UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EEs Escuela de Estadística

Examen Parcial N°1
XS-0100 Fundamentos de la Teoría Estadística
Duración de la prueba: 120 min, jueves 9 de mayo 2024

Instrucciones generales: la prueba es de carácter individual, resuelva cada ejercicio propuesto. Respuestas realizadas con lápiz o con tachones o uso de corrector liquido podrían afectarle en caso de un reclamo en su respuesta. Adjunte las justificaciones de cada ítem.

Total de puntos: 40

1. Sea X una v.a. con distribución geométrica, es decir:

$$P(X = x_i) = (1 - p)^{x_i - 1} p,\ si\ x_i \geq 0, \text{y } 0\ en\ otro\ caso.$$

   Calcule el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro p. (5 pts)

2. Considere una muestra i.i.d. de tamaño n, X= (x_1, x_2, ... , x_n), donde cada x_i es una v.a. exponencial truncada de parámetro θ, cuya función de distribución es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\theta - x}, si\ x > \theta \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Estime la $E[x]$ y verifique que $E[x] = \theta + 1$. (5 pts)
b) Sea $\hat{\theta} = \bar{X}$, estimador del parámetro θ, determine el sesgo de $\hat{\theta}$ (3 pts)
c) Indique si $\hat{\theta}$ es un estimador asintóticamente insesgado, justifique brevemente (2 pt)

3. Se supone que el peso de un toro de la raza Brahman sigue una distribución normal con media 865 Kg y desviación típica de 135 Kg. Estime la Probabilidad que un Toro pese más de 1000 Kg. (5 pts)

4. Sea X v.a. sigue una distribución discreta de la siguiente manera

$$P(X = 0) = 0.5,\ \ P(X = 1) = 0.25,\ \ P(X = 2) = 0.25.$$

   Cero en cualquier otro caso.

a) Estime la función generadora de momentos para X. (5 pts)
b) Usando la función generadora de momentos estime la esperanza de X.(5 puntos)

5. Dada una m.a.s. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}, si\ x > 0 \\ 0\ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Sea $\hat{\lambda} = \bar{X}$ un estimador de λ, se sabe que: $E[\hat{\lambda}] = E[\bar{X}] = \lambda$, y que $E[\hat{\lambda}^2] = \frac{n+1}{n}\lambda^2$.

a. Si $I(\theta) = E_x\left[\frac{\partial \ln(L(\theta))}{\partial\theta}\right]^2 = -E_x\left[\frac{\partial^2 \ln(L(\theta))}{\partial\theta^2}\right]$, estime la cota de Cramer Rao para el parámetro λ, en el caso de un estimador insesgado. (6 pts)

b. Indique si $\hat{\lambda}$ es un estimador de mínima varianza, justifique su respuesta (2 pts)

c. Indique si $\hat{\lambda}$ es un estimador M.E.L.I, justifique la respuesta (2 pts)

Tabla Normal

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998