente es la que tiene la razón de Sharpe más alta entonces se usa el CAPM de Sharpe.

Entonces eso tiene que salir como si uno hiciera una regresión le saldría con un R^2 cuadrado del 100% y entonces eso ya no es econometría sino matemática. Entonces lo que él es: **la razón de que puede ser que falle el CAPM de Black o CAPM de Sharpe por lo que sea es que a lo mejor en la medida que estamos usando el mercado es la incorrecta. Es decir, no es la que deberíamos usar**.

Entonces él se pregunta cuál debería ser el realmente ese mercado y lo que propone es que deberían ser todos los activos riesgosos de la economía y entonces pone de ejemplo bienes raíces, bonos riesgosos, capital humano, etc.

Si uno lo que usa por ejemplo es el S&P500 o el índice CRSP, lo más que uno puede rechazar cuando rechaza todos digamos todos estos tests de la BJS o de Fama y Mcbeth, es que la proxy que usaron es mala. Entonces eso se llama la crítica de Roll. Eso es un problema porque entonces uno como sé que lo estoy rechazando porque el modelo es malo o no porque la próxima de mercado.

Empíricamente la cartera m sí puede estar en la zona dominada, y esto ya ha pasado, como en períodos de crisis. Durante una gran parte de la Gran Depresión el rendimiento del mercado tuvo rendimiento negativo (como 10 años) pero agarrando unos 30 años debería ser 0 o positivo.

Blume y Friend encontraron esta relación negativa entre el rendimiento esperado y el β de 1960-1968.

Ejercicio 21.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿Qué es el factor estocástico de descuento?* $\rightarrow$ Es la utilidad marginal de los estados de la naturaleza entre la utilidad marginal del estado inicial multiplicado por un factor $e^{-\delta}$. Es inobservable, salvo cuando haya un activo libre de riesgo. El valor esperado de ese

factor estocástico es igual al valor esperado de un bono cero cupón.
¿Y para qué se usa? ¿Para qué se desarrolla? $\rightarrow$ Para poder valorar activos en mercados completos.

2. *¿Qué es el β de consumo de un activo?* $\rightarrow$ Es la covarianza entre el consumo agregado con el de ese activo en específico entre la varianza del consumo y sale cuando se está calculando la esperanza del rendimiento de esa empresa.

   Los β de consumo empíricamente pueden ser teóricamente menor a 0. Como el consumo es estable, los β suelen ser altos porque la varianza del consumo es baja; la gente busca suavizar el consumo por la hipótesis de la renta permanente.

3. *Blume y Friend hablaban de por qué podían fallar los tests del CAPM. Habían 3 razones.* $\rightarrow$ Era porque:
   a. Los supuestos de Sharpe no eran realistas (por ejemplo no existen preferencias de media y varianza) y puede ser que $r_d \neq r_f$.
   b. Puede haber diferencias en las distribuciones *ex-ante* y *ex-post*.
   c. El α y β están mal calculados por algún sesgo.

4. *Hable de los resultados de Fama y McBeth.* $\rightarrow$ Los resultados es que no se rechazaba la linealidad y β_j sí importaba. Sí rechazaban los resultados del CAPM de Sharpe.

22. APT e implementaciones multifactores

Vamos a ver los modelos multifactores. En primer lugar vamos a ver una forma de valorar activos diferente al CAPM llamada del APT (Ross, 1976) y es un modelo multifactor. Luego vamos a ver la implementación de Fama-French-Carhart para calcular los rendimientos.

En el CAPM de Sharpe y en el modelo de mercado se tenía que el rendimiento de una acción:

$$r_{jt} = \alpha_j + \beta_j r_{mt} + \varepsilon_{jt}$$

Es decir, cómo se mueve el rendimiento de una acción en el tiempo en base a un factor (el rendimiento de mercado). El modelo de mercado decía que $z_{jt} = \alpha_j + \beta_j z_{mt} + \varepsilon_{jt}$ (este α_j es diferente al de arriba).

