Universidad de Costa Rica

Comercio Internacional

Jose Miguel Mora Casasola

I semestre, 2024

Última compilación: 22 de junio de 2024

Cualquier consulta o corrección del material escriba a:
JOSE.MORACASASOLA@ucr.ac.cr

Índice

1. Repaso de conocimientos de microeconomía

1.1. Ejercicio

Considere una empresa que tiene la siguiente función de producción

$$q = \delta z_1 + min\left\{az_1, bz_2\right\}$$

1. Obtenga la función de costo marginal (grafíquela), la oferta y la función de ganancia de la empresa para cada caso posible.
2. Determine cómo cambiaría sus respuestas si la función de producción es $q = \left[\delta z_1 + min\left\{az_1, bz_2\right\}\right]^{\frac{1}{\rho}}$

$$q = \delta z_1 + \text{mín}\{a z_1, b z_2\}$$

Caso A $\dfrac{w_1}{w_2} > \dfrac{\delta}{b}$

$$a z_1 = b z_2$$

$$q = z_1(\delta + a)$$

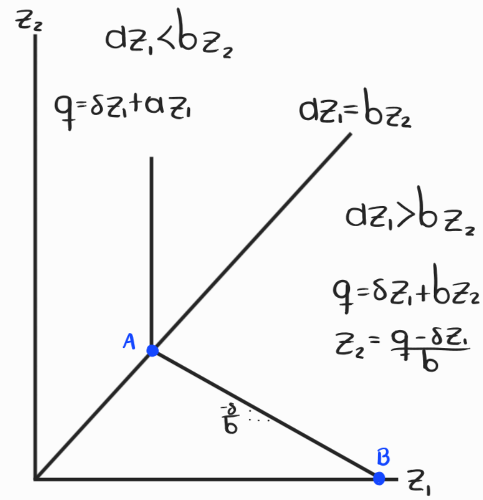
$$z_1 = \frac{q}{\delta + a} \Rightarrow z_2 = \frac{a}{b}\left(\frac{q}{\delta + a}\right)$$

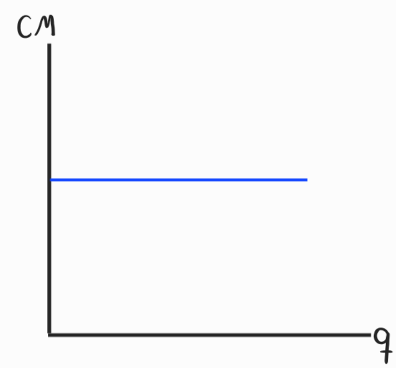
$$C^*(p_1, p_2, q) = w_1 \frac{q}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{q}{\delta + a}\right)$$

$$C^*(p_1, p_2, q) = q\left[w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\delta + a}\right)\right]$$

$$CM = w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\delta + a}\right)$$

$$\pi = P \cdot q - q\left[w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\delta + a}\right)\right]$$





Note que si:

$$\begin{cases} P > w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\delta + a}\right) \Rightarrow \text{La empresa produce } \infty \\ P < w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\delta + a}\right) \Rightarrow \text{La empresa produce } 0 \\ P = w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\delta + a}\right) \Rightarrow \text{La empresa produce indeterminado} \end{cases}$$

Caso B $\dfrac{w_1}{w_2} < \dfrac{\delta}{b}$

$$z_2 = 0$$

$$q = \delta z_1$$

$$C^* = \delta^{-1} w_1 q$$

$$CM = \delta^{-1} w_1$$

$$\pi = Pq - \delta^{-1} w_1 q$$

$$\begin{cases} \text{Si } P > \delta^{-1} w_1 \Rightarrow q \to \infty \\ \text{Si } P = \delta^{-1} w_1 \Rightarrow \text{no hay solución única para } q \\ \text{Si } P < \delta^{-1} w_1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Si $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\delta}{b}$ no hay solución única.

Si $q = \left[\delta z_1 + \min\{a z_1, b z_2\}\right]^{\sigma} \Longrightarrow q^{\frac{1}{\sigma}} = \delta z_1 + \min\{a z_1, b z_2\}$

Sea $\tilde{q} = q^{\frac{1}{\sigma}}$

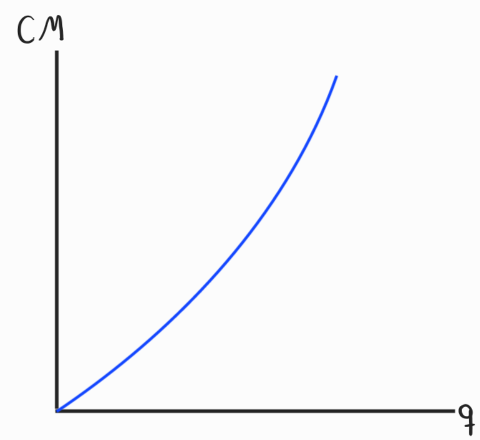
La solución sería la misma sólo que cambiando q por $\tilde{q}$

$$C^*(p_1, p_2, q) = q^{\frac{1}{\sigma}} \left[w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b} \left(\frac{1}{\delta + a} \right) \right]$$

$$CM = \frac{1}{\sigma} q^{\frac{1}{\sigma} - 1} \left[w_1 \frac{1}{\delta + a} + w_2 \cdot \frac{a}{b} \left(\frac{1}{\delta + a} \right) \right]$$

Si consideramos $\sigma < 1$ el CM tiene pendiente positiva.

Según el σ puede ser convexa o cóncava.



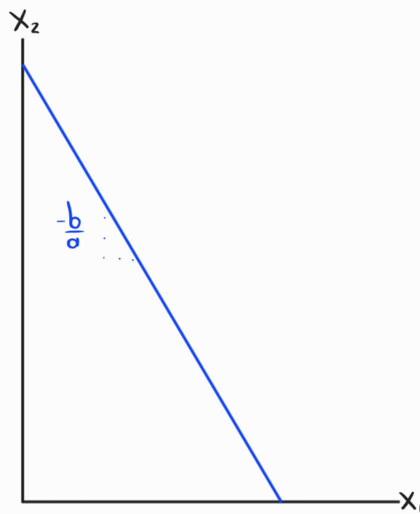
1.2. Ejercicio

Considere un individuo que presenta la siguiente función de utilidad

$$u = \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}$$

1. Obtenga las demandas ordinarias para cada uno caso posible.
2. Obtenga la función de mínimo gasto para cada uno caso posible.
3. Obtenga la función de utilidad indirecta para cada uno caso posible.

$u = \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}$



Si $\frac{b}{a} > \frac{p_1}{p_2}$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1}$

$x_1 = a \cdot u$

$V = \frac{a^{-1} m}{p_1}$

$G^*(p_1, p_2, u) = p_1 \cdot a \cdot u$

Si $\frac{b}{a} < \frac{p_1}{p_2}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{m}{p_2}$

$x_2 = b \cdot u$

$V = \frac{b^{-1} m}{p_2}$

$G^*(p_1, p_2, u) = p_2 b \cdot u$

Si $\frac{b}{a} = \frac{p_1}{p_2}$

No hay solución única

1.3. Ejercicio

Sean z_1 y z_2 los factores de producción, se tiene que una empresa presenta la siguiente función de producción:

$$q = (\alpha_1 z_1^{\rho} + \alpha_2 z_2^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}$$

Se sabe que los precios de z_1 y z_2 son w_1 y w_2 respectivamente.

1. Encuentre las demandas condicionadas para z_1 y z_2.

2. Encuentre la función de costo total y grafíquela.

3. Encuentre la curva de oferta de la empresa en competencia perfecta.

$$PM_1 = \frac{1}{\rho} \cdot y \cdot \left(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}\right)^{-1} \cdot \rho \cdot \alpha_1 x_1^{\rho-1}$$

$$TMST_{12} = \frac{\alpha_1 x_1^{\rho-1}}{\alpha_2 x_2^{\rho-1}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow x_1 = \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{1}{\rho-1}} x_2$$

$$y^{\rho} = \alpha_1 \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} x_2^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho}$$

$$y^{\rho} = x_2^{\rho} \left[\alpha_1 \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha_2\right]$$

$$x_2 = y \left[\alpha_1 \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha_2\right]^{\frac{-1}{\rho}}$$

$$x_1 = y \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{1}{\rho-1}} \left[\alpha_1 \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha_2\right]^{\frac{-1}{\rho}}$$

$$CT = y \underbrace{\left[\omega_1 \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{1}{\rho-1}} \left[\alpha_1 \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha_2\right]^{\frac{-1}{\rho}} + \omega_2 \left[\alpha_1 \left[\frac{\alpha_2 \omega_1}{\alpha_1 \omega_2}\right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \alpha_2\right]^{\frac{-1}{\rho}}\right]}_{c}$$

Dado que $\frac{\partial CT}{\partial y} = c$, $c \in \mathbb{R}$ $\wedge$ $\frac{\partial^2 CT}{\partial y^2} = 0$ entonces es lineal creciente.

Oferta:

$$\text{Si} \begin{cases} P > C \Rightarrow y \to \infty \\ P = C \Rightarrow 0 \leq y \leq \infty \\ P < C \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

1.4. Ejercicio

Considere la siguiente función de utilidad a la que se enfrenta un individuo

$$U(x_1, x_2) = \ln(x_1 - x_2)$$

El bien x_2 es relativamente escaso, es decir, hay una mayor cantidad del bien x_1 que del bien x_2 en la economía.

1. Obtenga la utilidad marginal de x_1 y x_2 e interprete sus resultados.
2. Obtenga las demandas marshallianas.
3. Obtenga las demandas hicksianas.
4. Obtenga la función de utilidad indirecta.
5. Obtenga la función de mínimo gasto.
6. Grafique las curvas de indiferencia.

$$U=\ln(x_1-x_2)$$

$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{x_1-x_2} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{1}{x_1-x_2}\cdot -1$ $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}>0 \Rightarrow x_1 \text{ es un bien}\right)$

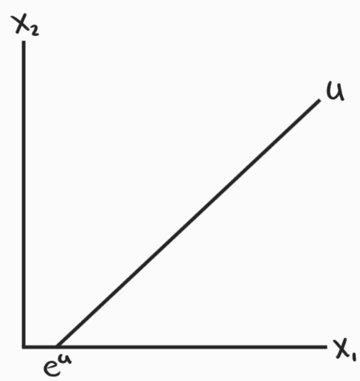
Note que $\frac{\partial u}{\partial x_2}<0$ porque $x_1>x_2$ $\left(x_2 \text{ es un mal} \Rightarrow x_2=0\right)$

$x_1=\frac{m}{p_1} \wedge x_1=e^u \wedge V=\ln\left(\frac{m}{p_1}\right) \wedge G=p_1e^u$

Para graficar se utiliza derivación implícita

$$U=\ln(x_1-x_2)$$

$$0=\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\left(1-\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right) \Rightarrow \frac{\partial x_2}{\partial x_1}=1 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_2}{\partial x_1^2}=0$$



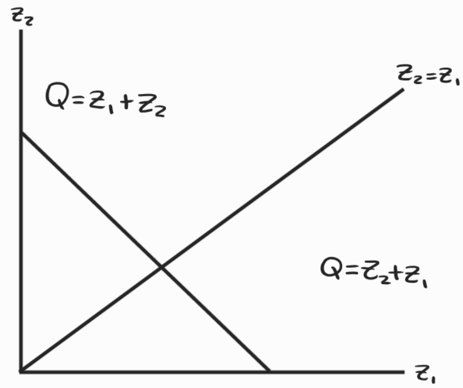
1.5. Ejercicio

Considere la siguiente función de producción

$$Q(z_1, z_2) = min\{z_1, z_2\} + max\{z_1, z_2\}$$

1. Encuentre las demandas condicionadas para cada factor de producción en cada caso.
2. Encuentre la oferta de la empresa si existe.

$$Q = \text{mín}\{z_1, z_2\} + \text{máx}\{z_1, z_2\}$$



Si $\frac{w_1}{w_2} > 0 \implies z_1 = 0 \ \wedge \ z_2 = Q$

Si $\frac{w_1}{w_2} < 0 \implies z_2 = 0 \ \wedge \ z_1 = Q$

Si $\frac{w_1}{w_2} = 0 \implies \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_1 + z_2 = \overline{Q}$

Note que en todos los casos $CM = C$ con $C \in \mathbb{R}^+$ por lo que:

Si $P > C \implies Q \to \infty$

Si $P = C \implies Q \in [0, \infty]$

Si $P < C \implies Q = 0$

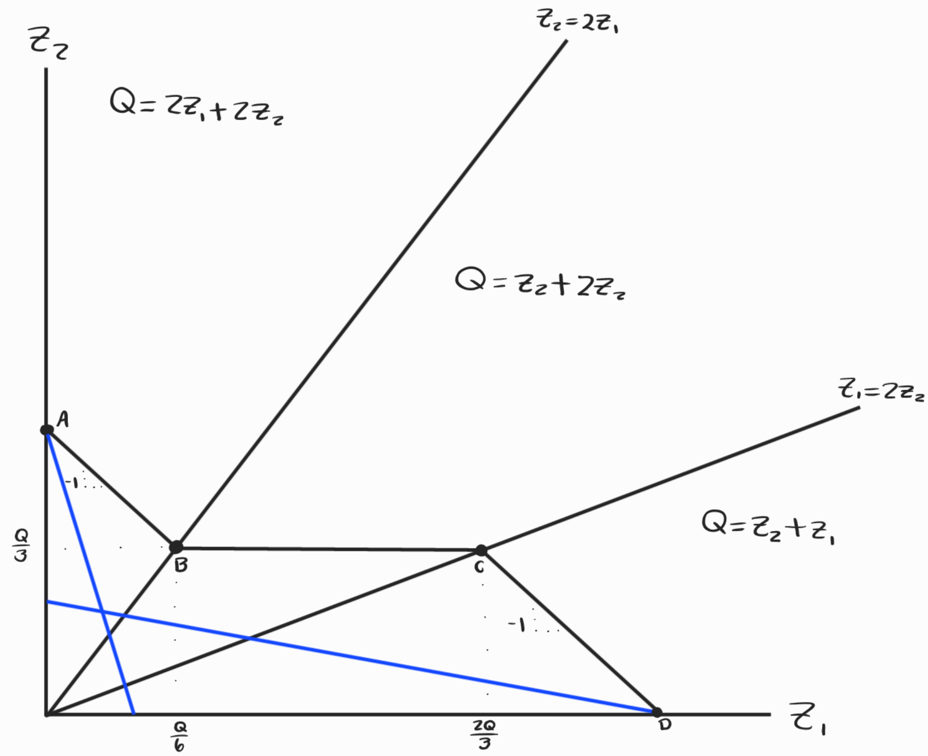
1.6. Ejercicio

Considere la siguiente función de producción

$$Q(z_1, z_2) = min\{2z_1, z_2\} + max\{z_1, 2z_2\}$$

1. Encuentre las demandas condicionadas para cada factor de producción en cada caso.
2. Encuentre la oferta de la empresa si existe.

$Q = \min\{2z_1, z_2\} + \max\{z_1, 2z_2\}$



Si $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$: $\forall (z_1, z_2) \in \overline{AB}$ (cualquier punto en A-B)

Si $\frac{\omega_1}{\omega_2} > 1$: $z_1 = 0 \wedge z_2 = \frac{Q}{2}$ (caso A)

Si $\frac{\omega_1}{\omega_2} < 1$: $z_2 = 0 \wedge z_1 = Q$ (caso D)

Note que en todos los casos $CM = c$ con $c \in \mathbb{R}^+$ por lo que:

Si $P > c \Rightarrow Q \to \infty$

Si $P = c \Rightarrow Q \in [0, \infty]$

Si $P < c \Rightarrow Q = 0$

2. Modelo Clásico o Ricardiano

2.1. Ejercicio

Considere un mundo en el que sólo existe el país A y el país B, además, sólo existe dos bienes, x_1 y x_2, y un factor de producción, z. Se sabe que el país A requiere de a_1^A unidades para producir una unidad de x_1 y a_2^A unidades para producir una unidad de x_2. Por su parte, el país B requiere de a_1^B unidades y a_2^B unidades para producir una unidad de x_1 y x_2 respectivamente. Además, la dotación del factor de producción para el país A y el país B corresponde a $\bar{Z}^A$ y $\bar{Z}^B$ respectivamente y se conoce la siguiente relación:

$$a_1^B > a_2^B > a_2^A > a_1^A$$

1. Obtenga la función de producción de x_1 y x_2 para cada país.
2. Uno de los supuestos del modelo Ricardiano es que existen rendimientos constantes a escala, verifique que dadas las funciones de producción del inciso anterior se cumple.
3. Obtenga la frontera de posibilidades de producción para ambos países. ¿Qué implica que existan rendimientos constantes a escala con un sólo factor de producción?
4. Determine los precios de autarquía para ambos países.
5. Determine cuál es el intervalo en el que se encontraría el precio relativo si los países se abren al comercio y cuál sería la producción relativa de los bienes. Explique que pasaría si el precio relativo internacional estuviera fuera de ese rango.
6. Grafique la oferta relativa para cada uno de los casos.
7. Suponga que el país B logró aumentar la población económicamente activa lo que conlleva a un mayor $\bar{L}^B$, identifique qué sucede ante dicho cambio.
8. Suponga que ahora es el país A el que logró aumentar la población económicamente activa lo que conlleva a un mayor $\bar{L}^A$, identifique qué sucede ante dicho cambio.
9. Volviendo a la situación inicial, el país A descubre una nueva tecnología que conlleva a que disminuya la cantidad del factor de producción z que se necesita para producir una unidad de x_1.

1)
$$X_1^A = \frac{Z_1^A}{a_1^A}, \quad X_2^A = \frac{Z_2^A}{a_2^A} \quad ; \quad X_1^B = \frac{Z_1^B}{a_1^B}, \quad X_2^B = \frac{Z_2^B}{a_2^B}$$

2) Sea $i = 1,2 \ \wedge \ j = A,B$

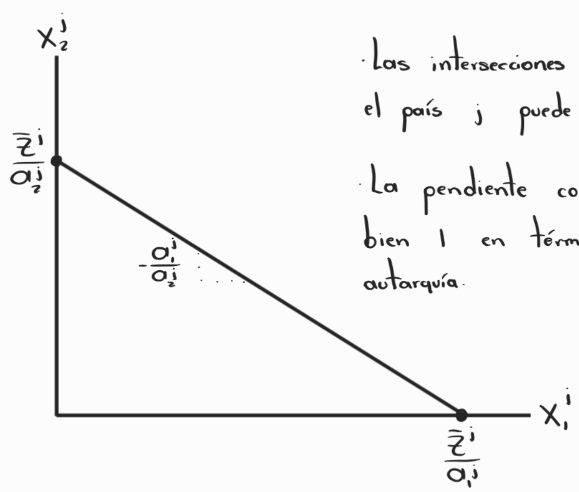
$$X_i^j(Z_i^j) = \frac{Z_i^j}{a_i^j} \Rightarrow X_i^j(\lambda Z_i^j) = \frac{\lambda Z_i^j}{a_i^j} = \lambda^1 X_i^j$$

La función es homogénea de grado 1 lo que implica que hayan rendimientos constantes a escala. Esto significa que si se multiplica el trabajo por λ se obtiene la producción multiplicada por λ.

3)
$$\bar{Z}^A = Z_1^A + Z_2^A \Rightarrow \bar{Z}^A = a_1^A X_1^A + a_2^A X_2^A \quad \wedge \quad \bar{Z}^B = Z_1^B + Z_2^B \Rightarrow \bar{Z}^B = a_1^B X_1^B + a_2^B X_2^B$$

Dado que sólo hay un factor de producción y hay rendimientos constantes a escala, la FPP es líneal y la TMT es constante.

$$\bar{Z}^j = a_1^j X_1^j + a_2^j X_2^j \Rightarrow X_2^j = \frac{\bar{Z}^j - a_1^j X_1^j}{a_2^j}$$



· Las intersecciones corresponden a la máxima cantidad que el país j puede producir del bien i.

· La pendiente corresponde a los costos de oportunidad del bien 1 en términos del bien 2; son los precios de autarquía.

4)
$$p^A \equiv \frac{p_1^A}{p_2^A} = \frac{a_1^A}{a_2^A} \quad \wedge \quad p^B \equiv \frac{p_1^B}{p_2^B} = \frac{a_1^B}{a_2^B}$$

Dado que:
$$a_1^B > a_2^B > a_2^A > a_1^A \Rightarrow \frac{a_1^A}{a_2^A} < 1 \quad \wedge \quad \frac{a_1^B}{a_2^B} > 1 \Rightarrow \frac{a_1^B}{a_2^B} > \frac{a_1^A}{a_2^A} \Rightarrow p^B > p^A$$

5)

Sea $p^w \equiv \frac{p_1^w}{p_2^w} \wedge X^w \equiv \frac{X_1^w}{X_2^w}$

Si $p^w \notin [p^A, p^B]$ ambos países se especializarían en el mismo bien lo cuál no tiene mucho sentido económicos.

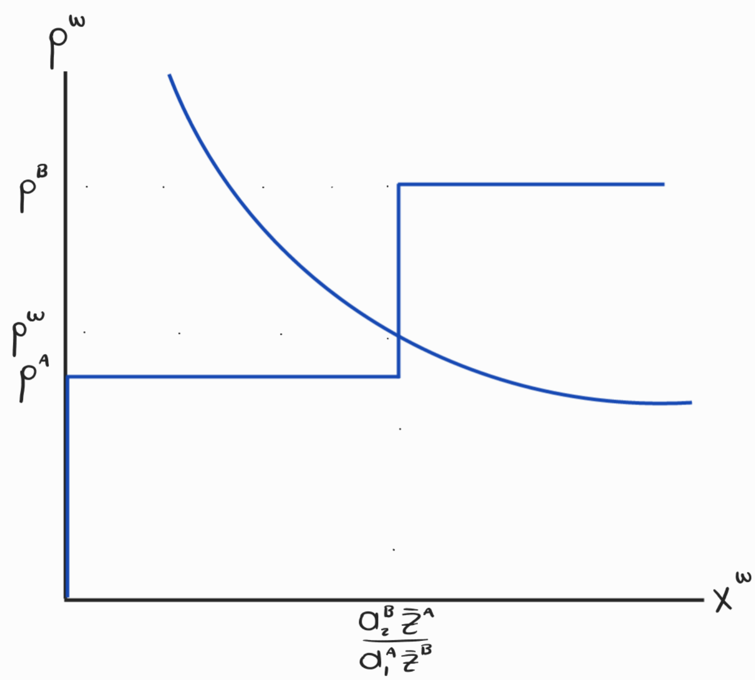
- Si $p^w > p^B$ todos se especializarían en $X_1 \Rightarrow X^w = \frac{\frac{\bar{z}^A}{a_1^A} + \frac{\bar{z}^B}{a_1^B}}{0} = \infty$
- Si $p^w < p^A$ todos se especializarían en $X_2 \Rightarrow X^w = \frac{0}{\frac{\bar{z}^A}{a_2^A} + \frac{\bar{z}^B}{a_2^B}} = 0$

Si $p^w \in]p^A, p^B[$ el país A se especializa en X_1 y el país B en $X_2 \Rightarrow X^w = \frac{\frac{\bar{z}^A}{a_1^A}}{\frac{\bar{z}^B}{a_2^B}}$

Este es el caso que tiene más sentido.

Si $p^w = p^A \vee p^w = p^B$ la solución podría estar entre una de las 3 opciones anteriores.

6)

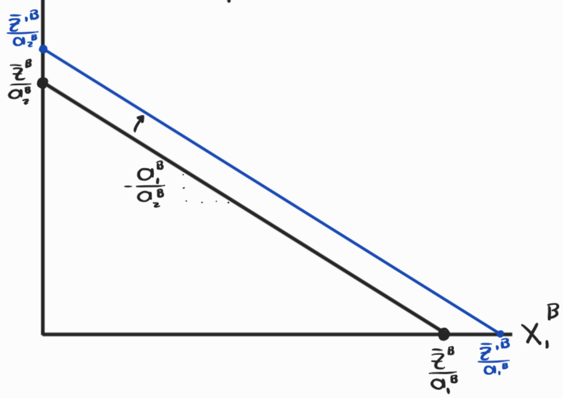


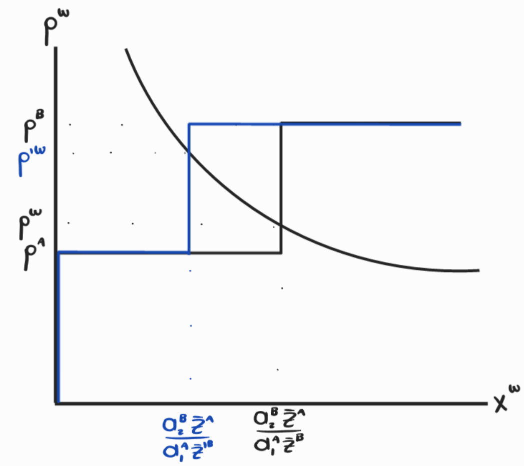
7) $\bar{\bar{z}}'^B = \bar{\bar{z}}^B + \Delta \bar{\bar{z}}^B$

· La FPP se desplaza hacia arriba, no rota.

· El p^B no cambia porque no están cambiando los costos de oportunidad.

