UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EEs Escuela de Estadística

Examen Parcial N°2

XS-0100 Fundamentos de la Teoría Estadística

Duración de la prueba: 120 min, lunes 25 de noviembre 2024

Instrucciones generales: la prueba es de carácter individual, resuelva cada ejercicio propuesto. Respuestas realizadas con lápiz o con tachones o uso de corrector liquido podrían afectarle en caso de un reclamo en su respuesta.

Adjunte las justificaciones de cada ítem.

Total de puntos: 35 puntos

1. **(7 puntos)** Según los últimos estudios sobre turismo, las personas viajan a la montaña o a la playa. El 40% de las personas realizan turismo en el extranjero, mientras que el 60% restante lo hace a nivel local. De lo que realizan turismo local el 30% lo hace en la montaña, mientras que el 40% de los viajan al extranjero lo hacen a la playa. Si una persona hizo turismo en la playa. ¿Cuál es la probabilidad que haya sido en una playa extranjera?

2. **(6 puntos)** Un asegurador está modelando el monto de las reclamaciones X con una variable exponencial de parámetro λ desconocido, es decir:

   $$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

   Con $\pi(\lambda) = 10e^{-10\lambda}$. Determine el núcleo de la distribución a posteriori de $\lambda|x$ e indique el tipo de distribución del núcleo.

3. **(10 puntos)** Roger y Sofía, realizan 150 lanzamientos de una moneda, como resultó salió 90 veces cara y el resto salió escudo. Si se asume que la distribución de los lanzamientos sigue una Bernoulli.

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)};\ \ x = 1\ (cara), 0\ (escudo).$$

Ante los resultados, Sofía sostiene que la moneda está cargada y que la probabilidad que salga cara es $2/3$, mientas que Roger sostiene que la moneda esta equilibrada, es decir $p = 1/2$. Asumiendo un caso no informativo.

   a. (9 puntos) Construya el factor de Bayes
   b. (1 punto) Concluya ¿Cuál de las dos hipótesis es más creíble?

4. **(12 puntos)** Sea una muestra de 50 datos de una variable una variable aleatoria $X_i|\theta \sim Poi(\theta)$, con media muestral igual a 2. La densidad a priori para θ es $\pi(\theta) \sim \gamma(2,3)$.

   a. **(5 puntos)** Determine la distribución a posteriori de θ dado la muestra.
   b. **(5 puntos)** Determine la Esperanza y varianza de la distribución a posteriori
   c. **(2 puntos)** Determine un intervalo de credibilidad de máxima densidad al 95%, (use $Z_\alpha = 1.96$).

Distribución	**Densidad**	**Esperanza**	**Varianza**
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$	μ	σ^2
Gamma $\gamma(a, b)$	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b^2}$
Beta $\beta(a, b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$