Apuntes Juegos Primer Parcial

Material en Proceso

Luciano Arias Cascante

Sebastián Cortés Gutiérrez

Javier Cornejo Hidalgo

Daniel González López

Emilio Mena Rodríguez

Miguel Ángel Rodríguez Carpio

2025

Contents

Aviso El presente documento se basa en el curso de Teoría de Juegos e Información impartido en el I ciclo lectivo del año 2025 por las profesoras Yanira Xirinaschs Salazar y María Paula Trejos Vega. Gran parte de las ideas son una reproducción literal de los apuntes de dicho curso. Otra pequeña parte son apuntes propios y explicaciones personales. Además, gran parte del material es recopilado del libro "Game Theory An Introduction" de Steven Tadelis (2013).

1 Axiomas

Supuesto Base: Las personas tomadoras de decisiones se guían de la racionalidad para poder elegir el resultado que maximice sus ganancias.

1. **Transitividad**: Las preferencias de un agente se pueden ordenar provocando que no pueda haber contradicciones entre las preferencias de este. Por ejemplo:

   $$\text{Si } A \succ B \wedge\ B \succ\ C, \text{ entonces } A \succ C$$

2. **Completitud**: Garantiza que los agentes tomen decisiones (no puedan quedar indecisos). En el caso de llegar a tener preferencias muy parecidas, se usa :

   $$A \succsim B$$

   para decir que B es al menos igual de preferido que A

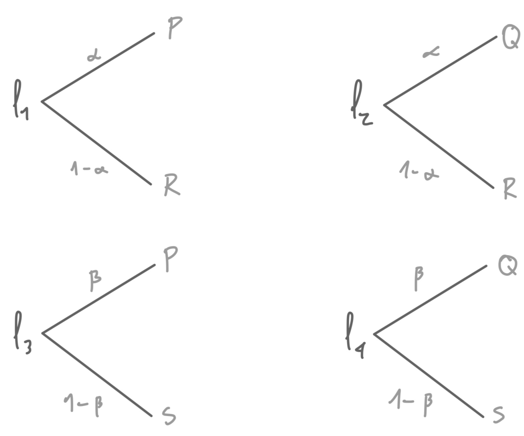
3. **Continuidad**: Dice que las preferencias de los agentes no pueden tener cambios marginales drásticos. En otras palabras, no hay nada tan bueno (o tan malo) que no se vuelva insignificante si se le asigna una probabilidad lo suficientemente baja. Por ejemplo, téngase dos loterías prosibles $P \wedge Q : P \in L, Q \in L$ donde L es el conjunto de loterías posibles. Entonces, para toda lotería R posible que ocurra se cumple que:

   $$P \succ (1-\alpha)Q + \alpha R : 0 < \alpha < 1$$

   o que:

   $$Q \prec (1-\beta)P + \alpha R : 0 < \beta < 1$$

4. **Independencia**: Si se tiene un par de pares de loterías las cuales son equiprobables y todos los posibles resultados son idénticos menos uno. Si se prefiere una lotería sobre la otra en el primer par, en el segundo par la preferencia se va a mantener. Por ejemplo, si se tienen las loterías:

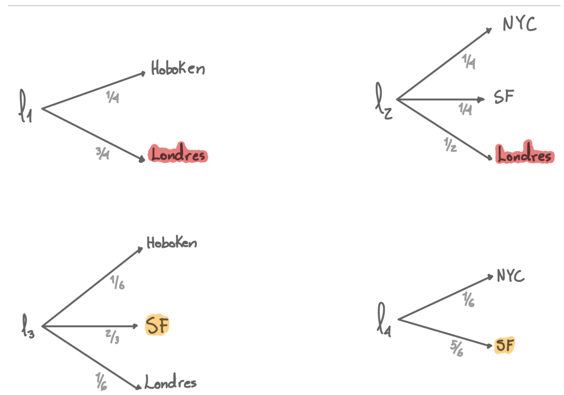
   

   y se dice que $l_1 \succ l_2$; entonces, $l_3 \succ l_4$; ya que, lo único que varía entre las loterías son las $S \wedge R$ las cuales no inciden ningún tipo de información sobre las preferencias. A estas se les conoce como "alternativas irrelevantes".

2 Incertidumbre

2.1 Pasar de loterías simples a compuestas

Para entender este tema se presentará el siguiente ejemplo:
A usted le dan las siguientes loterías simples $l_1 \wedge l_2$, $l_3 \wedge l_4$ y quiere compararlas. Sin embargo, una lotería tiene 2 ramas mientras que la otra tiene 3.

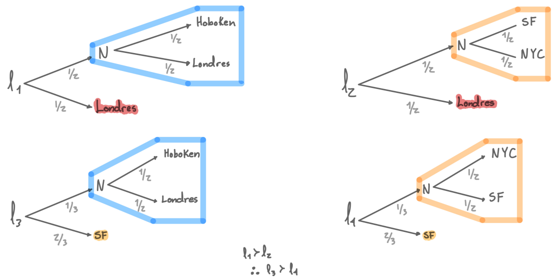


Convenientemente, en algunos casos se puede pasar de una lotería simple a una compuesta con el fin de poder compararlas entre sí. Este es uno de esos casos. El primer aspecto que evidencia esto es que hay pagos de estas loterías los cuales son iguales entre si (Londres en el caso de las loterías $l_1 \wedge l_2$ y SF en el caso de las loterías $l_3 \wedge l_4$). Estas son las alternativas irrelevantes de estas loterías.

Con la información anterior se puede empezar a armar loterías compuestas. El objetivo es hacer loterías casi idénticas para poder por medio del axioma de independencia darles un ordenamiento de preferencias. Primero, se van a poner las alternativas irrelevantes en las ramas que salen del primer nodo. De este nodo se puede ya sea dirigir a la alternativa irrelevante o a un nodo de naturaleza. Después, se le va a asignar una probabilidad a cada rama por medio de buscar qué probabilidad tiene la alternativa irrelevante en la lotería simple que tenga tres ramas. Dicha probabilidad es la que se le va a asignar a ambas loterías en su primer parte. ¿Porqué es esto? Para que el axioma de independencia pueda tener sentido; ya que, si no se tienen ramas equiprobables no se puede llegar a ninguna conclusión. Dado que se le asignó cierta probabilidad α a la rama de la alternativa irrelevante, a la otra rama se le asignará una probabilidad con el complemento $(1-\alpha)$.

Ahora, para armar las ramas de la lotería compuesta se debe de "usar las que faltan" para completar el árbol. En el caso de la lotería con dos ramas, se vuelve a usar la alternativa irrelevante además de la otra alternativa que falta. En el caso de la lotería con tres ramas, se le asignan las otras dos ramas que hasta el momento no se han utilizado.

Es muy importante asignarle bien las probabilidades a estas segundas ramas; ya que, es sencillo cometer una error. Lo que se debe de saber es que al estar en una lotería compuesta, las probabilidades se multiplican; por ende, si en la primera rama se tiene la probabilidad de $(1-\alpha)$ y en la otra se tiene una probabilidad de $\frac{1}{4}$; entonces, la verdadera probabilidad sería de $\frac{1}{4} \cdot \alpha$. Además, **la probabilidad de cada pago tiene que ser la misma que la probabilidad del pago en la lotería inicial.** No importa si están en ramas totalmente separadas (como las alternativas irrelevantes) que aún así se debe de tener la misma magnitud de probabilidad que la lotería simple inicial. Siguiendo estos pasos, las loterías compuestas se verían algo así:



Entonces, ahora se puede notar que las ramas que están resaltadas con azul y anaranjado se pueden comparar fácilmente por medio del axioma de independencia. Entonces, si la lotería $l_1 \succ l_2$; entonces, por el axioma de independencia se puede concluir que $l_3 \succ l_4$.

2.2 Riesgo

Según Von Neumann–Morgenstern, existen tres tipos de personas cuando se habla de afontarse a riesgo:

Neutral al riesgo: El jugador está dispuesto a intercambiar cualquier pago seguro con cualquier lotería que le garantice el mismo pago monetario esperado.

