Examen Parcial N°1
XS-0100 Fundamentos de la Teoría Estadística
Duración de la prueba: 120 min, jueves 5 de octubre 2023

Instrucciones generales: la prueba es de carácter individual, resuelva cada ejercicio propuesto. Respuestas realizadas con lápiz o con tachones o uso de corrector liquido podrían afectarle en caso de un reclamo en su respuesta.
Adjunte las justificaciones de cada ítem.

Total de puntos: 40

1. Sea X una v.a. con distribución gamma con parámetros $3\ y\ \lambda$, es decir:

$$P(X \leq x) = \frac{\lambda^3 x^2}{6} e^{-\lambda x}, si\ x \geq 0, 0\ en\ otro\ caso.$$

Calcule el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro λ. (5 pts)

2. Considere una muestra i.i.d. de tamaño 10, X= $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$, donde cada x_i es una v.a. normal, con media desconocida μ y varianza igual a 5. Se tiene como estimador de la media:

$$\hat{\mu} = \frac{x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10}}{10}$$

a) Estime el sesgo de estimador $\hat{\mu}$. (3 pts)
b) Indique si es un estimador insesgado asintóticamente. (1 pt)
c) Calcule la varianza del estimador $\hat{\mu}$. (2 pts)
d) Indique si es un estimador suficiente, justifique su respuesta (2 pt)

3. Se supone que la cantidad de estudiantes matriculados en un curso sigue una distribución normal con media 23 y desviación típica 5. Estime la probabilidad que en un grupo matriculen más de 25 alumnos. (5 pts)

4. Sea X v.a. con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Estime la esperanza de X y su varianza. (5 pts)
b) Estime la función generadora de momentos para X. (8 pts)

5. Dada una m.a.s. $x_1, x_2, \dots, x_n$ con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1/\theta}}{\theta x} & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

, se sabe que $E[\ln(x_i)] = -\theta\ y\ Var[\ln(x_i)] = \theta^2, \forall i = 1, \dots, n$. Y que:

$\hat{\theta} = \frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$, es un estimador insesgado con Var($\hat{\theta}$) $= \theta^2/n$

a. Si $I(\theta) = E_x[\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial \theta}]^2 = -E_x[\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial^2 \theta}]$, estime la cota de Cramer Rao para el parámetro θ, en el caso de un estimador insesgado, en términos de $\theta\ y\ n$ (5 pts)

b. Indique si $\hat{\theta}$ es un estimador de mínima varianza, justifique su respuesta (2 pts)

c. Indique si $\hat{\theta}$ es un estimador M.E.L.I, justifique la respuesta (2 pts)

Tabla Normal

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998