· El p^ω cambia



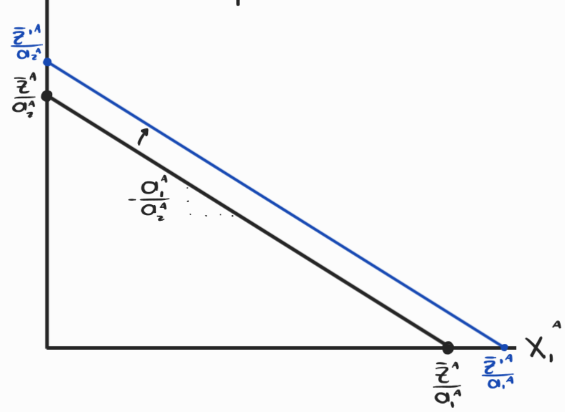


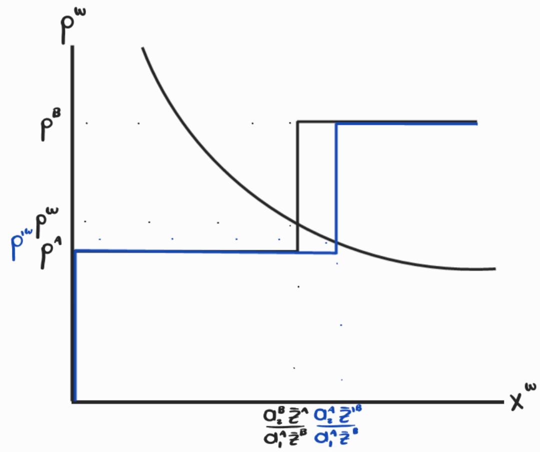
8) $\bar{\bar{z}}'^A = \bar{\bar{z}}^A + \Delta \bar{\bar{z}}^A$

· La FPP se desplaza hacia arriba, no rota.

· El p^A no cambia porque no están cambiando los costos de oportunidad.

· El p^ω cambia

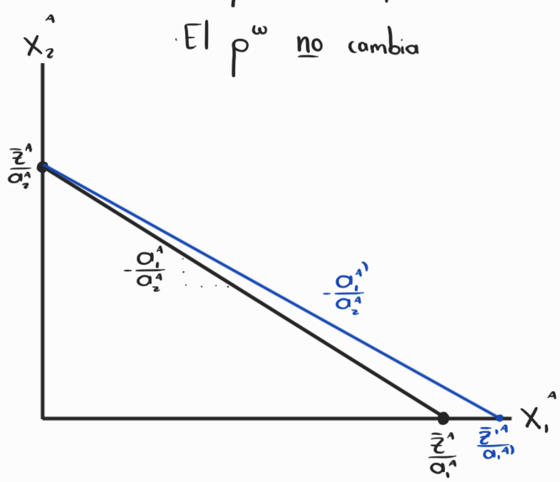


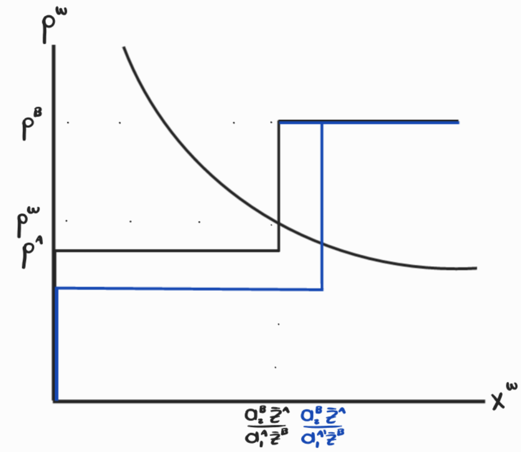


9)

$$a_1^{A)} = a_1^A - \Delta a_1^A \Rightarrow \frac{a_1^{A)}}{a_2^A} < \frac{a_1^A}{a_2^A} \Rightarrow p^{A)} < p^A$$

- La FPP no se desplaza hacia arriba, ahora rota.
- El p^A cambia porque están cambiando los costos de oportunidad.
- El p^w no cambia





2.2. Ejercicio

Suponga que el mundo se divide en dos regiones, A y B, y que existen bienes (x_1) y servicios (x_2). La región A tiene una población de 5 (*billions*) y la región B de 3 (*billions*). Las funciones de producción vienen dadas por:

$$x_1^A = \sqrt{L_1^A} \quad , \quad x_2^A = 2L_2^A \quad , \quad x_1^B = \sqrt{L_1^B} \quad , \quad x_2^B = L_2^B$$

1. Grafique la frontera de posibilidad de producción (FPP) para cada país (Muestre como obtuvo la pendiente, concavidad e interceptos con los ejes). **30 puntos**

2. Determine la producción de cada país para bienes y servicios según una relación de precios internacionales (Pistas: Se recomienda trabajar la relación de precios internacionales como P donde $P = \frac{p_1}{p_2}$. Recuerde que el óptimo de producción es un punto donde la pendiente de la FPP se iguale a la relación de precios). **30 puntos**

3. Grafique la oferta relativa para la economía mundial (Muestre como obtuvo la pendiente, concavidad e intercepto con el eje). **40 puntos**

Región A

$$X_1^A = \sqrt{L_1^A}$$

$$X_2^A = 2L_2^A$$

$$5 = \underbrace{\left(X_1^A\right)^2 + \frac{1}{2}X_2^A}$$

$$\frac{\partial X_2^A}{\partial X_1^A}: \; 0 = 2X_1^A + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial X_2^A}{\partial X_1^A}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X_2^A}{\partial X_1^A} = -4X_1^A \quad \text{(pendiente negativa)}$$

$$\frac{\partial^2 X_2^A}{\partial X_1^{A2}} = -4 \quad \text{(cóncavo)}$$

$$\cap_{X_2^A}: \; X_1^A = 0 \quad \wedge \quad X_2^A = 10$$

$$\cap_{X_1^A}: \; X_2^A = 0 \quad \wedge \quad X_1^A = \sqrt{5}$$

Región B

$$X_1^B = \sqrt{L_1^B}$$

$$X_2^B = L_2^B$$

$$3 = \underbrace{\left(X_1^B\right)^2 + X_2^B}$$

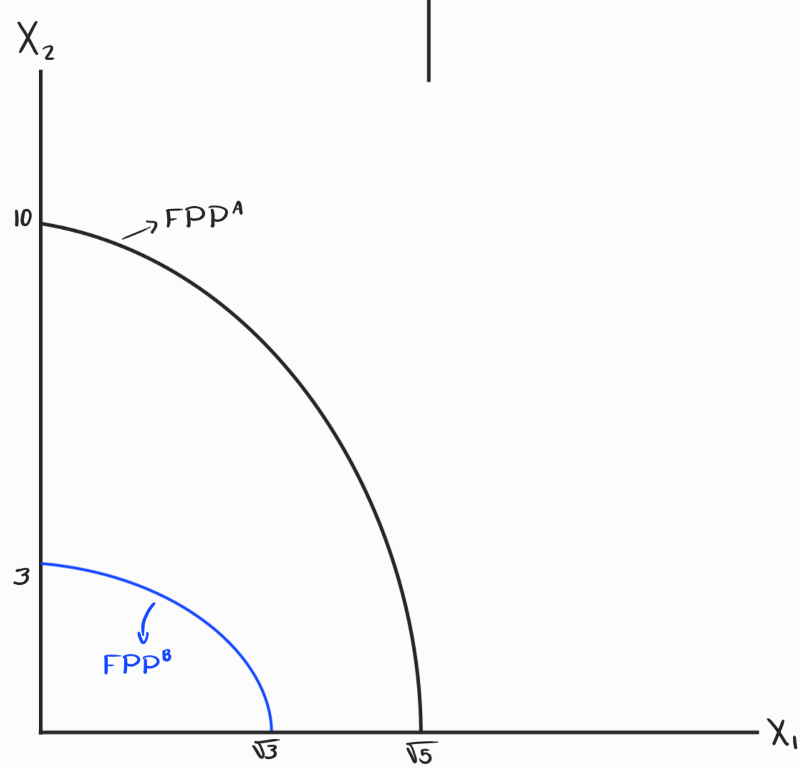
$$\frac{\partial X_2^B}{\partial X_1^B}: \; 0 = 2X_1^B + 1\cdot\frac{\partial X_2^B}{\partial X_1^B}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X_2^B}{\partial X_1^B} = -2X_1^B \quad \text{(pendiente negativa)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 X_2^B}{\partial X_1^{B2}} = -2 \quad \text{(cóncavo)}$$

$$\cap_{X_2^B}: \; X_1^B = 0 \quad \wedge \quad X_2^B = 3$$

$$\cap_{X_1^B}: \; X_2^B = 0 \quad \wedge \quad X_1^B = \sqrt{3}$$



2)

Región A

$$TMT = \left|\frac{\partial X_2^A}{\partial X_1^A}\right| = 4X_1^A$$

$$TMT = P = \frac{P_1}{P_2}$$

$$4X_1^A = P \Rightarrow X_1^A = \frac{P}{4}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{P^2}{16} + \frac{1}{2}X_2^A \Rightarrow X_2^A = 10 - \frac{P^2}{8}$$

Región B

$$TMT = 2X_1^B$$

$$TMT = P \Rightarrow 2X_1^B = P \Rightarrow X_1^B = \frac{P}{2}$$

$$\Rightarrow 3 = \left(\frac{P}{2}\right)^2 + X_2^B \Rightarrow X_2^B = 3 - \frac{P^2}{4}$$

3) $$\frac{X_1^m}{X_2^m} = \frac{X_1^A + X_1^B}{X_2^A + X_2^B} = \frac{\frac{3}{4}P}{13 - \frac{3}{8}P^2}$$

¡Por derivadas está difícil!

Pero vea que si $\uparrow P \Rightarrow \dfrac{\uparrow \frac{3}{4}P}{(13 - \frac{3}{8}P^2)\downarrow}$ entonces en general $\uparrow \frac{X_1^m}{X_2^m}$ (pendiente positiva)

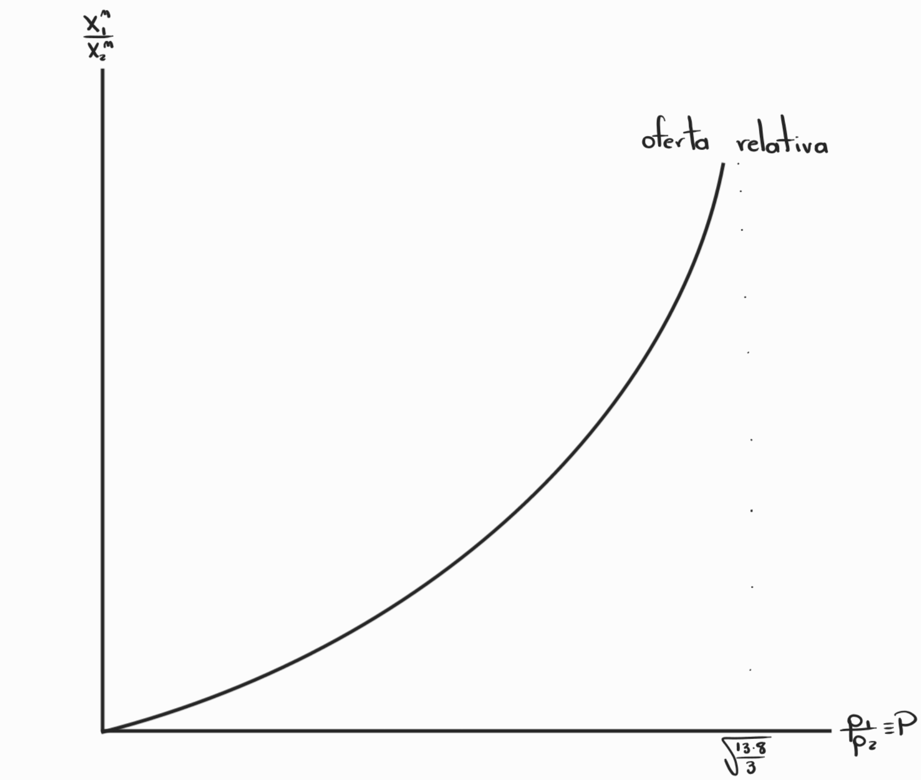
Concavidad:

Además, es convexo cuando $\frac{X_1^m}{X_2^m} > 0$ ¿Cómo lo sé? por el denominador.