Averso al riesgo: Es una presona la cual no está dispuesta a intercambiar una lotería con un pago garantizado a otra lotería (no degenerada) la cual tiene el mismo valor esperado.

Amante al riesgo: Es una presona la cual quiere intercambiar una lotería con un pago garantizado a otra lotería (no degenerada) la cual tiene el mismo valor esperado.

La Paradoja de San Petesburgo:
Esta paradoja muestra que el valor de una lotería no debería de ser medida por el valor monetario esperado; sino, por el valor monetario de su pago esperado. En otras palabras, cuánta utilidad le genera al agente el valor esperado de una lotería.

Valoración del Dinero:
Similar a Macro II, el valor presente del futuro es:

$$\frac{1}{(1+r)^t}$$

tal que t es el periodo del que se trae el ingreso. Además, el factor de descuento del mercado es $\delta : \delta \in [0, 1]$.

En ejercicios vistos en clase donde se usa este tema, se hace el caso contando el factor de descuento en los pagos y se busca un punto de indiferencia entre los casos de elecciones. Otro ejemplo es que haya que hacer los casos donde se le da a uno la posible información y hay que encontrar cuanto se valora dicha información. Para este tipo de ejercicios lo que se hace es hacer ambos casos y sacar el valor esperado del pago y descontar:

valor del dinero = pago esperado con la información - pago esperado sin la información

La Paradoja de Condorcet: Muestra que las las decisiones grupales pueden llegar a romper el axioma de transitividad debido a distintos gustos y preferencias. Por ende, se puede llegar a no tomar una decisión racional grupal.

La Paradoja de Allais: Muestra que las personas tienden a preferir loterías degeneradas que loterías con el mismo valor esperado que el de dicha lotería degenerada. En otras palabras, que ante situaciones de certeza se puede romper el axioma de independencia.

2.3 Probabilidad Condicional y Fórmula de Bayes:

Para entender dicho tema, tómese el siguiente ejercicio:

Surgery: A patient is very sick and will die in 3 months if he goes untreated. The only available treatment is risky surgery. The patient is expected to live for 12 months if the surgery is successful, but the probability that the surgery will fail and the patient will die immediately is 0.3.

a. Draw a decision tree for this decision problem.

b. Let v(x) be the patient's payoff function, where x is the number of months until death. Assuming that v(12)= 1 and v(0)= 0, what is the lowest payoff the patient can have for living 3 months so that having surgery is a best response?

For the rest of the problem, assume that v(3)= 0.8.

c. A test is available that will provide some information that predicts whether or not surgery will be successful. A positive test implies an increased likelihood that the patient will survive the surgery as follows: True-positive rate: The probability that the results of this test will be positive if surgery is to be successful is 0.90. False-positive rate: The probability that the results of this test will be positive if the patient will not survive the operation is 0.10. What is the probability of a successful surgery if the test is positive?

d. Assuming that the patient has the test done, at no cost, and the result is positive, should surgery be performed?

e. It turns out that the test may have some fatal complications; that is, the patient may die during the test. Draw a decision tree for this revised problem.

f. If the probability of death during the test is 0.005, should the patient opt to have the test prior to deciding on the operation?

Solución:

Primero, se arfma el árbol

3 Juegos Estáticos con Información Completa

Definición: Juegos donde cada jugador elige, independientemente, una acción de su conjunto de acciones **de forma simulánea** a los otros jugadores y dicha acción lleva a un resultado conocido. Cabe recalcar que el juego al ser de forma simultánea **no significa** que los jugadores tengan que tomar la desición al mismo tiempo. Esto solo significa que los jugadores toman las desiciones sin saber lo que el otro jugador va a hacer.

Un juego con información completa requiere que sea de **conocimiento común de todos los jugadores** los siguientes aspectos:

1. Todas las posibles acciones de todos los jugadores.

2. Todos los posibles resultados.

3. Cómo cada combinación de acciones de cada uno de los jugadores afecta los resultados.

4. El órden de preferencias de los jugadores sobre los todos los psoibles resultados.

Conocimiento común: Quiere decir que todos los jugadores en un juego conocen todos los eventos posibles. Además, los jugadores también saben que los demás saben de estos eventos. Por ende, los jugadores tomarán una desición racional sabiendo qué es lo que los demás pueden y prefieren elegir.

Estrategias: Son planes de acción completos que se toman **antes** de que el juego se lleve a cabo.

3.1 Supuestos base necesarios para encontrar soluciones a los juegos:

1. **Los jugadores son racionales**. Es decir, eligen la estrategia $s_i \in S_i$ que maximiza sus ganancias de acuerdo con sus preferencias y creencias.

2. **Los jugadores son inteligentes:** Conocen todo acerca el juego (acciones, resultados y preferencias de los demás jugadores).

3. **Conocimiento común**: La inteligencia de los jugadores es conocida por los otros jugadores.

4. **Auto mejoramiento:** Los jugadores buscan tomar la decisión que más les beneficie a **ellos mismos**. Importante tomarlo en cuenta para los juegos no cooperativos.

Juegos no Cooperativos: Cada jugador **tiene control sobre sus propias acciones** y toma la decisión que más cree que le beneficie. **Solo ocurre un equilibrio si** el perfil de estrategias está compuesta por la estrategia de cada jugador que los hace estar satisfechos con la desición que tomaron. Por ejemplo:

$$S = \{s_1, s_2, ..., s_n\} : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, ..., s_n \in S_n$$

tal que $s_1, s_2, ..., s_n$ es la estrategia de cada jugador que lo hace estar satisfecho con su decisión.

$\diamond$ Un conjunto de soluciones $S' = \{s'_1, s'_2, ..., s'_n\}$ es **socialmente indesiable** sii existe otro conjunto de soluciones $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ el cual puede mejorar el pago de alguno o algunos de los Jugadores sin perjudicar el pago de otro jugador. A esto se le llama **dominancia de pareto.** Por ejemplo, dado lo dicho anteriormente, S' es pareto dominada por S.

3.2 Forma normal de una juego (Primer Parcial)

$$\langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{s_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n, \{\Delta s_i\}_{i=1}^n, \{\prod_i(s_j)\}_{i=1}^n | i \neq j\rangle$$

Jugadores: $N = \{1, 2, ..., n\}$

Acciones: $A_i = \{...\} \forall i \in N$

Estrategias: $S_i = \{...\} \forall i \in N$ (es el mismo conjunto que A_i si se está hablando de un juego estático con información completa)
Pagos:$v_i(\cdot) = v_i(s_1, ..., s_n) \forall i \in N, \forall s_1 \in S_1, ..., \forall s_n \in S_n$

Los pagos se pueden presentar ya sea en forma matricial o en forma funcional. A continuación, un ejemplo de los pagos en forma matricial:

Pagos en forma matricial

$1\backslash 2$	**A**	**M**	**B**
A	$(-1, -1)$	$(1, -2)$	$(2, -4)$
M	$(-2, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
B	$(-4, 2)$	$(-1, 1)$	$(3, 3)$

Siendo $1, 2$ los jugadores del juego. A, M, B las estrategias de cada judagor y los pares ordenados dentro de la matriz los son pagos asociados a cada combinación de estrategias elegidas.

Estrategias Mixtas:

$$\Delta S_i = \{(\sigma_i(s_1), ..., \sigma_i(s_n)) : \sigma_i(s_1) \geq 0, ..., \sigma_i(s_n) \geq 0, \sigma_i(s_1) + ... + \sigma_i(s_n) = 1\} \forall i \in N$$

Creencias:

$$\prod_i(s_j) = \{\prod_i(s_1), ..., \prod_i(s_n) : \prod_i(s_1) \geq 0, ..., \prod_i(s_n) \geq 0, \prod_i(s_1) + ... + \prod_i(s_n) = 1\} \forall i \in N | i \neq j$$

3.3 Estrategia dominada

Se le dice estrategia dominada a aquella que bajo ninguna circunstancia se va a elegir sobre otra.

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s_i', s_{-i}) \forall s_i \in S_i, \forall s_i' \in S_i'$$

Entonces, se puede decir que s_i' es una estrategia dominada por s_i; ya que, cada pago para s_i es mayor que el pago de s_i'.