- El CAPM de Sharpe decía que $\alpha_j = 0 \rightarrow$ es un modelo de un factor que es el rendimiento en exceso del mercado
- El CAPM de Black cambia un poco el resultado: $z_{jt} = (1-\beta_j)\overbrace{z_{cmt}}^{\text{gemelo malo}} + \beta_j \overbrace{z_{mt}}^{\text{mercado}} + \varepsilon_{jt} \rightarrow$ es un modelo de dos factores porque depende del rendimiento del mercado y del rendimiento del *gemelo malo* del mercado (que son ortogonales entre sí).

Ross propuso seguir adelante con esta idea y planteó k factores (como pensando en que también se podía depender de otros factores como la inflación, el PIB, etc. o cualquier otro factor macroeconómico y no solo del mercado). Esto terminó derivando en factores de corte más financiero y luego vamos a ver los más usados.

Ross encuentra un resultado parecido al CAPM de Sharpe pero mediante un argumento por ausencia de arbitraje: vamos a ver un nuevo tipo de arbitraje (el asintótico). Entonces Ross plantea un modelo multifactor de k factores por ausencia de arbitraje (asintótico).

Ese modelo de mercado dice que:

$$r_j = a_j + \sum_{k=1}^{K} \underbrace{\beta_{jk}}_{\text{carga de factor}} \overbrace{\delta_k}^{\text{factor}} + \overbrace{\varepsilon_j}^{\text{riesgo idiosincrático}}$$

Ese factor pueden ser las que ya hemos visto (el mercado, el gemelo malo del mercado) pero ahora es un número arbitrario de factores. Usualmente se suelen usar hasta 4 factores.

El β_{jk} indica una especie de sensibilidad hacia ese factor. Se le llama $\beta_{jk} =$ *factor loading* o carga de factor.

Ahora vamos a ver una demostración para encontrar ese a_j. La primera forma de hacerlo es considerar que no existe riesgo idiosincrático.

22.1 Demostración sin riesgo idiosincrático

Si no hay riesgo idiosincrático, lo que se tiene es que:

$$r_j = a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \cdot \delta_k$$

Entonces lo que vamos a hacer es construir una cartera sintética s que va a tener las siguientes características:

1. Va a comprar los pesos de sus inversiones los pesos de sus factores $\rightarrow$ como si en el mercado pudieran comprarse los factores: $w_j = \beta_{jk}$.
2. Como es una cartera normal, los pesos de las inversiones tienen que sumar a 1, entonces con lo que sobre, debe cumplirse que se invierta en el activo sin riesgo:

$$w_{j0} = 1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}$$

Lo que esta cartera sintética va a rendir es:

$$r_s = \left[1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right] + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \delta_k$$

De esto sale un teorema.

Teorema 22.1 a_j tiene que ser igual a:

$$a_j = \left[1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right] \cdot r_f$$

Esto determina la constante de una acción r_j.

Esto se demuestra mediante una demostración por contradicción: si esta igualdad no se cumple, hay una oportunidad de arbitraje común y corriente.

Suponga que $a_j \neq \left[1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right] \cdot r_f$, y sin pérdida de generalidad, asuma que $a_j > \left[1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right] \cdot r_f$. También se podría demostrar con el caso donde sea menor, pero la demostración es análoga.

Entonces suponga que se compra \$1 de j genera un flujo de caja que cuesta -1 y me genera un rendimiento de $a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \delta_k$

Cartera	FC_0	FC_s
Comprar \$1 de j	-1	$a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \delta_k$

Luego se hace un *short* de \$1 de la cartera s que genera un flujo de caja positivo +1 pero un pasivo en los períodos siguientes:

Y ahora habría que ver el neto de la cartera:

Como el costo neto es de 0, esto sería una cartera autofinanciada y habría arbitraje de tipo 2 (tengo flujo de caja 0 hoy y flujo de caja positivo en el futuro).