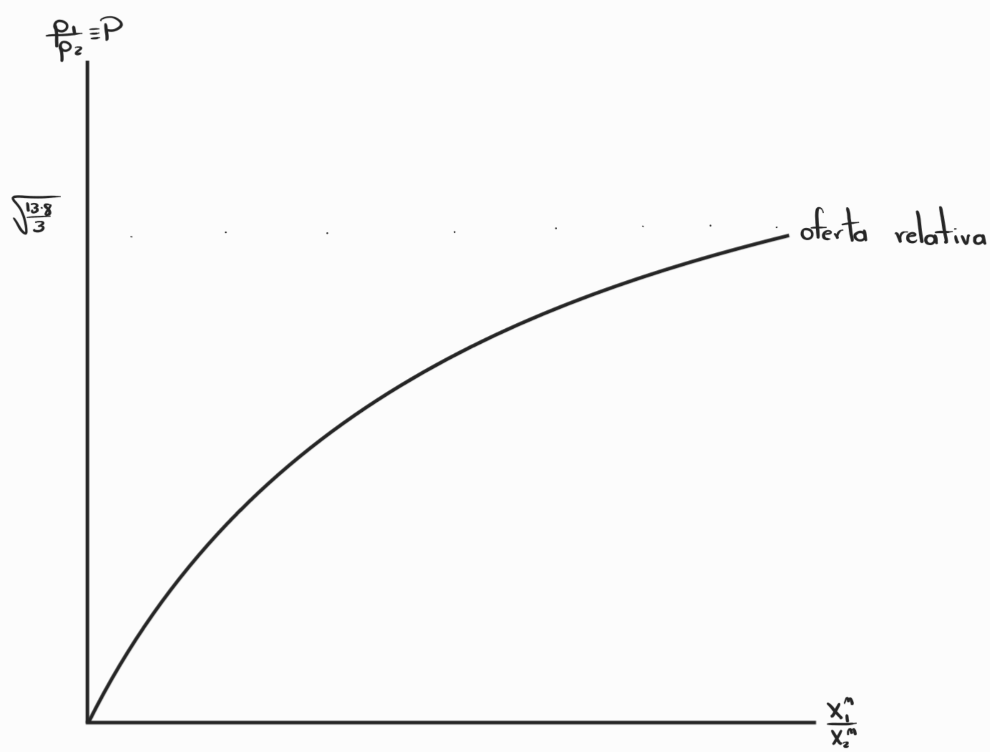
Vea que $\left(13 - \frac{3}{8}P^2\right)$ decrece cada vez más conforme $\uparrow P$ por lo que $\dfrac{\frac{3}{4}P}{13 - \frac{3}{8}P^2}$ crece cada vez más ya que $\frac{3}{4}P$ es lineal.

Otra forma de verlo sería:

Sea $f(x) = 13 - \frac{3}{8}P^2$, entonces $f(x)$ es concávo por lo que $f^{-1}(x) = \frac{1}{13 - \frac{3}{8}P^2}$ es convexo y dado que $g(x) = \frac{3}{4}P$ es lineal entonces $g(x) \cdot f^{-1}(x)$ es convexo.



$\frac{X_1^m}{X_2^m}$
oferta relativa
$\sqrt{\frac{13 \cdot 8}{3}}$
$\frac{p_1}{p_2} \equiv P$



$\frac{p_1}{p_2} \equiv P$
$\sqrt{\frac{13 \cdot 8}{3}}$
oferta relativa
$\frac{X_1^m}{X_2^m}$

2.3. Ejercicio

Considere una economía de dos países: Costa Rica (CR) y Panamá (PAN), que tienen unas funciones de producción dadas por

$$Q_1^{CR} = \frac{L_1^{CR}}{2} \qquad \wedge \qquad Q_2^{CR} = L_2^{CR} \qquad \wedge \qquad Q_1^{PAN} = L_1^{PAN} \qquad \wedge \qquad Q_2^{PAN} = \frac{L_2^{PAN}}{2}$$

Donde Q corresponde a la producción y L a la cantidad de trabajo utilizado en ese bien para ese país. La dotación para cada país de trabajo es 1.
Además, la función de utilidad social (o también se puede interpretar como que en cada país vive un sólo individuo) es la misma en cada país

$$U = C_1 C_2$$

1. Obtenga el equilibrio de autarquía.
2. Si ambos países comercian entre sí, determine el rango de precios para el cual tiene sentido el comercio.
3. Determine y grafique la oferta relativa, la demanda relativa (esta se obtiene de la condición de optimalidad en el consumo), el precio relativo de equilibrio en el rango de precios que tiene sentido el comercio, la producción y el consumo de cada bien en cada país.

1)

CR y PAN

$Q_1^{CR} = \frac{L_1^{CR}}{2} \quad \wedge \quad Q_2^{CR} = L_2^{CR}$

$Q_2^{PAN} = \frac{L_2^{PAN}}{2} \quad \wedge \quad Q_1^{PAN} = L_1^{PAN}$

$U^i = C_1^i \cdot C_2^i \quad ; \quad i = CR, PAN$

CR	PAN
$1 = 2Q_1^{CR} + Q_2^{CR}$	$1 = 2Q_2^{PAN} + Q_1^{PAN}$
$\left\lvert \frac{\partial Q_2^{CR}}{\partial Q_1^{CR}} \right\rvert = 2 = \frac{P_1^{CR}}{P_2^{CR}}$	$\left\lvert \frac{\partial X_2^{PAN}}{\partial X_1^{PAN}} \right\rvert = \frac{1}{2} = \frac{P_1^{PAN}}{P_2^{PAN}}$
$TMS_{12} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{P_1}{P_2} = 2$	$TMS_{12} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow C_2 = 2C_1$	$\Rightarrow 2C_2 = C_1$
$\Rightarrow C_1^{CR} = \frac{1}{4} \wedge C_2^{CR} = \frac{1}{2}$	$\Rightarrow C_1^{CR} = \frac{1}{2} \wedge C_2^{CR} = \frac{1}{4}$

$C = Q$ en autarquía

2)

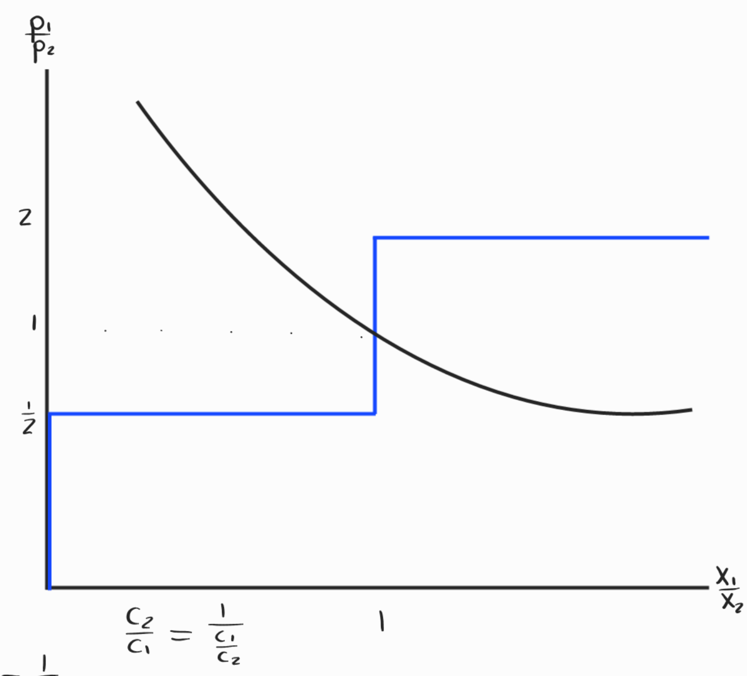
$\frac{P_1^*}{P_2^*} \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$

Si $\frac{P_1^*}{P_2^*} > 2 \Rightarrow \underbrace{Q_1^{CR} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad Q_2^{CR} = 0 \quad \wedge \quad Q_1^{PAN} = 1 \quad \wedge \quad Q_2^{CR} = 0}_{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{3}{2}}{0} = \infty}$

Si $\frac{P_1^*}{P_2^*} < \frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{Q_2^{CR} = 1 \quad \wedge \quad Q_1^{CR} = 0 \quad \wedge \quad Q_2^{PAN} = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad Q_1^{CR} = 0}_{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{0}{\frac{3}{2}} = 0}$

Si $\frac{1}{2} < \frac{P_1^*}{P_2^*} < 2 \Rightarrow \underbrace{Q_1^{PAN} = 1 \quad , \quad Q_2^{PAN} = 0 \quad , \quad Q_2^{CR} = 1 \quad , \quad Q_1^{CR} = 0}_{\frac{Q_1}{Q_2} = 1}$

3)



$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{X}$

Demanda relativa

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{\frac{C_1}{C_2}} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-1}{x^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}$$

Si $\frac{P_1^*}{P_2^*} = 1$

$$\Rightarrow Q_1^{PAN} = 1 \quad , \quad Q_2^{PAN} = 0 \quad , \quad Q_2^{CR} = 1 \quad , \quad Q_1^{CR} = 0$$

$$C_2^i = C_1^i \qquad \forall i = CR, PAN$$

$$1 = 2C_1^i$$

$$C_1^i = C_2^i = \frac{1}{2} \qquad \forall i = CR, PAN$$

2.4. Ejercicio

Considere el siguiente enunciado:

> En un mundo de dos países y sólo dos bienes x_1 y x_2 donde sólo se utiliza trabajo como factor de producción y los recursos se utilizan de forma plena, se sabe que el país A tiene una población de 10000 habitantes igual que el país B. Además, el país A requiere de dos trabajadores para producir una unidad de x_1 y de 3 trabajadores para producir una unidad de x_2 mientras que el país B requiere de un trabajador y dos trabajadores para producir una unidad del bien x_1 y x_2 respectivamente.

1. Determine quién tiene ventaja absoluta y comparativa en cada bien y justifique su respuesta.
2. Determine la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP) para cada país y grafíquelas. (Determine la intersección con los ejes y explique qué significa dicha intersección).
3. Calcule los precios de autarquía y a qué corresponden esos precios de autarquía.
4. Explique en qué rango debería de estar los precios relativos internacionales y qué pasaría si no estuviera en ese rango.
5. Grafique la oferta relativa (Agréguele etiquetas a los ejes para valores relevantes)
6. Suponga que la población del país A ahora es de 12000. Determine qué efecto tiene esto sobre el modelo. (FPP, oferta relativa, precios internacionales, óptimo de producción relativa, etc.)
7. Analize la perturbación del inciso anterior utilizando el modelo DFS (Modelo ricardiano en versión continua).
    - Escriba las ecuaciones que se determinan en el modelo.
    - Explique cuál ecuación cambia y grafíque.
    - Explique cómo cambió el equilibrio ante la perturbación.

$\bar{L}^A = \bar{L}^B = 10\ 000$

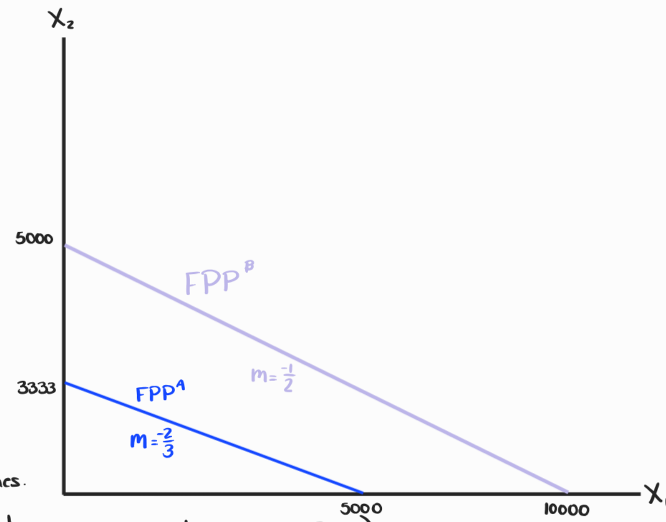
$X_1^A = \frac{L_{x_1}^A}{2} \quad \wedge \quad X_2^A = \frac{L_{x_2}^A}{3} \quad \wedge \quad X_1^B = L_{x_1}^B \quad \wedge \quad X_2^B = \frac{L_{x_2}^B}{2}$

FFP^A:

$10\ 000 = 2X_1^A + 3X_2^A \Rightarrow X_2^A = \frac{10\ 000}{3} - \frac{2}{3}X_1^A$

FPP^B:

$10\ 000 = X_1^B + 2X_2^B \Rightarrow X_2^B = 5\ 000 - \frac{1}{2}X_1^B$



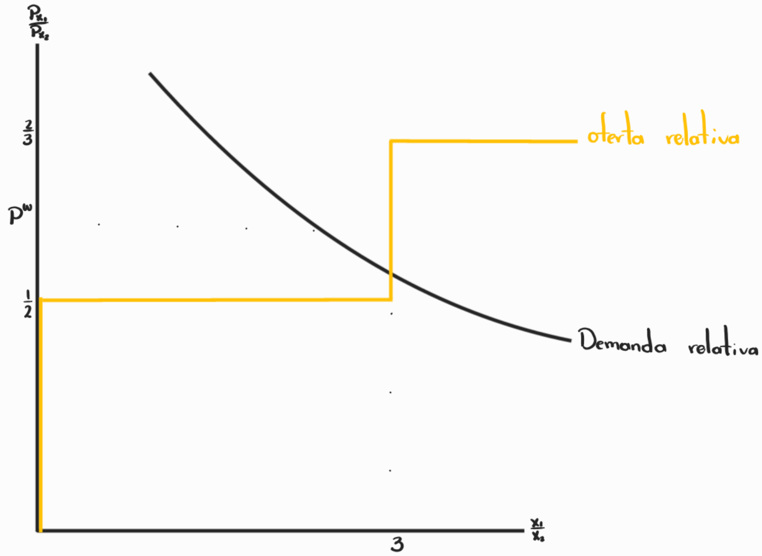
Ventaja absoluta: un país tiene ventaja absoluta si con los mismos factores de producción (10 000 trabajadores) puede producir más.
País B tiene ventaja absoluta en ambos bienes.
(se puede ver gráficamente como que FPP^B está siempre arriba que FPP^A.)