Ojo: Una estrategia **estríctamente dominada** es aquella que es dominada por todas las demás estrategias posibles. **Un jugador NUNCA va a jugar una estrategia estríctamente dominada.**

Las estrategias con **dominancia débil** son aquellas que tienen un pago **mayor o igual** a otra estrategia que se pueda elegir:

$$v_i(s_i, s_{-i}) \geq v_i(s'_i, s_{-i}) \forall s_i \in S_i, \forall s'_i \in S'_i$$

3.4 Estrategia estríctamente dominante (E.E.D.)

Es aquella estratetegia que domina a todas las demás estrategias.

$$v_i(s_i, s_{-i}) > v_i(s'_i, s_{-i}) \forall s_i \in S_i, \forall s'_i \in S'_i, s'_i \neq s_i$$

- Es poco común ver este tipo de estrategias; ya que, que una estrategia sobrepase en pagos a cualquier otra estrategia es muy poco probable.

- El equilibrio por EED solo ocurre si existe una estrategia estríctamente dominante para cada jugador y **este equilibrio es único.** El equilibrio se denota como:

$$S^{EED} = (v_1, v_2, ..., v_n)$$

3.5 Eliminación Iterada de Estrategias Estríctamente Dominantes (E.I.E.E.D.)

Es otro método que se usa para encontrar soluciones a los Juegos. Se bbasa en el principio de **"¿qué es lo que no haría el otro jugador?"**. Para mantener el órden, el método se aplica eliminando como máximo una estrategia de cada jugador por ronda (aunque se pueden eliminar más si es posible). Es de suma importancia notar que este método tiene un "efecto cascada" el cual hace que lo que uno elimina en la ronda 0 se vea reflejado hasta la ronda 1 en las estrategias del jugador. A continuación, un ejemplo de una EIEED:

Ronda 0:

- $S_1^0 = \{A, M, B\}$
- $S_2^0 = \{A, M, B\}$

Note que para 1:
M es una estrategia estrictamente dominada por A, por lo tanto se elimina M.

Matriz de Pagos: Ronda 0 (1)

1\2	**A**	**M**	**B**
A	$(-1,-1)$	$(1,-2)$	$(2,-4)$
M	$(-2,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
B	$(-4,2)$	$(-1,1)$	$(3,3)$

Ronda 1:

- $S_1^1 = \{A, B\}$
- $S_2^1 = \{A, M, B\}$

Note que para 2:
M es una estrategia estrictamente dominada por A, por lo tanto se elimina M.

Matriz de pagos: Ronda 1

1\2	**A**	**M**	**B**
A	$(-1,-1)$	$(1,-2)$	$(2,-4)$
B	$(-4,2)$	$(-1,1)$	$(3,3)$

Ronda 2

- $S_1^2 = \{A, B\}$
- $S_2^2 = \{A, B\}$

No se puede seguir resolviendo por el método EIEED, por lo tanto la solución del juego es: $S^{EIEED} = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$

Matriz de Pagos: Ronda 2 (2)

1\2	**A**	**B**
A	$(-1, -1)$	$(2, -4)$
B	$(-4, 2)$	$(3, 3)$

Aspectos importantes del ejemplo anterior:

- El conjunto de posibles equilibrios se denota por:

$$S^{EIEED} = \{\text{Los pares ordenados de estrategias separados por commas acá}\}$$

- Se pone un comentario al final de cada ronda explicando cual estrategia es dominada por otra para cada jugador.
- El conjunto de posibles estrategias para cada jugador en cada ronda es denotado por:

S_a^b donde a es el jugador siendo evaluado y b la ronda en que el proceso se encuentra.

⋆ Características de equilibrios por EIEED:

- Requiere del supuesto de **conocimiento común de la racionalidad**
- No se necesita tener estrategias estríctamente dominantes
- No es necesario que para todos los jugadores haya estrategias **estríctamente dominadas**
- El producto final del método puede no llegar a una única solución posible
- No necesariamente se va a llegar a un óptimo de pareto por medio este método

Nota: En general, para ningún método de resolución de juegos va a ser garantizado poder llegar a un óptimo de pareto. Esto va a depender plenamente del juego que se presente. Porque, a pesar que existen equilibrios socialmente deseados, un jugador puede optar no tomar la decisión de llegar a un óptimo de pareto debido a que la naturaleza de los juegos estáticos hacen que los jugadores tomen las decisiones simultáneamente. Provocando que no se puedan comunicar entre sí para llegar a la mejor solución posible. Todo esto provocando que en juegos no cooperativos se pueda no llegar a un equilibrio óptimo de pareto.

3.6 Método de solución por Razonabilidad

Para llevar a cabo este método se debe de agregar un supuesto más a los ya existentes, llamado creencias.

Supuestos necesarios:

- Racionalidad
- Conocimiento común de la racionalidad

- Creencias

Un jugador usa creencias cuando intuye que un jugador va a jugar una estrategia $s_j \in S_j | i \neq j$.

O sea, cuando cree que de todo el perfil de estrategias del otro jugador se va a jugar una estrategia específica.

El método de Razonabilidad se lleva a cabo por medio de una herramienta llamada **mejor respuesta**. Esta se denota como:

$$MR_1(s_2) = s_1, \forall s_1 \in S_1, \forall s_2 \in S_2$$

donde $MR_1(s_2)$ singifica la mejor respuesta del jugador 1 dado que el jugador 2 escogió la estrategia s_2.

♣ Notar que para usar la herramienta de mejor respuesta se deben de usar creencias.

Con todo esto se llega a que los jugadores van a ir delimitando y reduciendo la matriz de pagos por medio de lo que los jugadores nunca jugarían si los otros jugaran una estrategia determinada.

Por ejemplo, usando la matriz (1):
Para J_1, las mejores respuestas dadas las estrategias de J_2 son:

- $MR_1(A) = A$
- $MR_1(M) = A$
- $MR_1(B) = B$

Por lo tanto, no es razonable que J_1 juegue la estrategia M.

Para J_2, las mejores respuestas dadas las estrategias de J_1 son:

- $MR_2(A) = A$
- $MR_2(M) = A$
- $MR_2(B) = B$

Por lo tanto, no es razonable que J_2 juegue la estrategia M.

Note que para J_1 las estrategias A y B son razonalizables. Del mismo modo para J_2 las estrategias A y B son razonalizables. Así la matriz de pagos reducida es la siguiente:

Matriz de pagos reducida

1\2	**A**	**B**
A	$(-1, -1)$	$(2, -4)$
B	$(-4, 2)$	$(3, 3)$

Asimismo, la solución mediante el concepto solución de razonabilidad es:

$$S^R = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$$

Importante: La notación en las evaluaciones debe de ir tal ir tal y como viene acá. Todo lo que se menciona y pone en este ejemplo es importante.

3.7 Método de Equilibrio de Nash

Sumado a todos los supestos necesarios para los otros métodos abarcados, ahora se añade uno más llamado **creencias correctas**. Las creencias correctas consisten en especulaciones sobre la acción que va a tomar otro jugador y estas especulaciones son ciertas. Por ejemplo, si el otro juagdor tiene un perfil de estrategias:

$$S_{-i} = \{s_1, ..., s_n\} | i \notin -i$$

y yo creo que él va a jugar la estrategia $s_k | s_k \in S_j$; entonces, él si va a jugar la estrategia s_k.

Entonces, se tiene que **los supuestos necesarios para un Equilibrio de Nash** son:

- Racionalidad
- Conocimiento común de la racionalidad
- Creencias
- Creencias Correctas

Ahora, un Equilibrio de Nash se define como un sistema de creencias y un perfil de estrategias para el cual cada jugador está jugando su mejor respuesta dadas sus propias creencias correctas sobre lo que van a hacer los demás. Una sugerencia a la hora de usar el Equilibrio de Nash es pensar "dado a que el otro jugador jugó la estrategia s_{-i}, ¿qué estrategia voy a jugar yo?

