Universidad de Costa Rica
Escuela de Economía
EC-2201 Teoría de Juegos e Información
Profesora: Yanira Xirinachs-Salazar
Asistente: Rodrigo Sánchez Calvo
I-2024

Quiz I - Solución

Este quiz tiene una ponderación del 7 % en la evaluación del curso. Resuelva de forma clara, ordenada y completa cada uno de los ejercicios que se le presentan.
Cuenta con 50 minutos para completarlo.

1. Verdadero o falso. Lea, analice y determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. De ser falsas, explique por qué en un par de líneas. **20 puntos, 5 puntos cada una.**

a) Un equilibrio de Nash siempre es, por definición, un óptimo de Pareto. **Falso**.
   a)Al ser la correspondencia de mejores respuestas, estas podrían darse donde alguno de los jugadores no tenga el máximo bienestar.
   b) El equilibrio de Nash busca la correspondencia de mejores respuestas de individuos racionales que actúan considerando su propio beneficio. El concepto de Pareto se refiere al óptimo social.

b) Sofía, que tiene una función de utilidad $U(x) = \sqrt{x}$, es amante al riesgo.
   Falso.
   $U'(x) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$ y $U''(x) = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.
   En vista de que $U''(x) < 0$, Sofía es aversa al riesgo.

c) En los juegos estáticos de información completa, uno de los supuestos es que los jugadores toman decisiones al mismo tiempo, pero no se ponen de acuerdo.
   Verdadero.

d) En un juego en forma extensiva de información imperfecta, todo nodo distinto de un nodo terminal define un subjuego apropiado. Esto permite analizar cada subjuego por separado para encontrar equilibrios de Nash que son secuencialmente racionales.
   Falso.
   Un nodo distinto a uno terminal estaría conectado a otro (indicando que es un juego simultáneo) o la naturaleza juega, en cuyo caso no se podría definir un subjuego en cada nodo distinto al terminal.

2. Docentes y estudiantes se enfrentan a un dilema cuando se realiza un examen. Considere un juego donde el jugador 2 puede hacer trampa y copiar en el examen (T) o puede ser honesto (H). Por su parte, la jugadora 1 tiene dos alternativas, ignorar el hecho (I) o llevarlo a comisión de evaluación (E). Por supuesto que si el estudiante es honesto la profesora prefiere no llevarlo comisión de evaluación, pero si la profesora no lo lleva a la comisión el estudiante prefiere copiar. Los pagos del juego están dados por la siguiente matriz:

J_P/J_R	T	H
I	5,5	5,8
E	0,8	8,5

A partir de lo anterior:

a. Defina el juego en forma normal. **30 puntos**

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n, \{\Delta S_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i(s_{-i})\}_{i=1}^n \rangle$$

Jugadores:

$$N = \{P, R\} \quad \text{, donde P es la profesora y R el estudiante}$$

Conjuntos de acciones:

$$A_P = \{I, E\} \quad \text{, donde I es ignorar el hecho y E es acudir a comisión de evaluación}$$

$$A_R = \{T, H\} \quad \text{, donde T es hacer trampa y H ser honesto}$$

Conjuntos de estrategias:

$$S_P = \{I, E\} \quad \text{, donde I es ignorar el hecho y E es acudir a comisión de evaluación}$$

$$S_R = \{T, H\} \quad \text{, donde T es hacer trampa y H ser honesto}$$

Pagos

$$\text{Tienen la forma} \quad V_i(s_P, s_R) \quad \forall i \in N \quad \wedge \quad \forall s_P \in S_P \quad \wedge \quad \forall s_R \in S_R$$

Estrategias mixtas:

$$\Delta S_P = \{(\sigma_P(I), \sigma_P(E)); \sigma_P(I) \geq 0, \sigma_P(E) \geq 0; \sigma_P(I) + \sigma_P(E) = 1)\}$$

$$\Delta S_R = \{(\sigma_R(T), \sigma_R(H)); \sigma_R(T) \geq 0, \sigma_R(H) \geq 0; \sigma_R(T) + \sigma_R(H) = 1)\}$$

Creencias:

$$\pi_P(s_R) = \{(\pi_P(T), \pi_P(H)); \pi_P(T) \geq 0, \pi_P(H) \geq 0; \pi_P(T) + \pi_P(H) = 1)\}$$

$$\pi_R(s_P) = \{(\pi_R(I), \pi_R(E)); \pi_R(I) \geq 0, \pi_R(E) \geq 0; \pi_R(T) + \pi_R(E) = 1)\}$$

Para simplificar la notación considere que:

$$\sigma_P(I) = \alpha \quad \wedge \quad \sigma_P(E) = 1 - \alpha$$

$$\sigma_R(T) = \beta \quad \wedge \quad \sigma_R(H) = 1 - \beta$$

b. Determine el equilibrio de Nash en estrategias puras. **5 puntos**

J_P/J_R	T	H
I	**5**,5	5,**8**
E	0,**8**	**8**,5

No se da correspondencia de mejores respuestas en estrategias puras, por lo que no existe equilibrio de Nash en estrategias puras.