Entonces la conclusión importante es que el rendimiento r_j va a ser igual a:

$$r_j = \left[1 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right] r_f + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} \delta_k$$

Cartera	FC_0	FC_s
Comprar \$1 de j	-1	$a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\delta_k$
Short \$1 de s	+1	$-\left[1-\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right] - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\delta_k$

Cartera	FC_0	FC_s
Comprar \$1 de j	-1	$a_j + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\delta_k$
Short \$1 de s	+1	$-\left[1-\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right] - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\delta_k$
Neto:	0	$a_j - \left[1-\sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\right]\delta_k$

Y reagrupando:

$$\begin{aligned}
r_j - r_f \equiv & \tilde{z}_j \\
= & \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\left[\delta_k - r_f\right] \\
\equiv & \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\tilde{z}_k
\end{aligned}$$

El $\tilde{z}_j$ significa que es una variable estocástica. $\tilde{z}_k$ es un rendimiento en exceso del factor k.

Y vamos a definir:

$$z_k \equiv E[\tilde{z}_k]$$

Entonces es como una 'prima' del factor k.
Ahora vamos a ver el rendimiento esperado de ese activo j:

$$z_j = \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} z_k$$

Se puede ver como una extensión del CAPM de Sharpe para multifactores. Esto lo acabamos de demostrar sin riesgo idiosincrático; no hubo que asumir preferencias de media y varianza, por lo cual es una demostración fuerte.

22.2 Demostración con riesgo idiosincrático

Hay que definir el concepto de arbitraje asintótico. Estamos en una economía grande con N activos donde $N \to \infty$. Para que haya arbitraje asintótico se deben cumplir las siguientes condiciones.

- Hay una inversión en activos riesgosos en la cartera $w^N \in \mathbb{R}^N = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$
- $\sum_{j=1}^{N} w_j^N = 0$ es decir, que es una cartera autofinanciada
- $\sum_{j=1}^{N} w_j^N r_j \geq d > 0$ siempre va a tener rendimientos positivos

- $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \to 0$ y en notación de matrices dice que $[w^N]'V[w^N] \to 0$. Esto quiere decir que el riesgo de esta cartera va despareciendo. Es muy parecido al concepto de un arbitraje tipo 2 como el que hicimos anteriormente.

Ross lo que dice es que los rendimientos en exceso van a estar debajo de un cierto límite:

$$|z_j - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} z_k| \leq L_j$$

Esto lo que está diciendo es que con riesgo idiosincrático va a ser aproximadamente cierto, y si fuera más de eso, habría arbitraje asintótico.

Entonces L_j es el límite a la desviación.

Vamos a ver los supuestos detrás de esto:

1. El valor esperado del riesgo idiosincrático $E[\varepsilon_j^2] = \sigma_j^2 < \sigma^2 < \infty$. Que tenga una varianza finita
2. $-w\frac{u''(w)}{u'(w)} = RRA(w) < R < +\infty$ la aversión relativa al riesgo debe ser finita, lo cual excluye a las utilidades CARA, las cuales tenían la aversión al riesgo absoluta constante, pero la relativa se puede ir a infinito conforme me vuelvo más rico.
   Esto es así, porque suponga que sí hay arbitraje asintótico. Entonces la varianza de la cartera va tendiendo a 0 $\sigma_w^2 \to 0$ conforme N va hacia infinito$N \to \infty$. Si tuviera una $RRA \to \infty$ no se tomaría ese riesgo asintótico, porque me afecta porque conforme tengo más dinero me vuelvo más averso al riesgo relativamente, entonces no me atravería a hacer el arbitraje asintótico.
3. Va a haber al menos un activo con responsabilidad limitada. El concepto de responsabilidad limitada en una inversión significa que lo más que yo puedo perder es lo que yo invertí.

Ross demuestra que:

$$L_j = R \exp\left\{R \cdot \frac{V_j}{N}\right\} \sigma_j^2 \left[\frac{V_j}{N}\right]$$

donde V_j es la capitalización de mercado de la empresa j y N es el número de activos y R es la RRA máxima y σ_j^2 es la varianza de los rendimientos.

Conforme $N \to \infty$ este límite se va haciendo muy pequeño. Existen otros límites posibles pero este es el más fácil de explicar y Ross dice que el límite van a ser límites muy pequeños.

22.3 Implementación empírica

Hay un artículo de 1981 de Chen, Roll y Ross donde calculan los factores macroeconómicos.