El costo de oportunidad es $\frac{\partial X_2}{\partial X_1} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, el país A tiene un costo de oportunidad mayor para X_1 por lo que tiene ventaja comparativa en el bien X_2 y país B tiene ventaja comparativa en el bien X_1. (eso gráficamente se logra ver comparando la pendiente)

Las intersecciones son las máximas cantidades de producción si hay especialización.

$P^A = \frac{P_{x_1}^A}{P_{x_2}^A} = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad P^B = \frac{P_{x_1}^B}{P_{x_2}^B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} > P^\omega = \frac{P_{x_1}^\omega}{P_{x_2}^\omega} > \frac{1}{2}$

Si P^ω estaría fuera de ese rango ambos países se especializarían en el mismo bien y no sería sostenible.



Perturbación

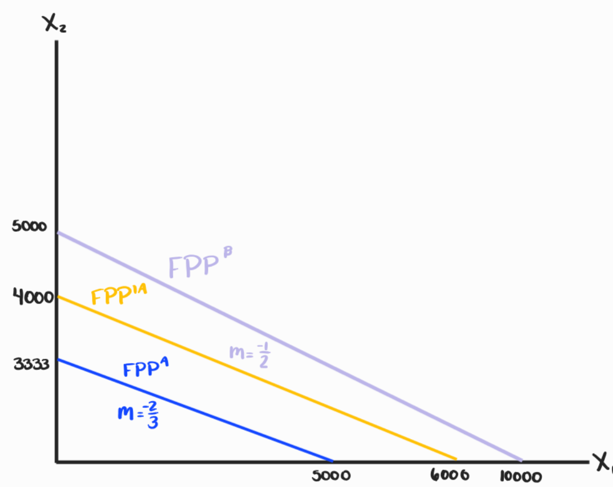
$\bar{L}^{A\prime} = 12000$

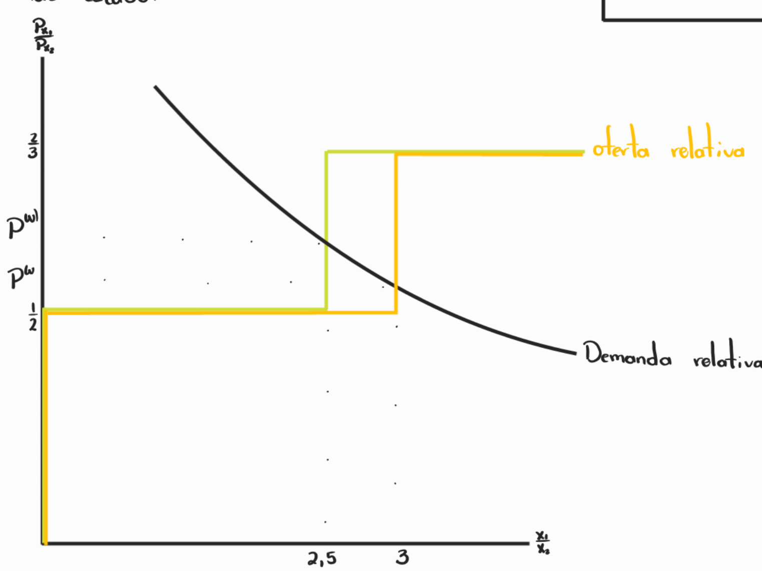
FFP$'^A$:

$$12\,000 = 2X_1^A + 3X_2^A \Rightarrow X_2^B = 4000 - \frac{2}{3}X_1^A$$

La pendiente no cambia $\Rightarrow$ no hay cambios en precio de autarquía.

Los precios relativos internacionales aumentan, el país B puede comprar X_2 relativamente más barato debido a que X_1 es relativamente más escaso.



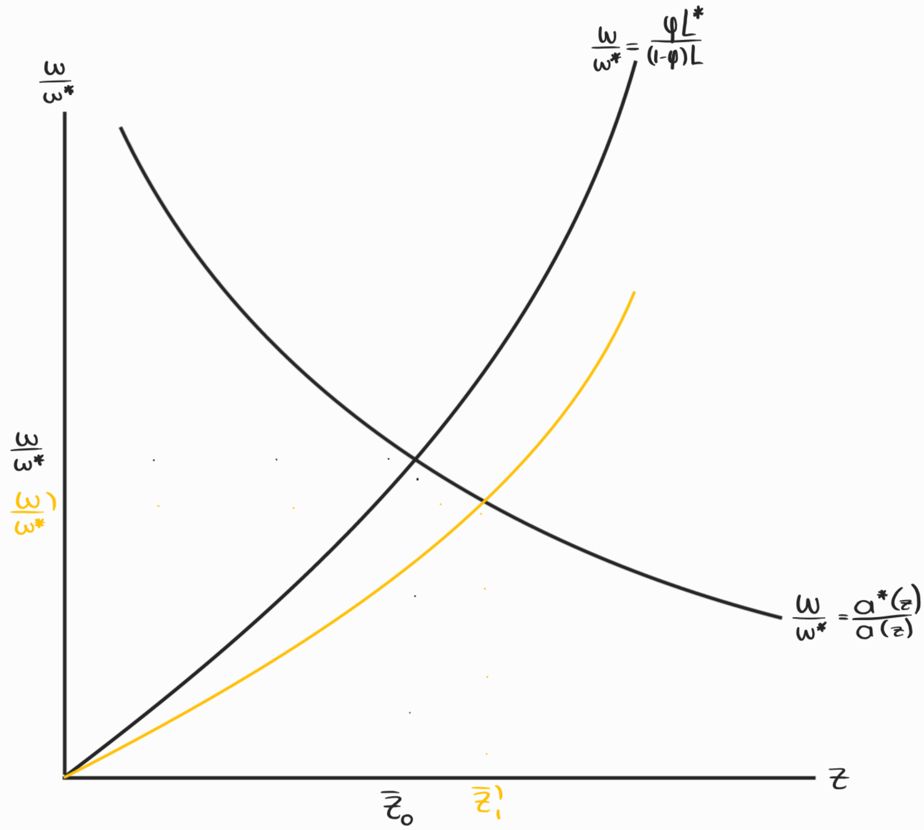


Modelo DFS:

Para la solución se considerará que el país casa es el país A. (otra forma de trabajarlo sería cambiando la notación a país A y B.)

$$a(z)w \leqslant a^*(z)w^* \Rightarrow \frac{w}{w^*} \leqslant \frac{a^*(z)}{a(z)}$$

$$wL = \varphi(wL + w^*L^*) \Rightarrow wL(1-\varphi) = \varphi w^* L^* \Rightarrow \downarrow\frac{w}{w^*} = \downarrow\frac{\varphi L^*}{(1-\varphi)L\uparrow}$$ (esta es la que cambia)



Dado que $\downarrow\frac{w}{w^*}$ entonces aumenta la cantidad de bienes en la que se cumple la condición de exportación para casa $(wa(z) < w^*a^*(z))$

$\Rightarrow$ casa se especializa en más bienes

3. Modelo Neoclásico

3.1. Ejercicio

El país *Ticolandia* produce dos tipos de bienes: productos médicos y productos agrícolas. Ambos bienes utilizan capital y trabajo en su producción; en específico, los productos médicos utilizan 2 trabajadores por unidad de producto y se sabe que los productos médicos utilizan un 10 % más de capital que de trabajo. Los productos agrícolas utilizan 1 trabajador por unidad de producto y utilizan un 25 % menos de capital que de trabajadores. Suponga que Ticolandia tiene una población medida en miles de 5000 y una dotación de capital de 4000 (medido en miles de máquinas iguales) y existe vaciado en los mercados de trabajo y capital.

1. Determine las funciones de producción de ambos bienes y argumente su respuesta.

2. Determine cuál bien es intensivo relativamente en capital y cuál en trabajo.

3. Para el siguiente enunciado considere un caso general (No el del inciso que es uno en particular)

   > Podría darse que los bienes no se revelen como relativamente intensivos en un factor

   ¿Verdadero o falso? Justifique.

4. Derive y grafique la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP). Encuentre el punto óptimo de producción de cada uno de los bienes.

5. Considere que los precios de autarquía en dólares del producto agrícola es de 2 y del producto médico es de 5. Determine el pago al factor trabajo y el pago al factor capital.

6. Una política pública que busca atraer inversión extranjera directa proyecta que el capital disponible de la economía crezca un 5 %. Determine el nuevo punto de equilibrio y relacionelo con su teorema respectivo, explíque de qué se trata y verifique que se cumple lo predicho del teorema.

7. Una política de libre comercio con el país vecino hace que los precios internacionales que prevalezcan sean de 1,95 para el producto agrícola y 5,25 para el producto médico. Determine el nuevo punto de equilibrio y relacionelo con su teorema respectivo, explíque de qué se trata y verifique que se cumple lo predicho del teorema.

1) $q_M = \min\left\{\frac{L_M}{2}, \frac{K_M}{2,2}\right\}$ $\wedge$ $q_A = \min\left\{L_A, \frac{K_A}{0,75}\right\}$, $a_M^L > a_A^L$

Se utiliza mínimos porque los insumos son complementarios perfectos.

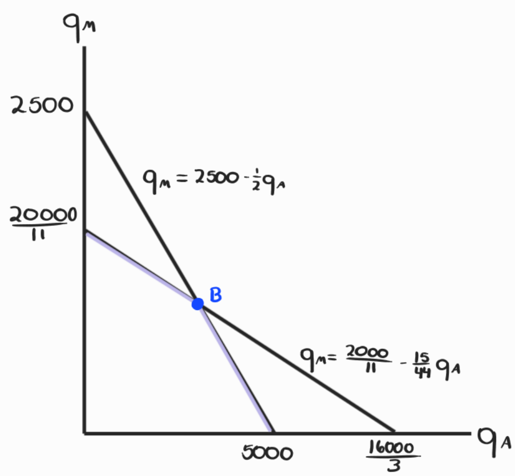
$\frac{K_M}{L_M} = 1.1$ $\wedge$ $\frac{K_A}{L_A} = 0,75$

Productos médicos intensivos relativamente en capital y productos agrícolas en trabajo.

3) Verdadero, cuando la razón del uso de factores es igual para ambos bienes.

4) $FPP_M: 5000 = 2 \cdot q_M + q_A \Rightarrow q_M = 2500 - \frac{1}{2}q_A$

$FPP_M: 4000 = 2,2 \cdot q_M + 0,75\, q_A \Rightarrow q_M = \frac{20000}{11} - \frac{15}{44}q_A$



Punto B:

$$2500 - \frac{1}{2}q_A = \frac{20000}{11} - \frac{15}{44}q_A \Rightarrow \frac{7500}{11} = \frac{7}{44}q_A \Rightarrow q_A = \frac{30\,000}{7} \quad \wedge \quad q_M = \frac{2\,500}{7}$$

5) $\Rightarrow 2 = w + 0,75r$ $\wedge$ $5 = 2w + 2,2r$

$\Rightarrow w + 0,75r = 2w + 2,2r - 3 \Rightarrow w = -\frac{29}{20}r + 3 \Rightarrow r = \frac{10}{7}$ $\wedge$ $w = \frac{13}{14}$

6) $K' = 4200$

$FPP_M : 5000 = 2 \cdot q_M + q_A$

$FPP_M : 4200 = 2{,}2 \cdot q_M + 0{,}75\, q_A$

$\Rightarrow 2 \cdot q_M + q_A = 2{,}2 \cdot q_M + 0{,}75\, q_A + 800 \Rightarrow 0{,}2 q_M = 0{,}25 q_A - 800 \Rightarrow q_M = \frac{5}{4} q_A - 4000$

$\Rightarrow 5000 = \frac{10}{4} q_A - 8000 + q_A \Rightarrow \quad q_A = \frac{26000}{7} \quad \wedge \quad q_M = \frac{4500}{7}$

Teorema Rybczynski.

Al aumentar $K \Rightarrow \uparrow q_M$ (por ser intensiva en K) $\wedge \downarrow q_A$ (por ser intensiva en trabajo).