c. Determine y grafique la función de pagos para cada jugador, y encuentre la función de mejor respuesta. **25 puntos**

Para profesora (P)

$$v_P(I, \sigma_R) = 5 * \beta + 5 * (1 - \beta) = 5$$

$$v_P(E, \sigma_R) = 0 * \beta + 8 * (1 - \beta) = -8\beta + 8$$

Igualando,

$$\begin{aligned} v_P(I, \sigma_R) &= v_P(E, \sigma_R) \\ 5 &= -8\beta + 8 \\ 8\beta &= 3 \\ \beta &= \frac{3}{8} \implies 1 - \beta = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Para estudiante (R)

$$v_R(\sigma_P, T) = 5 * \alpha + 8 * (1 - \alpha) = -3\alpha + 8$$

$$v_R(\sigma_P, H) = 8 * \alpha + 5 * (1 - \alpha) = 3\alpha + 5$$

Igualando,

$$\begin{aligned} v_R(\sigma_P, T) &= v_R(\sigma_P, H) \\ -3\alpha + 8 &= 3\alpha + 5 \\ 3 &= 6\alpha \\ \alpha &= \frac{1}{2} \implies 1 - \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ya que tenemos las funciones de pago para ambos jugadores, se grafican para así hallar la función de mejor respuesta.

d. Grafique la correspondencia de mejor respuesta y determine el equilibrio de Nash en estrategias mixtas. **20 puntos**

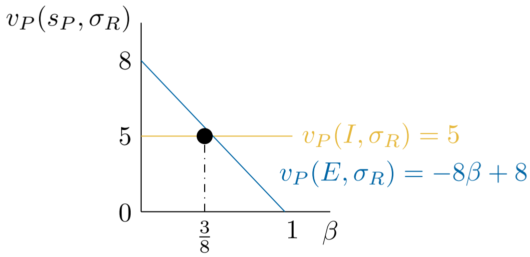

Figura 1: Función de pagos para 1

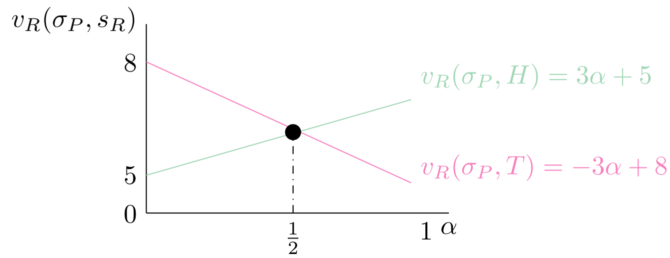

Figura 2: Función de pagos para 2

$$MR_P(\beta) = \begin{cases} \alpha = 1 & \text{si} \quad \beta > \frac{3}{8} \\ \alpha \in [0,1] & \text{si} \quad \beta = \frac{3}{8} \\ \alpha = 0 & \text{si} \quad \beta < \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$MR_R(\alpha) = \begin{cases} \beta = 0 & \text{si} \quad \alpha > \frac{1}{2} \\ \beta \in [0,1] & \text{si} \quad \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 1 & \text{si} \quad \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$$

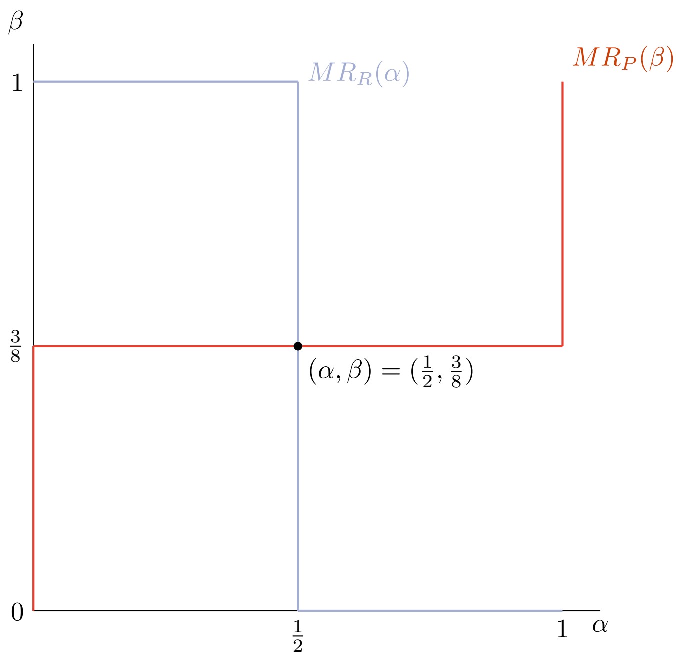

Figura 3: Correspondencia de mejores respuetas

Dado todo el proceso anterior, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas viene dado por

$$S^N(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$$

$$S^N(\sigma_P^*, \sigma_R^*) = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)\right)$$

Ambas formas son correctas.