Por ende, se puede llegar a que **un Equilibrio de Nash es lo mismo a una correspondencia de mejores respuestas**. Un ejemplo usando la misma matriz (1):

$1\backslash 2$	**A**	**M**	**B**
A	$(\underline{-1}, \overline{-1})$	$(\underline{1}, -2)$	$(2, -4)$
M	$(-2, \overline{1})$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
B	$(-4, 2)$	$(-1, 1)$	$(\underline{3}, \overline{3})$

cada línea horizontal que está por debajo del pago es la mejor respuesta del J_1 dado que el J_2 escogió su respectiva estrategia. Lo mismo ocurre con las líneas horizontales encima de los números pero para el J_2. Se puede notar que existen celdas de la matriz donde hay líneas por encima y por abajo de los pagos. En estas celdas hay un equilibrio de Nash. Por lo tanto, se concluye que el conjunto solución de Equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego es:

$$S^N = \{(-1, -1), (3, 3)\}$$

Es muy importante también tomar en cuenta que **en estartegias puras puede no existir un Equilibrio de Nash; pero, en estrategias mixtas siempre va a existir un Equilibrio de Nash.**

3.8 Estrategias Mixtas

Las estrategias mixtas son una DLC a las entrategias puras. ya que, **son una distribución de probabilidad asociada alguna o algunas estrategias puras.** Entonces, si el perfil de estrategias para los jugadores fuera por ejemplo lavarse los dientes (L) o ir al interior (B), (L) con una probabilidad de 0.3 y (B) con una probabilidad de 0.7 (la suma de las probabilidades debe de dar 1); entonces, en la forma normal del juego las estrategias se verían de la siguiente forma:

$$\Delta S_i = \{(\sigma_i(L), \sigma_i(B)) : \sigma_i(L) \geq 0, \sigma_i(B) \geq 0, \sigma_i(L) + \sigma_i(B) = 1\} \forall i \in N$$

Se debe de notar que una estrategia pura no es más que una estrategia degenerada mixta. Lo cual tiene sentido; ya que significaría que esa estrategia se va a jugar siempre y las demás tendrían una probabilidad nula de ser jugadas. Por ende, se puede decir que esa estrategia también sería una estrategia **estríctamente dominante**.***

Por otro lado, las creencias consisten en una distribución de probabilidad que el jugador i asigna a que el otro jugador juegue $s_{-i} \in S_{-i}$. Entonces, con el ejemplo anterior, dígase que el jugador i cree que sus oponentes tienden ir más al baño porque se comieron un plato con laxante. Por ende le asigna una probabilidad de 0.9 a que ellos vayan al baño. Entonces, las creencias en la forma normal se verían de la forma:

$$\pi_i(s_{-i}) = \{\pi_i(B), \pi_i(L) : \pi_i(B) \geq 0, \pi_i(L) \geq 0, \pi_i(B) + \pi_i(L) = 1\} \forall i \in N$$

y además,

$$\pi_i(B) = 0.9$$
$$\pi_i(L) = 0.1$$

Al tener probabilidades asociadas, también entran en cuestión los pagos esperados. Estos tienen dos posibles formas:

1. **Cuando el jugador i juega estrategias puras y el jugador $-i$ juega estrategias mixtas:*****

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i})$$

   que dice "la suma de todos los pagos del jugador i por el chance de que el otro jugador elija una estrategia específica".

2. **Cuando todos los jugadores juegan estrategias mixtas:**

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_{-i}(s_{-i}) v_i(s_i, s_{-i})$$

   que dice "la suma de todos los pagos del jugador i por el chace que i elija una estrategia específica por el chance de que $-i$ elija una estrategia específica"***

Siguiendo con la misma matriz (1), se hará un ejemplo de como encontrar la mejor respuesta de cada jugador, las funciones de pagos (y la gráfica correspondientes), la correspondencia de mejores respuestas y el Equilibrio de Nash con estrategias mixtas (y la gráfica correspondiente). Sin embargo, primero se debe de hacer EIEED con el fin de agilizar el proceso. Similar a lo que se explicará más adelante, un jugador nunca va a elegir una estrategia estríctamente dominada; por ende, se pueden descartar ciertas estrategias. En mixtas es importante hacer esto con el fin de trabajar con la menor cantidad de parámetros posibles. Para este ejemplo en específico, si no se hubiera llevado a cabo EIEED, se trabajaría con 4 parámetros en vez de 2. Por ende, se trabajará directamente con la matriz (2).

Suponga que J_1 jugará la estrategia A con una probabilidad de p y que J_2 jugará también la estrategia A con una probabilidad q. Por complemento ya se tienen todas la probabilidades y las creencias serían:

$$\begin{array}{ll} \sigma_1(A) = p & \sigma_2(A) = q \\ \sigma_1(B) = 1-p & \sigma_2(B) = 1-q \end{array}$$

y la matriz de pagos tendría la siguiente forma:

		q	$1-q$
	$J_1 \backslash J_2$	**A**	**B**
p	**A**	$(-1,-1)$	$(2,-4)$
$1-p$	**B**	$(-4,2)$	$(3,3)$

Tomando lo anterior en cuenta, se pueden encontrar las funciones de pagos con la estrategia mixta del otro jugador:

$$\begin{array}{ll} v_1(A,\sigma_2) = -1 \cdot q + 2(1-q) = 2-3q & v_2(A,\sigma_1) = -1 \cdot p + 2(1-p) = 2-3p \\ v_1(B,\sigma_2) = -4 \cdot q + 3(1-q) = 3-7q & v_2(B,\sigma_1) = -4 \cdot p + 3(1-p) = 3-7p \end{array}$$

y estas funciones de pagos graficadas tienen la siguiente forma:

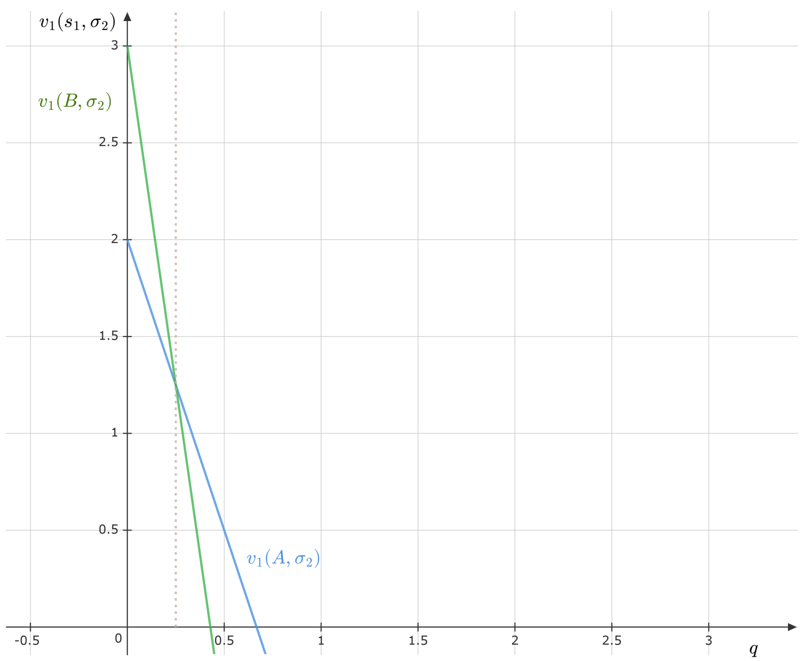


Figure 1: Gráfica de pagos del jugador 1

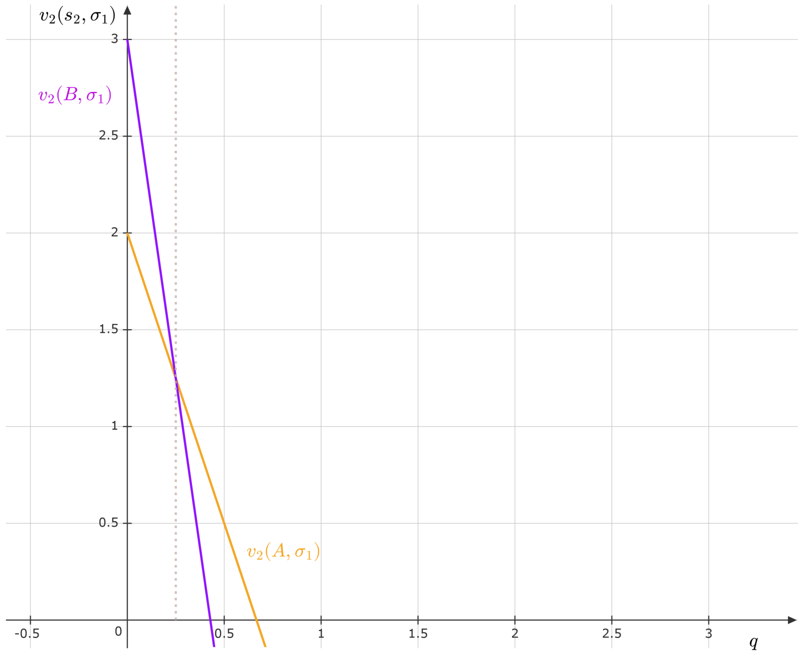


Figure 2: Gráfica de pagos del jugador 2

En estas gráficas se puede ver una línea punteada la cual es trazada en $q = \frac{1}{4} \wedge p = \frac{1}{4}$ respectivamente que muestra el punto de indiferencia del jugador entre realizar una u otra estrategia dada la probabilidad que el oponente juegue la estrategia A. Esto se obtiene por medio de igualar cada función de pagos de cada jugador y despejar. Dicho punto de indiferencia se usa como base para armar la función de mejor respuesta.

Ya teniendo el punto de indiferencia, se "buscan los extremos" por medio de sustituir cuando las probabilidades son $0 \wedge 1$ en las funciones de pagos. Con el pago asociado se clasifica el órden de preferencias del jugador y por ende, se determina cual es la probabilidad de que un jugador juegue una estrategia determinada.

$$\begin{gathered}\text{Para } J_1 \\ \text{si } q = 0 \; v_1(A, \sigma_2) = 2 \\ v_1(B, \sigma_2) = 3\end{gathered}$$

Por lo tanto, $v_1(A, \sigma_2) \succ v_1(B, \sigma_2)$.

$$\begin{gathered}\text{si } q = 1 \; v_1(A, \sigma_2) = -1 \\ v_1(B, \sigma_2) = 4\end{gathered}$$

Por lo tanto, $v_1(A, \sigma_2) \succ v_1(B, \sigma_2)$.

Con esta información se puede armar la función de mejor respuesta de J_1 1, dado que J_2 tiene una probabilidad q de jugar la estrategia A:

$$MR_1(q)\begin{cases} p = 0 & \text{si } q < \frac{1}{4} \\ p \in [0,1] & \text{si } q = \frac{1}{4} \\ p = 0 & \text{si } q > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Haciendo todo lo anterior para J_2, se obtiene que:

$$MR_2(p)\begin{cases} q = 0 & \text{si } p < \frac{1}{4} \\ q \in [0,1] & \text{si } p = \frac{1}{4} \\ q = 0 & \text{si } p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Se puede notar que la función de mejor respuesta es muy similar para ambos jugadores. Esto va relacionado con el hecho que hay Equilibrios de Nash en estrategias puras en este juego. Por otro lado, si se grafican estas dos funciones de mejor respuesta, se obtiene lo siguiente:

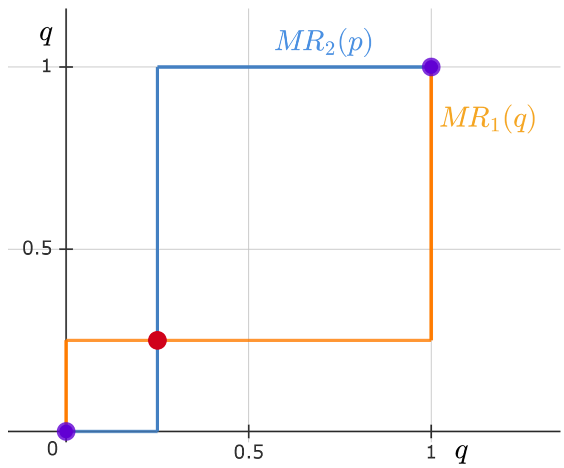


Figure 3: Gráfica de mejores respuestas entre jugadores

donde el punto rojo muestra el Equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Su conjunto solución se denota de la siguiente forma:

$$S^N(p,q) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ o bien, } S^N = \left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right\}$$

donde en la segunda forma de presentar el equilibrio la primera coordenada sería p y la segunda $1 - p$ y de la misma forma para q.

3.9 Ejemplo con matrices grandes

A continuación se presenta la siguiente matriz de un examen viejo:

$J_1 \backslash J_2$	P	Q	R	S	T	U	V	W
A	0,1	1,1	0,1	1,3	0,5	1,0	0,6	1,6
B	1,0	2,1	1,5	4,3	1,6	2,2	3,3	2,1
C	3,1	2,2	1,4	4,4	4,6	3,2	2,2	4,7
D	1,0	1,1	0,6	0,4	3,7	2,7	1,7	3,9
E	0,1	1,2	2,4	3,3	2,5	1,8	0,8	3,6
F	3,0	2,1	2,6	8,5	2,7	3,4	4,8	3,8
G	2,1	3,2	2,4	4,3	5,5	6,5	5,5	5,6
H	1,0	2,1	3,3	6,2	4,4	4,4	1,6	6,5

Matriz de pagos Examen I 2024 IIC (3)

Se puede notar que hacer cualquier procedimiento para encontrar posibles soluciones en esta matriz se puede volver engorroso. Sin embargo, existen "tips" para agilizar este proceso.

3.9.1 E.E.D.

Basándose en la racionalidad del jugador (único supuesto necesario para llevar a cabo EED), para agilizar este proceso solo se debe de buscar si en las estrategias de un jugador dado que el otro jugador juega una estrategia "X" se repite el pago más alto. En el caso que si, se está viendo una dominancia débil en vez de una estricta. Debido a esto, el jugador **NO** va a tener una estrategia que siempre vaya a jugar. Por ende, el conjunto solución por medio de este método sería:

$$S^{EED} = \varnothing$$

Esta idea se repetiría hasta encontrar un contra ejemplo. En el caso de no encontrar ninguno, se estaría llegando a una estrategia estríctamente dominante.

Por ejemplo, en esta matriz, para J_2 dado que J_1 jugó la estrategia A, se puede ver que los pagos de $V \wedge W$ son equivalentes. Similarmente, para J_1 dado que J_2 jugó la estrategia P, se puede ver que los pagos de $C \wedge F$ son equivalentes. Por ende, se llega a que el conjunto de soluciones $S^{EED} = \varnothing$.

3.9.2 E.I.E.E.D.

Para este método se van a buscar "estrategias candidatas", las cuales son estrategias que dado que el otro jugador juega una estrategia "X" tienen el mayor pago posible. Después, con estas se va a armar una "secuencia de prioridades". Por ejemplo, similar al caso anterior, $C \wedge F$ para el J_1 y $V \wedge W$ para J_2 serían estrategias candidatas. Además, la secuencia se prioridades sería:

$$C \sim F \succ G \succ H \sim D \sim B \succ E \sim A \text{ para } J_1 \text{ si } J_2 \text{ juega } P$$
$$V \sim W \succ T \succ S \succ R \sim Q \sim P \succ U \text{ para } J_2 \text{ si } J_1 \text{ juega } A$$

Por medio de ver los pagos mencionados no se garantiza que esta secuencia de prioridades esté correcta (esto debido a que no está implementado el supuesto de creencias); sin embargo, facilitan el poder solo enfocarse en unas cuantas estrategias a la vez. Se debe de aclarar que conforme se va avanzando en las rondas esta lista de prioridades puede ir cambiando de órden.

Por medio de este procedimiento, el conjunto de posibles equilibrios debería de ser:

$S^{EIEED} = \{(G, V), (G, W), (H, V), (H, W)\}$ con la matriz de pagos siendo:

$J_1 \backslash J_2$	V	W
G	5,5	5,6
H	1,6	6,5

Table 1: Conjunto de soluciones de matriz de pagos Examen I 2024 IIC

Notar que como en este ejemplo el conjunto de soluciones es mayor a un solo par ordenado, esto tiene sentido con lo encontrado con el procedimiento de EED.