7) $p'_A = 1.95 \quad \wedge \quad p'_M = 5{,}25$

$\Rightarrow 1{,}95 = w + 0{,}75 r \qquad \wedge \qquad 5{,}25 = 2w + 2{,}2 r$

$\Rightarrow w = 1{,}95 - 0{,}75 r \Rightarrow 5{,}25 = 3{,}9 - 1{,}5 r + 2{,}2 r \Rightarrow \frac{27}{20} = \frac{7}{10} r \Rightarrow r = \frac{27}{14} \quad \wedge \quad w = \frac{141}{280}$

Teorema Stolper-Samuelson:

$\downarrow p_A \quad \wedge \quad \uparrow p_M \Rightarrow \uparrow \frac{p_M}{p_A} \Rightarrow \uparrow r \quad \wedge \quad \downarrow w \Rightarrow \frac{r}{w} \uparrow$

3.2. Ejercicio

Considere un individuo autárquico que consume verduras (x_1) o carne (x_2) y que tiene unas funciones de producción igual a:

$$x_i = L_i^2 \qquad ; \qquad i = 1, 2$$

Donde L_i es la cantidad de trabajo (medido en horas) que destina en la producción de x_i y se sabe que este individuo trabaja 12 horas por día. Además, el individuo tiene unas preferencias por verduras y carne dadas por:

$$U(x_1, x_2) = max\{x_1, 2x_2\}$$

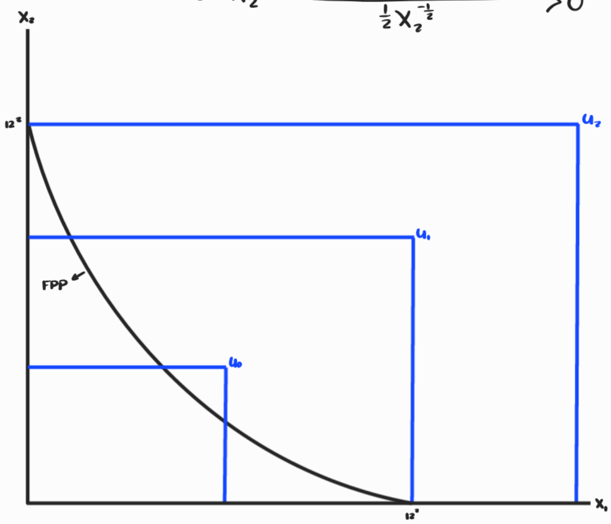
1. Determine el nivel de producción óptimo. Para esto, grafique la frontera de posibilidades de producción y las curvas de indiferencia.

2. Si el individuo se abre al comercio, determine para que rango de precios está dispuesto a comercio y demuestre que efectivamente está mejor.

$$12 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \Rightarrow x_2 = \left(12 - \sqrt{x_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 = \tfrac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_2}{\partial x_1}}_{x_2'} = x_2' = \frac{-x_2^{\frac{1}{2}}}{x_1^{\frac{1}{2}}} < 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\tfrac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{2}} \cdot x_2' x_2' + \tfrac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2'' = \frac{\tfrac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{2}} \cdot \overbrace{\overset{(-)}{x_2'}\,\overset{(-)}{x_2'}}^{+}}{\tfrac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}}} > 0$$



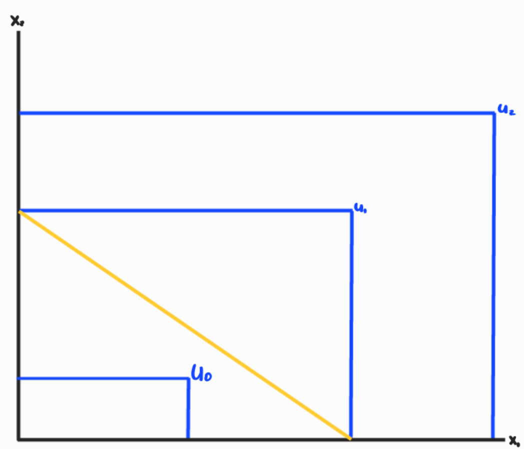
Autarquía:

$x_1 = 0 \wedge x_2 = 12^2 \Rightarrow L_1 = 0 \wedge L_2 = 12 \Rightarrow U_2 = 2 \cdot 12^2$

Comercio:

Si $\frac{P_1}{P_2} < 1 \Rightarrow$ produzco x_2

Si $\frac{P_1}{P_2} > 1 \Rightarrow$ produzco x_1



Si $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$ consumo todo en $X_2 \vee X_1$.

Si $\frac{P_1}{P_2} > \frac{1}{2}$ consumo todo en X_2

Si $\frac{P_1}{P_2} < \frac{1}{2}$ consumo todo en X_1

Por lo que:

Si
$\begin{cases} \frac{P_1}{P_2} < \frac{1}{2} & \text{produzco } X_2 \text{ y consumo todo en } X_1 \text{ (me beneficio del comercio)} \\ \frac{1}{2} \leq \frac{P_1}{P_2} \leq 1 \ \vee \ \frac{P_1}{P_2} = 2 & \text{no me beneficio del comercio.} \\ 1 < \frac{P_1}{P_2} < 2 & \text{me perjudico del comercio.} \\ \frac{P_1}{P_2} > 2 & \text{produzco } X_1 \text{ y consumo todo en } X_2 \text{ (me beneficio del comercio)} \end{cases}$

Por ejemplo, si $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{4}$ entonces sería como $p_1 = 1 \wedge p_2 = 4$

producción:

$X_2 = 12^2 \wedge X_1 = 0 \Rightarrow m = 4 \cdot 12^2$

consumo

$X_2 = 0 \wedge X_1 = \frac{m}{p_1} = 4 \cdot 12^2 \Rightarrow U' = 4 \cdot 12^2 > U_2$

3.3. Ejercicio

Considere un país que tiene una dotación de trabajo igual a 10000 que tiene las siguientes funciones de producción

$$x_1 = \sqrt{L_1} \qquad \wedge \qquad x_2 = \sqrt{L_2}$$

Y una función de utilidad social (o también se puede interpretar como que en cada país vive un sólo individuo) igual a

$$U = x_1 + x_2$$

1. Determine el equilibrio de autarquía y grafique.
2. Si la relación de precios internacionales ($\frac{p_1}{p_2}$) es igual a 2, determine el nuevo equilibrio y grafique.
3. Calcule las exportaciones y las importaciones.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \sqrt{L_1} \\ X_2 = \sqrt{L_2} \end{array}\right\} 10\,000 = X_1^2 + X_2^2 \Rightarrow 0 = 2X_1 + 2X_2 \cdot \frac{\partial X_2}{\partial X_1}$$

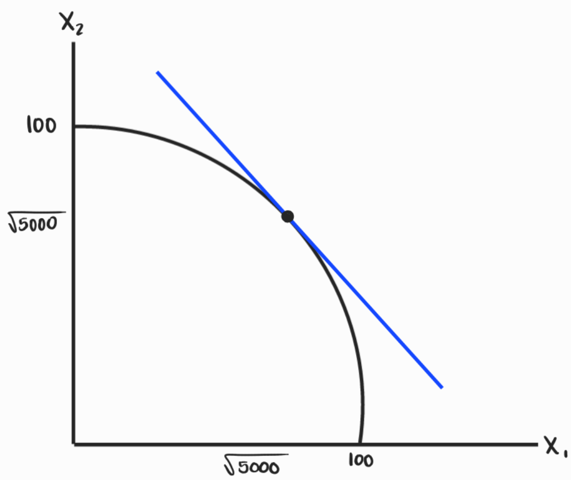
$$\Rightarrow \frac{\partial X_2}{\partial X_1} = \frac{-X_1}{X_2}$$

$$U = X_1 + X_2$$

$$1 = \frac{X_2}{X_1}$$

$$\Rightarrow X_2 = X_1 = \sqrt{5000}$$

$$\Rightarrow U_0 = 2\sqrt{5000}$$



$$\text{Si} \quad \frac{P_1^*}{P_2^*} = 2$$

Producción:

$$X_1 = 2X_2$$

$$\Rightarrow \quad 10\,000 = 4X_2^2 + X_2^2 \Rightarrow X_2 = \sqrt{2000} \quad \Rightarrow X_1 = 2\sqrt{2000}$$

Consumo:

$$X_2 = \frac{m}{P_2} \qquad \wedge \quad X_1 = 0$$

$$m = p_1 \cdot 2\sqrt{2000} + p_2 \cdot \sqrt{2000}$$

$$\frac{m}{p_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot 2\sqrt{2000} + \sqrt{2000} = 100\sqrt{5}$$

Consumo:

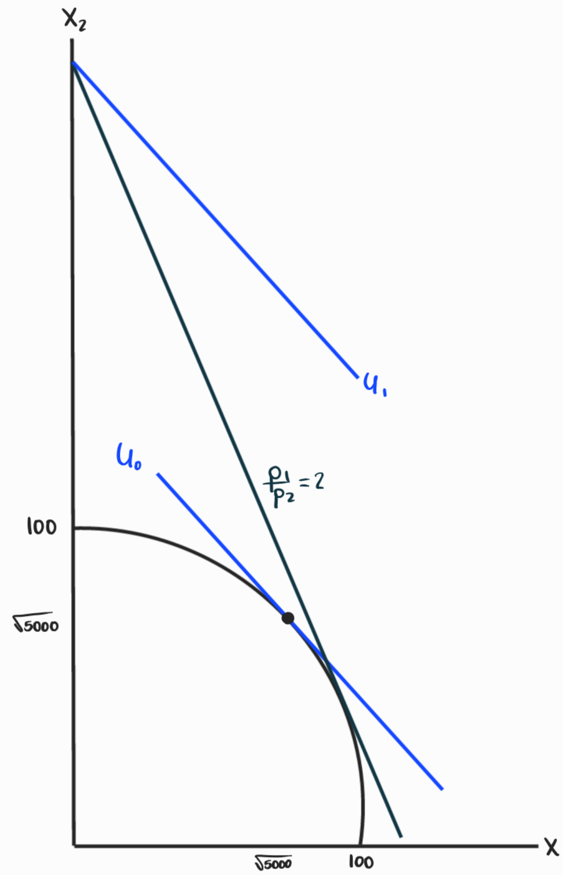
$X_2 = 100\sqrt{5} = U_1 \quad \wedge \quad X_1 = 0$

Importaciones

$X_2 = 80\sqrt{5}$

Exportaciones

$X_1 = 2\sqrt{2000}$



4. Factores Específicos

4.1. Ejercicio

Considere que usted es el gobernador de un país que produce bienes (x) y servicios (y). Para producir bienes se utiliza trabajo (L) y tierra (T) y para producir servicios se utiliza trabajo (L) y capital (K). Las funciones de producción están dadas por:

$$x = L_x^{\frac{1}{2}} T_x^{\frac{1}{2}} \qquad y = L_y^{\frac{1}{2}} K_y^{\frac{1}{2}}$$

Usted sabe que tiene que **hacer una distribución plena de los recursos**, también conoce que la dotación de todos los factores es igual a 1 y que el precio de bienes y servicios es igual a 1.

Jose Miguel, asesor económico suyo, le aconseja que empiece a hacer su análisis con el trabajo.

1. Determine el precio de cada factor de producción y la cantidad que utiliza de cada factor de producción en cada bien. Grafique para el factor trabajo.

2. Determine que porcentaje del producto se destina al pago de los factores.

3. Considere que el país aumentó la cantidad de capital disponible a 2, determine como cambian sus respuestas anteriores si los precios de x y y se mantienen iguales.

Dado que $p_i = 1 \Rightarrow VPM^i = PM^i$; $i = x, y$

"X" utiliza todo el trabajo $(K_x = K)$ y "y" todo el capital $(K_y = K)$.

$$PM_L^x = PM_L^y$$

$$\frac{1}{2} L_x^{-\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} L_y^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L_y = \frac{K\, L_x}{T}$$

$$1 = L_x + \frac{K L_x}{T} \Rightarrow 1 = L_x\left(1 + \frac{K}{T}\right)$$

$$L_x = \frac{1}{1+\frac{K}{T}} \quad \wedge \quad L_y = \frac{K \cdot 1}{T\left(1+\frac{K}{T}\right)}$$

$$PM_T = \frac{1}{2} L_x^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}}$$

$$PM_K = \frac{1}{2} L_y^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}$$

Si $K = T = 1$

$L_x = L_y = \frac{1}{2}$, $T_x = 1$ $\wedge$ $K_y = 1$

$$w = VPM_L \Rightarrow w = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 0{,}71$$

$$r = VPM_K = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0{,}35$$

$$R = VPM_T = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 0{,}35$$

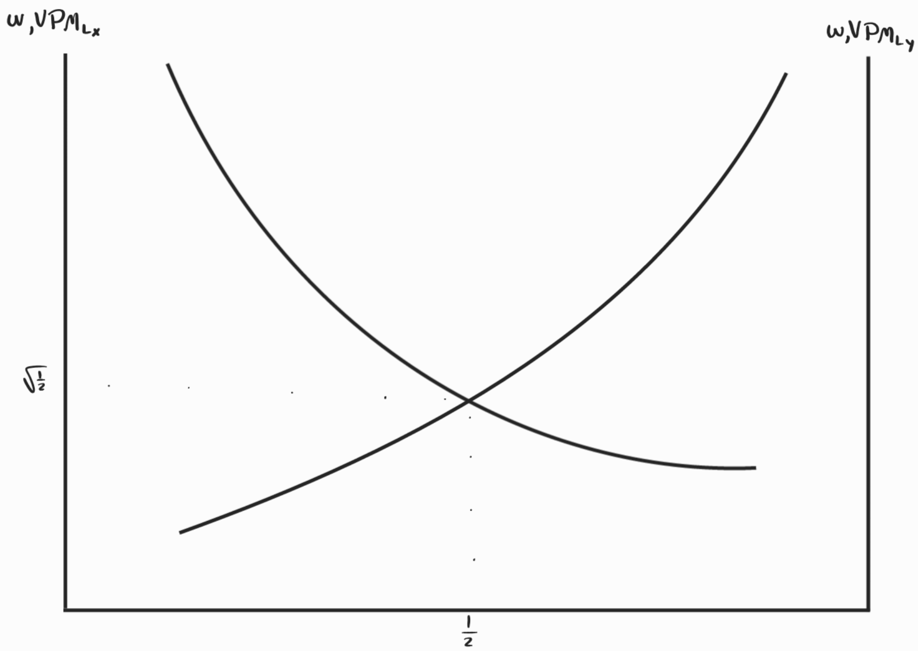
$$X = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = Y \approx 0{,}71$$

Dado que la función es homogénea de grado 1 se cumple el teorema de Euler:

$$X = L \cdot PM_L + T \cdot PM_T \Rightarrow X = L \cdot w + T \cdot R = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = X$$

Se utiliza un 50% del producto de x para pagarle a los trabajadores y el otro 50% al trabajo.