δ_k incluye factores como el mercado, la inflación, el crecimiento del PIB, etc., y encontraron que las empresas tienen sensibilidades distintas a estos factores e intentan encontrar un coste de capital en base a esto. Esto fue la primera implementación pero no se usa mucho.

Luego Fama y French en 1992 y 1993 encuentran que para la muestra de 1965-1990 hay una relación negativa entre z_j y β_j entonces dijeron que el CAPM estaba muerto y no servía para nada. Entonces lo que hacen es un modelo multifactor. Hay un artículo de Carhart de 1997 donde se consideran 4 factores z_k.

Estos factores tienen que cumplir:

- Su media tiene que ser mayor que 0 $z_k > 0$ (estadísticamente significativa mayor que 0). Tiene que ser un factor significativo.

Encontraron cuatro factores z_k significativos empíricos. Es decir que los encontraron que dieron un rendimiento positivo y fueron criticados porque no tenían una teoría para esos factores.

Vamos a ver los factores que ellos calcularon:

1. Factor de mercado $\tilde{z}_m \equiv \tilde{r}_m - r_f$. Este sale por el CAPM, y aunque ellos dicen que el CAPM estaba muerto, lo siguen usando porque hay teoría detrás.
2. Factor de tamaño $\tilde{z}_s \equiv \tilde{r}_s - r_b$. Se le conoce como SMB (*small minus big*). Es una cartera autofinanciada. La idea de esta carta es comprar las empresas más pequeñas $\tilde{r}_s$ y vender al descubierto las empresas grandes $\tilde{r}_s$. Ellos encuentran que controlando por riesgo y otros factores, a las empresas pequeñas les va mejor que a las empresas grandes. Este es el primer factor empírico.
3. Factor de valor $\tilde{z}_v \equiv \tilde{r}_H - \tilde{r}_L$. Se le conoce como HHL. Las carteras *high* tienen alto $\frac{BVE}{MVE}$ (y por ende una q de Tobin baja) y las empresas *low* tienen bajo $\frac{BVE}{MVE}$ (y por ende una q de Tobin alta). Este es el segundo factor empírico.

   Recuerde que q de Tobin $= \frac{MVE}{BVE}$, por lo cual, el HHL es decir que tienen una q de Tobin baja (*high*) son *value stocks* (por ejemplo Walmart). Una empresa con una q de Tobin alta (*low*) son *growth stocks* (por ejemplo Amazon).
4. Factor de momento: $\tilde{z}_{mom} \equiv \tilde{r}_w - \tilde{r}_\ell$. Aquí se compran carteras r_w y se venden al descubierto una cartera ℓ. $\tilde{r}_w$ son aproximadamente el 30% de empresas 'ganadoras' del pasado reciente y $\tilde{r}_\ell$ son el 30% de empresas 'perdedoras' del pasado reciente.

   Carhart se dio cuenta que los fondos activamente manejados que eran los mejores, continuamente le ganaban a los peores fondos y tenía que ver con estas estrategias. Para que haya momento tendría que ser que no se cumpla la hipótesis de la caminata aleatoria: porque esta teoría sostiene que no hay relación entre los rendimientos del pasado y los de hoy $\rightarrow$ pero aquí debería haber correlación positiva para que se cumpla el factor de momento.

Ahora vamos a proceder con calcular estos factores.

Ejemplo 22.1 — McDonald's con datos de 2010-2015. 1. Lo primero que se hace es correr una regresión multivariada del rendimiento en exceso de McDonald's (el rendimiento en la tasa libre de riesgo) z_{jt}:

$$z_{jt} = \alpha_j + \beta_{jm} z_{mt} + \beta_{js} z_{st} + \beta_{jv} + z_{jv} + \beta_{jmom} z_{momt} + \varepsilon_{jt}$$

Cuando uno calcula un rendimiento, por ejemplo $r_{jt} = 0.025$ pero en la página de Fama y French puede venir $r_{mt} = 2.5$ entonces es importante que la base sea igual para todos.