3.9.3 Razonabilidad

De la matriz (3), usando el método de mejor respuesta se puede ver que:

Para J_1 las mejores respuestas dadas las estrategias de J_2 son:

$$\begin{array}{ll} MR_1(P) = \{C, F\} & MR_1(T) = G \\ MR_1(Q) = G & MR_1(U) = G \\ MR_1(R) = H & MR_1(V) = G \\ MR_1(S) = F & MR_1(W) = H \end{array}$$

Por ende, para J_1 jugar las estrategias A, B, E, D no es razonalizable.

Dicho esto, se pueden eliminar estas filas de la matriz y solo trabajar con las estrategias C, F, G, H. Entonces:

Para J_1 las mejores respuestas dadas las estrategias de J_1 son:

$$\begin{array}{l} MR_2(C) = W \\ MR_2(F) = \{V, W\} \\ MR_2(G) = W \\ MR_2(H) = V \end{array}$$

Sin embargo, como ahora se sabe que el J_2 solo jugaría las estrategias V, W, de las mejores respuestas del J_1 se eliminarían las estrategias C, F. Por ende, las mejores respuestas de J_1 y J_2 son:

$$\begin{array}{ll} MR_1(V) = G & MR_2(G) = W \\ MR_1(W) = H & MR_2(H) = V \end{array}$$

Entonces, la matriz (3) terminaría siendo la siguiente matriz:

$J_1 \backslash J_2$	V	W
G	5,5	5,6
H	1,6	6,5

Por lo tanto, el conjunto solución del método de Razonabilidad sería:

$$S^R = \{(G, V), (H, V), (G, W), (H, W)\}$$

Ojo: Un aspecto interesante es que **en juegos de dos jugadores**, el conjunto solución de Razonabilidad y EIEED es siempre el mismo.

3.9.4 Equilibrio de Nash

Para agilizar el procedimiento, se utilizará la matriz obtenida por el procedimiento de EIEED para encontrar los equilibrios de Nash. Pero, ¿por qué se puede usar esta matriz directamente? Debido a que cuando se elimina una estrategia por medio de EIEED se garantiza que el jugador nunca jugaría esa estrategia. Por lo tanto, no puede haber un equilibrio de Nash con una estrategia que no se va a jugar. Por esta estrecha relación, se puede concluir que toda estrategia que forma parte del Equilibrio de Nash debe de sobrevivir el proceso de EIEED y que no habrá nigún tipo de pérdida de información si se buscan Equilibrios de Nash por medio de la matriz final del procedimiento de EIEED. Tomando esto en cuenta, se puede notar que:

$$\begin{array}{ll} MR_1(V) = G & MR_2(G) = W \\ MR_1(W) = H & MR_2(H) = V \end{array}$$

$J_1 \backslash J_2$	V	W
G	$\underline{5}$,5	5,$\overline{6}$
H	1,$\overline{6}$	$\underline{6}$,5

Por lo tanto, en estrategias puras no existen Equilibrios de Nash para este juego y el conjunto solución sería:

$$S^N = \varnothing$$

3.9.5 Equilibrio de Nash en estrategias Mixtas

Bajo la misma lógica que se usó para disminuir la matriz con la que se trabajó en el Equilibrio de Nash en estrategias puras, si se le asocia a la estrategia G una probabilidad p y a la estrategia V una probabilidad q la matriz tiene la siguiente forma:

		q	$1-q$
	$J_1 \backslash J_2$	**V**	**W**
p	**G**	$(5,5)$	$(5,6)$
$1-p$	**H**	$(1,6)$	$(6,5)$

además, las funciones de pagos de cada jugador se verían así:

$$\begin{array}{ll} v_1(G, \sigma_2) = 5 & v_2(V, \sigma_1) = 6 - p \\ v_1(H, \sigma_2) = 6 - 5q & v_2(W, \sigma_1) = 5 + p \end{array}$$

Igualando las funciones de pagos de cada jugador, los puntos de indiferencia que se encuentran son:

Para J_1

$$q = \frac{1}{5}$$

Para J_2

$$p = \frac{1}{2}$$

Finalmente, "buscando los extremos" para ambos jugadores, se llega a que la función de mejor respuesta para cada jugador es la siguiente:

$$MR_1(q) \begin{cases} p = 0 & \text{si } q < \frac{1}{5} \\ p \in [0,1] & \text{si } q = \frac{1}{5} \\ p = 0 & \text{si } q > \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$MR_2(p) \begin{cases} q = 0 & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ q \in [0,1] & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ q = 0 & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

y la gráfica de mejores respuestas se ve así:

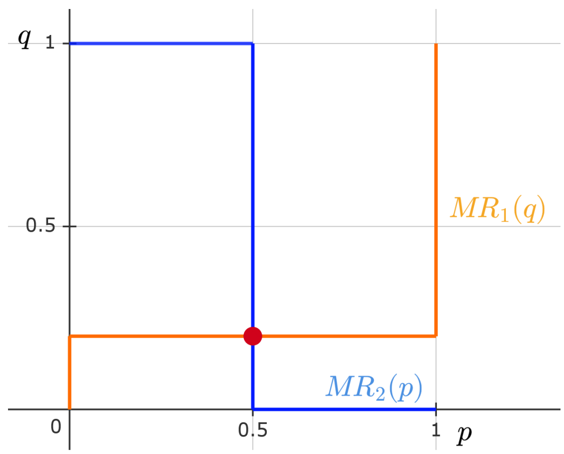


Figure 4: Gráfica de mejores respuestas entre jugadores

Aparte de notar que esta se ve como una esvástica con problemas, se encuentra que no hay Equilibrios de Nash puros (tal y como se vió en la sección pasada) y el Equilibrio de Nash en estrategias mixtas es:

$$S^N(\sigma_1, \sigma_2) = \left(\left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right) \right)$$

.

Juegos Dinámicos con Información Completa

Parte Miguel (pág 129-142)

4 Preliminares

Existe una diferencia fundamental entre los juegos estáticos y los juegos dinámicos.

- En los juegos estáticos se asume que los jugadores toman decisiones simultáneas.
- En los juegos dinámicos las decisiones se toman de forma secuencial:
  - Juega primero un jugador y luego otro.
  - Puede existir una ventaja al ser el primer jugador, o el segundo.

Considérese como ejemplo lo siguiente.
En el juego de la Batalla de los Sexos de movimientos simultáneos, ninguno de los jugadores sabe lo que el otro está eligiendo, por lo que cada jugador conjetura una creencia y juega la mejor respuesta a esta creencia. En cambio, si el juego se realiza de forma dinámica; cuando es el turno de hacer un movimiento por parte de Chris, el sabe lo que Alex ha hecho y, como resultado, la noción de conjeturar creencias es discutible.

Forma Extensiva (Juegos Secuenciales)

En primer lugar, para definir un juego de forma extensiva es necesario conocer:

- El conjunto de jugadores N
- Las acciones que puede tomar el jugador en cada movimiento
- La función de resultados de los jugadores $\{v_i(\cdot)\}_{i\in N}$
- El orden de los movimientos
- La **historia** del juego H, que conocen los jugadores al momento que le toca jugar
- La distribución de probabilidad de los eventos exógenos (Naturaleza), si existen
- Todo lo anterior es de conocimiento común.

La Batalla de los Sexos

En este caso:

- $N = \{A, C\}$ siendo $A =$ Alex y $C =$ Chris
- $A_i = \{O, F\} \ \forall \ i \in N,$ siendo $O =$ Opera y $F =$ Fútbol
- $v_A(O, O) = v_C(F, F) = 2 \quad ; \quad v_A(F, F) = v_C(F, F) = 1$
- $v_i(F, O) = v_i(O, F) = 0 \ \forall \ i \in N$

Alex juega primero:

- Puede elegir ir a la Ópera o al Fútbol.

- Chris sabe que Alex elige primero y lo espera en la Ópera. (Esto es diferente a que Chris sepa que Alex ya jugó).