Para el bien "y" se llega a las mismas conclusiones.



Si $K=2 \wedge T=1$

$$L_x = \frac{1}{1+\frac{K}{T}} = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad L_y = \frac{K \cdot 1}{T(1+\frac{K}{T})} = \frac{2}{3}$$

$$W = VPM_L \Rightarrow w = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$$

$$r = VPM_K = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}29$$

$$R = VPM_T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \approx 0{,}29$$

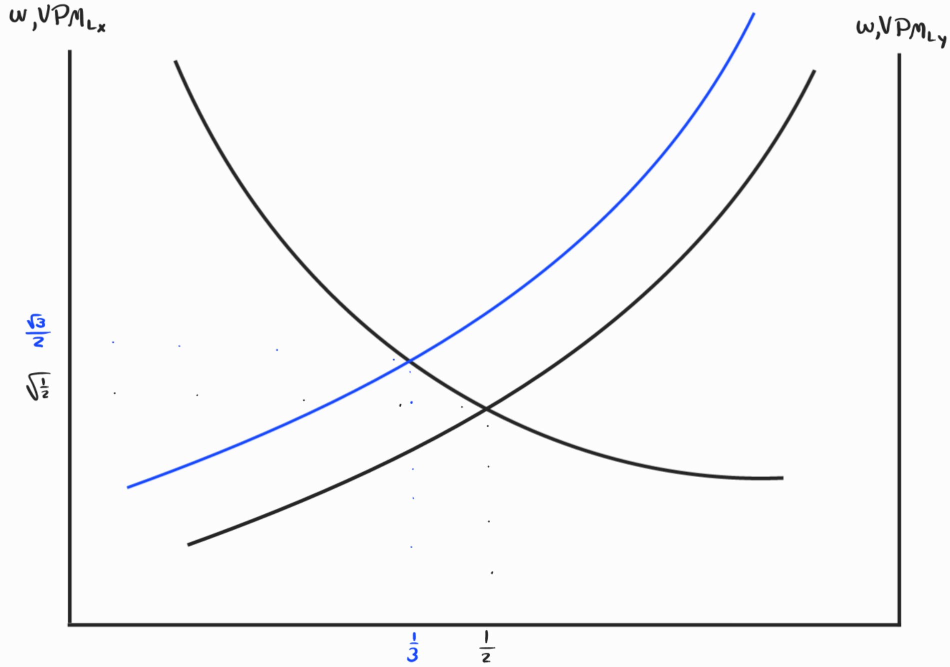
$$X = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58 \quad \wedge \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{\sqrt{3}} = L_x \cdot W + T \cdot R = 0{,}29 + 0{,}29$$

Se utiliza un 50% del producto de x para pagarle a los trabajadores y el otro 50% al trabajo.

$$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}29 \cdot 2$$

Se utiliza un 50% del producto de x para pagarle a los trabajadores y el otro 50% al trabajo.


w, VPM$_{Lx}$
w, VPM$_{Ly}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}$

5. Heckscher-Ohlin

5.1. Ejercicio

Considere un mundo de dos país (A y B) con mismas tecnologías y mismas preferencias. Cada país puede producir dos bienes (q_1 o q_2) y utiliza trabajo y capital en su producción. Las preferencias vienen dadas por:

$$U^j = C_{1j}C_{2j} \qquad \forall j = A, B$$

Donde C_{1j} representa el consumo del individuo representativo del país j del bien 1. La única diferencia entre el país A y el país B son las dotaciones. La frontera de posibilidad de producción para cada país corresponden a

$$100 = q_{1A}^2 + 4q_{2A}^2 \qquad \wedge \qquad 100 = 4q_{1B}^2 + q_{2B}^2$$

1. Obtenga el equilibrio de autarquía para ambos países y grafique ambos equilibrios en un sólo gráfico.
2. Si ambos países comercian entre sí, determine el rango de precios para el cual tiene sentido el comercio.
3. Determine y grafique, en un sólo gráfico, el equibrio si los países se abren al comercio, suponiendo que la relación de precio que predomina es el punto medio del rango dado en su respuesta anterior.

$$\left.\begin{array}{l} 100 = {q_1^A}^2 + 4{q_2^A}^2 \\ 100 = 4{q_1^B}^2 + {q_2^B}^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 = 2q_1^A + 8q_2^A \cdot \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \Rightarrow \left|\frac{\partial q_2^A}{\partial q_1^A}\right| = \frac{q_1^A}{4q_2^A} \\ 0 = 8q_1^B + 2q_2^B \cdot \frac{\partial q_2}{\partial q_1} \Rightarrow \left|\frac{\partial q_2^A}{\partial q_1^A}\right| = \frac{4q_1^B}{q_2^B} \end{array}$$

Autarquía $C_i^j = q_i^j \quad \forall i,j$

Consumidor

$$\frac{q_2^j}{q_1^j} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{q_1^A}{4q_2^A} = \frac{q_2^A}{q_1^A} \Rightarrow \frac{q_1^A}{q_2^A} = 2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 100 = 2{q_1^A}^2 \Rightarrow q_1^A = \sqrt{50} \ \wedge \ q_2^A = \frac{1}{2}\sqrt{50}$$

$$\frac{4q_1^B}{q_2^B} = \frac{q_2^B}{q_1^B} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = 2 = \frac{q_2^B}{q_1^B}$$

$$100 = 2{q_2^B}^2 \Rightarrow q_2^B = \sqrt{50} \ \wedge \ q_1^B = \frac{1}{2}\sqrt{50}$$

2)

Si comercian $\frac{1}{2} < P^I < 2$

3)

$P^I = 1{,}25$

$$1{,}25 = \frac{q_1^A}{4q_2^A}$$

$$5q_2^A = q_1^A$$

$$\frac{4q_1^B}{q_2^B} = 1{,}25$$

$$q_1^B = \frac{5}{16}q_2^B$$

$q_2^A \approx 1{,}87 \ \wedge \ q_1^A \approx 9{,}28$

$q_2^B \approx 8{,}48 \ \wedge \ q_1^B \approx 2{,}65$

Consumo

$$\frac{C_2}{C_1} = 1{,}25 \Rightarrow C_2 = 1{,}25C_1$$

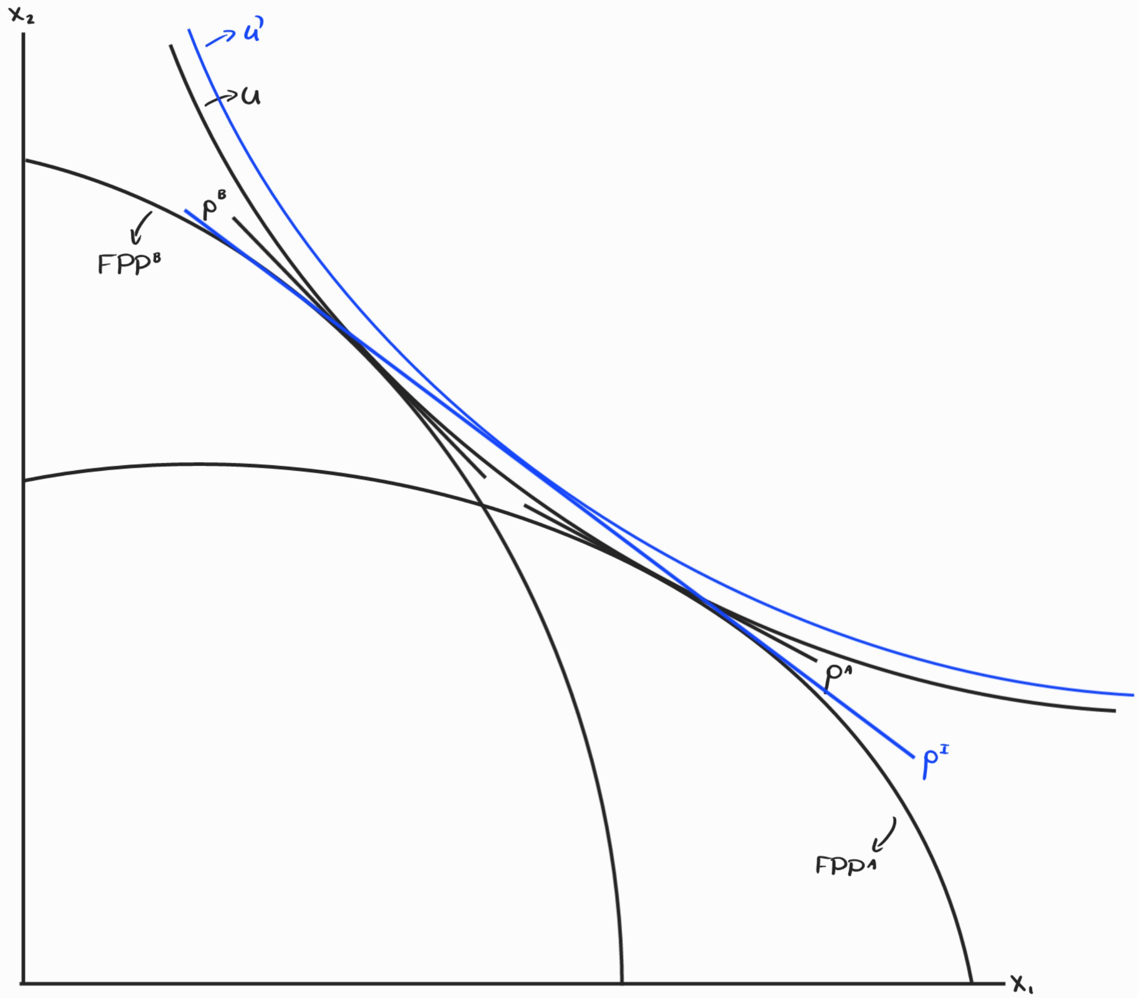
$$P_1 q_1^j + P_2 q_2^j = P_1 C_{1j} + P_2 C_{2j}$$

$$1{,}25q_1^j + q_2^j = 1{,}25C_{1j} + 1{,}25C_{1j}$$

$$C_{1j} = \frac{1{,}25q_1^j + q_2^j}{2{,}5} \quad \wedge \quad C_{2j} = \frac{1{,}25q_1^j + q_2^j}{1{,}25}$$

$C_{1A} \approx 5{,}39$ $\qquad$ $C_{1B} = 4{,}71$

$C_{2A} \approx 6{,}74$ $\qquad$ $C_{2B} = 5{,}89$



5.2. Ejercicio

Considere una economía que tiene las siguientes funciones de producción:

$$q_1 = L_1 + K_1 \qquad \wedge \qquad q_2 = 2L_2 + K_2$$

Se sabe que esta economía tiene una dotación de ambos factores de producción igual a 10 y se cumple que:

$$r < w < 2r$$

1. Determine la cantidad de producción de ambos bienes.
2. Demuestre que se cumple el teorema de Rybczynski.
3. Demuestre que se cumple el teorema Stolper-Samuelson.
4. Determine la veracidad de la siguiente proposición y justifique su respuesta.

    Una política para incentivar la producción de q_2 es disminuir el salario *(ceteris paribus)*.

1)

Se sabe que $1 < \frac{w}{r} < 2$

$\Rightarrow q_1 = K_1 \quad \wedge \quad q_2 = 2L_2 \Rightarrow L_2 = \frac{q_2}{2}$

$\Rightarrow q_1 = 10 \quad \wedge \quad q_2 = 20$

2) $\frac{\partial q_1}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial q_1}{\partial L} = 0$, $\frac{\partial q_1}{\partial K} = 0$, $\frac{\partial q_1}{\partial L} > 0$

Si $\uparrow K \Rightarrow \uparrow \frac{q_1}{q_2}$ $\wedge$ si $\uparrow L \Rightarrow \uparrow \frac{q_2}{q_1}$

3)

$\frac{CM_1}{CM_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{r q_1}{w q_2} = \frac{p_1}{p_2}$

$$\frac{\partial\left(\frac{r}{w}\right)}{\partial\left(\frac{p_1}{p_2}\right)} = \frac{q_2}{q_1} > 0$$

4) Falso, si w' cumple que $1 < \frac{w'}{r} < 2$ entonces no hay cambios y si $\frac{w'}{r} < 1$ entonces más bien podría llegar a disminuir porque q_1 ahora produciría con L y la dotación está dada.