- Por ejemplo, suponga que se tiene el t- estadístico:

Factor	*m*	*s*	*v*	*mom*
t − estadstico	2.5	1.8	0.2	1.0

Aquí dado que el criterio es el t-estadístico, al 95%, se compara con 1.96. Podemos ver que solo el mercado es significativo. Entonces una opción sería quitar al menor valor, o sea el valor. Y ahora se vuelve a estimar la regresión sin el valor:

Factor	*m*	*s*	*v*	*mom*
t − estadstico	2.5	1.8	0.2	1.0
	2.7	2.0		1.5

Entonces esta vez no es significativo el factor de momento y se puede eliminar este. Luego, si en una tercera se obtuvieran 2.7 y 2.3, ahí no se quita ninguno y se corre la regresión con esas variables.

2. Se calcula el costo de capital usando la fórmula del APT:

$$z_j = \hat{\beta}_{jm} z_m + \hat{\beta}_{js} z_s$$

En buena teoría, z_m, z_s deberían 'ver' hacia el futuro, pero esto es difícil. En mercados completos, vimos que $z_m \simeq \gamma^2 \sigma^2$ era la volatilidad implícita que ve hacia el futuro. Algo que sí no se puede hacer esa usar $\bar{z}_m$ ni $\bar{z}_s$ del 2010-2015 → esto es así porque puede ser que estos datos sean poco representativos y además se quiere ver hacia el frente. Entonces se usan los datos representativos. En el caso de la base de Fama & French eso es desde 1927 al presente y con esa serie ya calcular todos los factores $\bar{z}_m, \bar{z}_s, \bar{z}_v, \bar{z}_{mom}$. Ya estos datos sí serían representativos porque estos datos contemplan una depresión, guerras, etc.

■

Ejercicio 22.1 — Preguntas del día. *Preguntas:*

1. *¿Qué es lo que encuentra el test Black-Jensen-Scholes?* → Llegan a que no aceptan ni el CAPM de Sharpe ni de Black. Explican la linealidad de los β con los α. Para esto agarraban las empresas, calculaban los β y los ordenaban de mayor a menor en deciles y con esto sacaban α en la regresión.
2. *¿Qué dice la crítica de Roll?* → Dice que los *proxy* de mercado que se usan para los *tests* empíricos del CAPM están erróneos y deberían incluir bienes raíces, etc.
   Si se rechaza el CAPM, es posible que el proxy de mercado sea incorrecto.
3. *Hable del test GRS*. → Lo que se hace es comparar las razones de Sharpe la cartera de mercado y la cartera *ex-post* eficiente. Es un *test* J.
   ¿Y ese test J qué tiene que darme? → Siempre tiene que dar positivo.
4. *¿Qué se sabe sobre el poder del test GRS?* → No es muy buen poder porque es de bajo poder.
   ¿Y qué es eso del poder? → El poder de un test se refiere a no caer en un error tipo II.
5. *¿Qué se sabe de la covarianza del factor estocástico de descuento y un activo riesgoso común y corriente?* → Normalmente es negativa.
6. *Hable acerca del factor HML.* → Este es el factor que usan Fama-French-Carhart para la prueba del APT. HML son las que se relacionan con las Q de Tobin: *high* son las empresas con q bajo porque son empresas de valor. Hay dos carteras, la *high* y *low*.
   ¿Empíricamente qué piensa la gente de ese factor? → Que es positivo por lo general.
7. *Hable del factor de momento.* → Dice qué tanto se ven afectados los rendimientos futuros con el pasado. Si no es significativo se dice que no afecta del todo.
   ¿Algo más? → Se compra una cartera con el 30% de rendimiento más alto y se hace un *short* del 30% con el rendimiento más bajo.

   Además va en contra de la idea de la caminata aleatoria. En el factor HML también hay un riesgo de que la empresa esté sobrevalorada (las empresas con q de Tobin muy alta pueden ser una burbuja).
   En *momentum* se va encontra de la caminata aleatoria; no toda la información disponible ha impactado sobre el precio y por eso puede seguir creciendo. Aquí es lo de los ganadores y perdedores.

■

Index

economía financiera