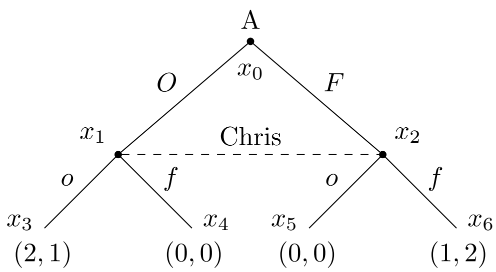
Ahora bien, la representación de los juegos secuenciales es más sencilla a través de árboles de decisión.

Árboles de decisión

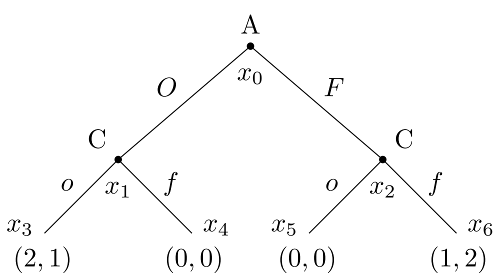
- Decisión simultánea
- Decisión secuencial

Formalmente, los árboles de decisión se estructuran de arriba hacia abajo, y los resultados del juego se presentan en filas, en el nodo terminal.

Simultaneo:



Secuencial:



Árboles de Juegos

Definición 7.1 En un conjunto de nodos $x \in X$ con una relación de precedencia $x > x'$ (x precede a x').

Cada nodo en el árbol del juego tiene un solo predecesor.

La relación de precedencia es:

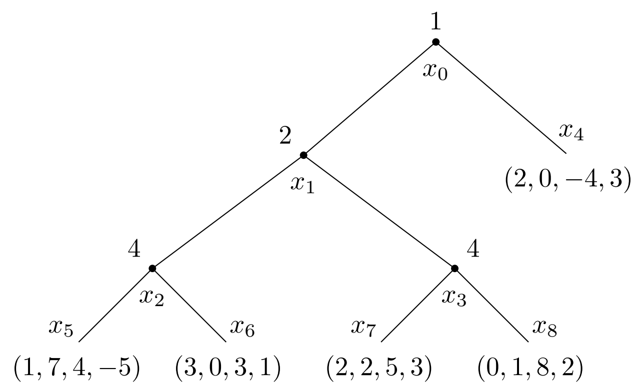
- **Transitiva:** $(x > x', x' > x'' \implies x > x'')$.
- **Asimétrica:** $(x > x' \implies$ no $x' > x)$-
- **Incompleta:** (no todos los pares de nodos x, y se pueden ordenar).

Construcción de Árboles de Juegos

Se construye considerando:

- Un nodo inicial, llamado la **raíz** del árbol, denotado por x_0, que precede a cualquier otro $x \in X$.
- Los nodos que no preceden a otros nodos se denominan **nodos terminales**.
- El conjunto $Z \subseteq X$ de nodos terminales denota los **resultados finales** del juego con el que se asocian los pagos.
- Cada nodo x que no es un nodo terminal se asigna a un jugador, $i(x)$, asociado con el conjunto de acciones $A_i(x)$, o a la Naturaleza.

Ejemplo:



El ejemplo anterior corresponde a un juego con $N = \{1, 2, 3, 4\}$.
No se conocen las acciones ni las estrategias de los jugadores.
El jugador 3 no juega.

Conjunto de nodos terminal $Z = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$

- $x_4 = (2, 0, -4, 3)$
- $x_5 = (1, 7, 4, -5)$
- $x_6 = (3, 0, 3, 1)$
- $x_7 = (2, 2, 5, 3)$
- $x_8 = (0, 1, 8, 2)$

Las acciones posibles para cada jugador en cada nodo se definen ahora de forma un poco diferente:

- **Del jugador 1 en el nodo** x_0:

$$A_1(x_0) = \{x_1, x_4\}$$

- **Del jugador 2**:

$$A_2(x_1) = \{x_2, x_3\}$$

- **Del jugador 3**:

No juega.

- **Del jugador 4**:

$$A_4(x_2) = \{x_5, x_6\}$$

$$A_4(x_3) = \{x_7, x_8\}$$

Árbol: Secuencial o Simultáneo

La estructura del juego anterior corresponde a un juego secuencial, donde la información de la decisión tomada por el jugador i es conocida por el jugador j.
Como se menciono antes, la diferencia entre los juegos **estáticos** y **dinámicos** es que en los primeros las decisiones se toman de forma simultánea y en los segundos secuencial.

¿Cómo diferenciar los árboles secuenciales de los simultáneos?

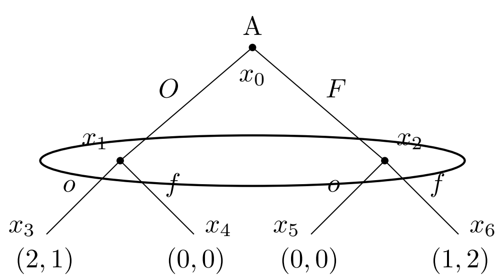
Conjunto de información

Definición 7.2 Cada conjunto de información i tiene un conjunto de información $h_i \in H_i$ que divide los nodos del juego en los cuales puede mover, según.

1. Si h_i en un conjunto único e incluye solo a x el jugador i sabe que esta en x.
2. Si $x \neq x'$ y si x, $x' \in h_i$ entonces el jugador i al que corresponde mover no sabe si está en en x o en x'.
3. Si $x \neq x'$ y x, $x' \in h_i$ entonces $A_i(x') = A_i(x)$.

Usando los árboles de decisión mostrados anteriormente:

Simultaneo:

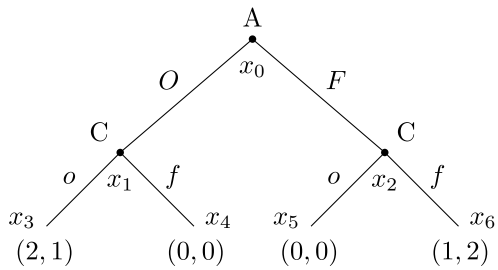


Donde los conjuntos de información son los siguientes:

Para Alex: $h_1^0 = \{x_0\}$

Para Chris: $h_1^0 = \{x_1, x_2\}$

Secuencial:



Donde los conjuntos de información son los siguientes:

Para Alex: $h_1^0 = \{x_0\}$

Para Chris: $h_1^1 = \{x_1\} \wedge h_1^2 = \{x_2\}$

Información completa: Perfecta e Imperfecta

Definición 7.3

Juego con información perfecta

Un juego donde cada conjunto de información es **único** y la **naturaleza no juega**.

Juego con información imperfecta

Un juego en el que algunos conjuntos de información contienen **varios nodos** o en el que la **naturaleza juega**.

Hay una idea que vale la pena enfatizar acá. Un juego será de información imperfecta cuando un jugador debe realizar un movimiento sin conocer el movimiento de otro jugador o sin conocer la realización de una elección de la Naturaleza. La incertidumbre sobre la elección de la Naturaleza, o **incertidumbre exógena**, está en el centro de los problemas de decisión de una sola persona. (Y el juego de cartas del ejemplo siguiente es efectivamente un problema de decisión de una sola persona porque el jugador 2 no tiene opciones que tomar).

La incertidumbre sobre la elección de otro jugador, o **incertidumbre endógena**, es el tema de los juegos de movimientos simultáneos como el juego de la Batalla de los Sexos de movimientos simultáneos donde ambos jugadores juega según el momento que les corresponda.

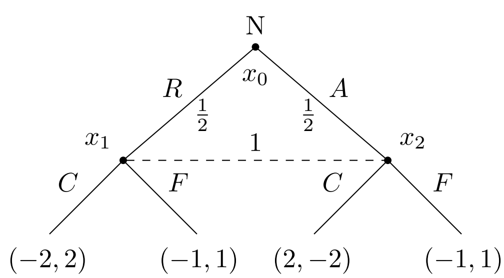
Observe, sin embargo, que ambas situaciones comparten una característica común: los sucesos que algún jugador no conoce están capturados por la incertidumbre sobre dónde se encuentra en el juego, ya sea por incertidumbre exógena o endógena. En cualquier caso, un jugador debe formarse creencias sobre las acciones no observadas, de la Naturaleza o de otros jugadores, para poder analizar su situación.