6. Matriz Insumo-Producto

6.1. Ejercicio

Considere el siguiente enunciado:

> Rica Costa es un país con dos grandes sectores productivos interdependientes entre sí, el sector de bienes y el sector de servicios. La demanda final está compuesta por el consumo de los hogares y el gasto del gobierno, y se sabe que el valor de la producción para cada sector se gasta en el pago a insumos que utiliza de sí mismo, del otro sector y el pago al factor trabajo. Un estudio calcula la siguiente matriz insumo-producto para Rica Costa:

	Bienes	Servicios	Consumo	Gasto gobierno	Demanda final	Producción
Bienes	1350	1475	1405	265	z	4495
Servicios	x	y	1090	210	1300	3765
Trabajo	1670	1300				

Cuadro 1: Matriz insumo-producto para Rica Costa montos en millones de dólares

Considere la siguiente expresión:

$$x = Ax + b$$

Donde x representa el vector de producción total y b el vector de demanda final.

1. Interprete la ecuación anterior o su forma despejada para x (Es recomendable que para la interpretación suponer que sólo hay un sector, es decir, un sólo bien).
2. ¿Qué pasaría si $(I - A)^{-1}$ es definida negativa? ¿Cuál sería la interpretación de su respuesta? (Para la interpretación puede seguir suponiendo que sólo hay un bien).
3. Determine e interprete los valores de x, y y z.
4. Determine la matriz de requerimientos técnicos e interpréte un elemento perteneciente a la diagonal principal y un elemento fuera de la diagonal principal.
5. Obtenga el vector de producción total.
6. Exprese la demanda final en forma vectorial.
7. Demuestre que se cumple la ecuación $x = (I - A)^{-1}b$.
8. Suponga que una política pública disminuye el impuesto al valor agregado, esto conlleva a que haya un aumento en el consumo de los hogares del 6 % para cada sector; sin embargo, dado la reducción en la recolección de impuestos por parte del gobierno, el

gasto gubernamental disminuyó en 10 %. Determine el efecto que tiene dicha política en la producción de Rica Costa.

1) Su forma despejada es $X = (I-A)^{-1}b$

Si sólo hay un sector:

$$x = Ax + b \Rightarrow x = \frac{b}{1-A} \quad \text{con } A, b \in \mathbb{R}^+$$

$x = Ax + b$ me dice que la producción total esta determinada por la demanda final más la producción extra que se requiere para producir la demanda final.
"A" en este caso sería la cantidad del bien que se requiere para producir una unidad de ese mismo bien.

2) Si $(I-A)^{-1}$ es definida negativa y solo hay un sector entonces $(1-A) < 0 \Rightarrow 1 < A$ por lo que $X = \frac{b}{1-A} < 0$ ya que $b > 0$. Dado que $X < 0$ entonces lo logico sería $X = 0$. La intuición económica sería que si $A > 1$ se necesita más de una unidad del bien para producir una unidad de ese mismo bien por lo que la producción sería 0.

3)

	Bienes	Servicios	Consumo	Gasto gobierno	Demanda final	Producción
Bienes	1350	1475	1405	265	z 1670	4495
Servicios	x 1475	y 990	1090	210	1300	3765
Trabajo	1670	1300				

Los valores x, y ∧ z se pueden encontrar sabiendo que la fila i suma la columna i eliminando la columna "consumo" ∧ "gasto gobierno".

"X" representa el ingreso que recibe "servicios" por venderle a "bienes" su bien para que lo utilice como insumo.

"Y" representa el valor que servicios utiliza de su propia producción como insumo.

"Z" corresponde a la demanda final por el bien que produce el sector de bienes; se utiliza para consumo final y no como insumo.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{270}{899} & \frac{295}{753} \\ \frac{295}{899} & \frac{66}{251} \end{pmatrix}$$

El elemento $\frac{270}{899}$ se puede interpretar como la proporción del gasto en insumos del sector "bienes" que se gasta en su mismo bien como insumo.

El elemento $\frac{295}{899}$ se puede interpretar como la proporción del gasto en insumos del sector "bienes" que se gasta en "servicios" para utilizarlo como insumos.

$$X=\begin{pmatrix} 4495 \\ 3765 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad b=\begin{pmatrix} 1670 \\ 1300 \end{pmatrix}$$

$$I-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{270}{899} & \frac{295}{753} \\ \frac{295}{899} & \frac{66}{251} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{629}{899} & \frac{-295}{753} \\ \frac{-295}{899} & \frac{185}{251} \end{pmatrix}$$

$$(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{629}{899} & \frac{-295}{899} \\ \frac{-295}{753} & \frac{185}{251} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{99784}{52414} & \frac{53041}{52414} \\ \frac{44427}{52414} & \frac{473637}{262070} \end{pmatrix}$$

$$X=(I-A)^{-1}\cdot b=\begin{pmatrix} \frac{99784}{52414} & \frac{53041}{52414} \\ \frac{44427}{52414} & \frac{473637}{262070} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1670 \\ 1300 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4495 \\ 3765 \end{pmatrix}$$

8) $b=$ Consumo privado + gasto gobierno

$$\Delta b=0{,}06\begin{pmatrix} 1405 \\ 1090 \end{pmatrix}-0{,}1\begin{pmatrix} 265 \\ 210 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{284}{5} \\ \frac{222}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Delta X=(I-A)^{-1}\Delta b=\begin{pmatrix} \frac{99784}{52414} & \frac{53041}{52414} \\ \frac{44427}{52414} & \frac{473637}{262070} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{284}{5} \\ \frac{222}{5} \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} 154{,}97 \\ 129{,}24 \end{pmatrix}$$

$$X'=X+\Delta X\approx\begin{pmatrix} 4649{,}97 \\ 3894{,}24 \end{pmatrix}$$

6.2. Ejercicio

Suponga que Costa Rica tiene dos grandes industrias, *bienes y servicios*. El Banco Central de Costa Rica (BCCR) logró calcular la matriz insumo-producto[1] para Costa Rica y logró proyectar que la economía crecerá un 3 % en el 2024.

Cuadro 2: Matriz insumo-producto Costa Rica. Datos en billones de dólares

	Bienes	**Servicios**	**Demanda final**
Bienes	10	6	20
Servicios	3	6	15
Factores de producción	23	12	

1. Determine el nivel de producción de esta economía para el 2024 vía insumo-producto. **25 puntos**

[1] Datos ficticios

La solución la podrá encontrar en el siguiente archivo de Excel: presione aquí.

7. Paradoja de Leontief reconsiderada

7.1. Ejercicio

Considere la siguiente tabla, en las tres primeras filas se presenta los requerimientos de insumos para la producción de una unidad del bien. Y en las últimas dos filas presenta la producción total del país casa y la producción del mundo para cada uno de los vienes. Además, se sabe que el precio del maíz es igual a 2 y el precio del arroz es igual al precio de los frijoles y este igual a 3.

	Maíz	Arroz	Frijoles
Trabajo	2	4	5
Capital	1	2	3
Tierra	3	2	2
Producción total del país casa	10	15	8
Producción total del mundo	80	100	90

1. Obtenga el vector de dotación de los factores para el país casa y el mundo.
2. Calcule el porcentaje del PIB mundial que tiene el país casa. ¿A cuál elemento de la ecuación presentada en el ejercicio anterior corresponde?
3. Determine el vector de consumo de los bienes del país casa.
4. Determine el vector de exportaciones e importaciones del país casa.
5. Verifique que se cumple la ecuación presentada en el inciso anterior.
6. Calcule el estadístico de Leontief.
7. ¿Coincide los resultados de Leontief con los de Leamer para este ejemplo? Argumente

1)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad Q_i=\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad Q_u=\begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$E_i=\begin{pmatrix} 120 \\ 64 \\ 76 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_u=\begin{pmatrix} 1010 \\ 550 \\ 620 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i=\frac{P \cdot Q_i}{P \cdot Q_u}=\frac{89}{730}$$

$$C_i=\alpha_i Q_u=\begin{pmatrix} \frac{712}{73} \\ \frac{890}{73} \\ \frac{801}{73} \end{pmatrix}$$

$$T_i=Q_i-C_i=\begin{pmatrix} \frac{18}{73} \\ \frac{205}{73} \\ \frac{-217}{73} \end{pmatrix} \Rightarrow X_i=\begin{pmatrix} \frac{18}{73} \\ \frac{205}{73} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad M_i=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{217}{73} \end{pmatrix}$$

$$AT_i=\begin{pmatrix} \frac{-229}{73} \\ \frac{-223}{73} \\ \frac{30}{73} \end{pmatrix}$$ (Importador neto de trabajo y capital. Exportador neto de tierra).

Verificando

$$AT_i=E_i-\alpha E_u=\begin{pmatrix} 120 \\ 64 \\ 76 \end{pmatrix}-\frac{89}{730}\begin{pmatrix} 1010 \\ 550 \\ 620 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-229}{73} \\ \frac{-223}{73} \\ \frac{30}{73} \end{pmatrix}$$

Estadístico Leontief

$$\lambda_i=\frac{\left(\frac{K}{L}\right)_x}{\left(\frac{K}{L}\right)_M}$$

$$X_i = \begin{pmatrix} \frac{18}{73} \\ \frac{205}{73} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad M_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{217}{73} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AX_i = \begin{pmatrix} \frac{856}{73} \\ \frac{428}{73} \\ \frac{463}{73} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad AM_i = \begin{pmatrix} \frac{1085}{73} \\ \frac{651}{73} \\ \frac{434}{73} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i = \frac{\frac{\frac{428}{73}}{\frac{856}{73}}}{\frac{\frac{651}{73}}{\frac{1085}{73}}} = \frac{\frac{428}{856}}{\frac{651}{1085}} = \frac{5}{6} < 1$$ supuestamente sería relativamente abundante en trabajo.

utilizando Leamer

$$\frac{K_i}{K_u} = 0{,}116363 < \frac{L_i}{L_u} \approx 0{,}1188119$$

Hay otras formas de calcularlo.

El estadístico de Leontief es irrelevante porque hay más de dos factores.

7.2. Ejercicio

Considere un mundo en el que existen 10 países, todos con el mismo PIB; sin embargo las dotaciones son distintas para cada país. Se conoce la siguiente información:

	Bien 1	Bien 2	Bien 3	Dotación país i	Dotación mundo
Trabajo	1	3	4	62	545
Capital	2	1	1	35	315
Tierra	2	2	2	50	450

1. Obtenga el vector de producción para el país i y para el mundo.
2. Determine el vector de consumo de los bienes del país casa.
3. Determine el vector de exportaciones e importaciones del país casa.
4. Calcule el estadístico de Leontief.
5. ¿Coincide los resultados de Leontief con los de Leamer para este ejemplo? Argumente.

La solución la podrá encontrar en el siguiente archivo de Excel: presione aquí.

7.3. Ejercicio

Considere la siguiente información

	Arroz	Café	Productos Médicos
Trabajo	0,5	0,25	0,25
Capital	0,75	0,125	0,125
Tierra	0,4	0,2	0,4
Producción CR	2	3	1
Producción total	12	8	4
Exportaciones CR	0,2	1,5	0,2
Importaciones CR	0,6	0,1	0

1. Determine las dotaciones de CR y del mundo.
2. Determine la proporción de la riqueza mundial que tiene CR.
3. Determine si CR es intensivo en trabajo o en tierra considerando los estadísticos de Leontief y Leamer. ¿Siempre coincidirían esos estadísticos? Argumente.
4. Determine en cuáles de los 3 factores es relativamente abundante CR.

La solución la podrá encontrar en el siguiente archivo de Excel: presione aquí.

8. Paul Krugman: Increasing returns, monopolistic competition and international trade

Considere una economía en la que existen 1000 individuos iguales, la función de utilidad de uno de los agentes es:

$$U(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} -e^{-c_i}$$

Además, suponga que:

- En esta economía sólo se produce utilizando trabajo.
- Existe vaciado de mercado en trabajo.
- Todas las empresas producen con la misma tecnología, cada empresa necesita 10 trabajadores para su funcionamiento (sin importar el tamaño de producción) y 1 trabajador por cada unidad del bien que quiera producir extra.

1. Derive las curvas del modelo y grafíquelas.
2. Encuentre la producción total de cada uno de los bienes, el precio relativo con respecto al salario y la cantidad de bienes de la economía.
3. Considere que un cambio en la productividad de trabajo conlleva a que se requiera de la mitad de trabajo para la producción (ahora se requiere de 5 trabajadores para operar y 0,5 trabajadores por unidad del biene extra). Determine como cambian sus respuesta, utilice gráficos y explique la intuición económica de sus resultados.