El Ejemplo

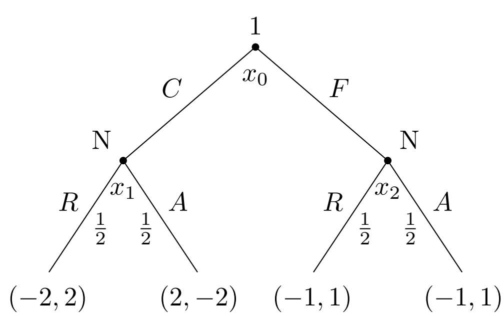
Considere el siguiente juego de cartas:

- De una baraja se separan los reyes y los ases.
- El jugador 1 elige una carta sin verla.
- La probabilidad de que sea un rey o un as es de $\frac{1}{2}$ (Naturaleza).
  Luego de elegir la carta, el jugador 1 puede finalizar (F) o continuar (C).
  - Si se retira, debe pagarle al jugador 2 la suma de \$1.
  - Si sigue y la carta es As, el jugador 2 le paga \$2.
  - Si la carta es Rey, le paga al jugador 2 \$2.

Definición del árbol del juego considerando que la naturaleza juega primero:



Si el jugador 1 juega primero:



Estrategias

Recuerde que las estrategias se definen como un plan de accion destinado a conseguir un objetivo especifico.
En los juegos dinámicos las **estrategias puras** se estructura de forme diferentes:

Una estrategia pura para el jugador i es un plan completo de juego que describe qué acciones puras puede tomar el jugador en cada uno de sus conjuntos.

Estrategias Puras

Definición de Estrategias Puras

Definición 7.4 Una estrategia pura para el jugador i es un mapeo de las estrategias $s_i : H_i \to A_i$ que asigna una acción $s_i(h_i) \in A_i(h_i)$ para cada conjunto de información $h_i \in H_i$.

Se denota con S_i el conjunto de todas las estrategias puras tal que $s_i \in S_i$.

La **cantidad** de estrategias puras del jugador i se define como:

$$|S_i| = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$$

Donde m_k corresponde a la **cantidad de acciones** (m) que puede tomar el jugador en cada **conjunto de información** (k) en un juego secuencial.

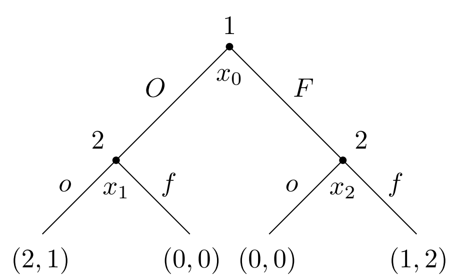
Ejemplo: ¿Derecha o Izquierda?

Considere un juego con dos jugadores, cada jugador puede ir a la izquierda o la derecha. El jugador 1: J_1 juega primero, el juego se juega de forma secuencial y solo juega una vez cada jugador.

- Si ambos jugadores van a la izquierda, J_1 obtiene 3 y J_2 obtiene 1.
- Si ambos jugadores van a la derecha, J_1 obtiene 0 y J_2 obtiene 0.
- Si J_1 va a la izquierda y J_2 va a la derecha, J_1 obtiene 1 y J_2 obtiene 2.
- Si J_1 va a la derecha y J_2 va a la izquierda, J_1 obtiene 2 y J_2 obtiene 1.

A partir de la descripción del juego:

- Establezca el juego en forma extensiva.
- Establezca los conjuntos de información para J_1 y J_2.
- Determine las acciones para J_1 y J_2.
- Determine las estrategias puras de J_1 y J_2.
- Establezca la matriz de pagos del juego.



Conjuntos de información (h_i):

h_1: El jugador 1 tiene un conjunto de información.

$h_1^0 = \{x_0'\}$

h_2: El jugador 2 tiene dos conjuntos de información.

$h_2^1 = \{x_1\}$
$h_2^2 = \{x_2\}$

Acciones $(A_i(h_i))$:
$A_1(h_1^1) = \{I, D\}$
$A_2(h_2^1) = \{i, d\}$
$A_2(h_2^2) = \{i, d\}$

Estrategias $(s_i(h_i) \in A_i(h_i))$:
$S_1 = \{I, D\}$
$S_2 \Rightarrow |S_2| = m_1 * m_2 = 2x2 = 4$
$S_2 = \{ii, di, id, dd\}_{h_2^1\ h_2^1} \rightarrow$ Acciones que puede seguir 2.

Pagos en forma matricial

$J_1 \backslash J_2$	**ii**	**di**	**id**	**dd**
I	$(3,1)$	$(1,2)$	$(3,1)$	$(1,2)$
D	$(2,1)$	$(2,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$

$\Rightarrow S^N = \{(I, dd), (D, di)\}$

$\Rightarrow \sigma_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Estrategias Mixtas y Estrategias de Comportamiento (Recomendado: Cap. 15, ejercicio 1.6 del Watson)

Estrategias Mixtas

Definición 7.5 Una estrategia mixta para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre las estrategias puras $s_i \in S_i$.

Para ilustrar este punto, considere de nuevo el juego de la Batalla de los Sexos de movimientos secuenciales. La definición anterior de una estrategia mixta implica que el jugador 2 (Chris) puede aleatorizar entre cualquiera de sus cuatro estrategias puras en el conjunto $S_2 = \{oo, of, fo, ff\}$. Sin embargo, no le permite elegir estrategias de la forma "Si el jugador 1 juega O, entonces jugaré f, mientras que si juega F, entonces mezclaré y jugaré f con probabilidad $\frac{1}{3}$".

Para permitir estrategias que permitan a los jugadores aleatorizar a medida que se desarrolla el juego, es necesario definir un otro concepto:

Estrategias de Comportamiento

Definición 7.6 Una estrategia de comportamiento es una distribución de probabilidad específica e independiente sobre $A_i(h_i)$ para cada conjunto de información $h_i \in H_i$ y se denota como $\sigma_i : H_i \rightarrow \Delta A_i(h_i)$ donde $\sigma_i(a_i(h_i))$ es la probabilidad de que el jugador i realice la acción $a_i(h_i) \in A_i(h_i)$ en el conjunto de información h_i.

Podría decirse que una estrategia conductual está más en sintonía con la naturaleza dinámica del juego en forma extensiva. Al usar dicha estrategia, un jugador mezcla sus acciones cada vez que se le llama a jugar. Esto difiere de una estrategia mixta, en la que un jugador mezcla antes de jugar, pero luego se mantiene fiel a la estrategia pura seleccionada.

Considerando las estrategias de comportamiento, un jugador puede utilizar estrategias mixtas entre sus acciones cada vez que le toca jugar.

¿En qué difiere de las estrategias mixtas?

Esto difiere de una estrategia mixta, dado que en las estrategias mixtas un jugador define la distribución de probabilidad antes de jugar y luego permanece fiel a la estrategia pura seleccionada.

Mientras que una estrategia de comportamiento permite al jugador generar una distribución de probabilidad en cada conjunto de información.

Corolario 1 *Luce y Raiffa (1957) proporcionan una buena analogía para los diferentes tipos de estrategias. Una estrategia pura puede considerarse como un manual de instrucciones en el que cada página le dice al jugador qué acción pura realizar en un conjunto de información particular, y el número de páginas es igual al número de conjuntos de información que tiene el jugador. Por lo tanto, el conjunto S de estrategias puras puede tratarse como una biblioteca de dichos manuales de estrategia pura.*

Por otro lado, las estrategias mixtas consiste en elegir uno de estos manuales al azar y luego seguirlo con precisión.

Por el contrario, una estrategia conductual es un manual que prescribe acciones posiblemente aleatorias en cada una de las páginas asociadas con el juego en conjuntos de información particulares.

Memoria Perfecta

Definición 7.7

- Un juego de **memoria perfecta** es aquel en el que los jugadores no olvidan la información previa del juego.
- Si un jugador juega n veces durante el juego, recuerda lo que ha pasado en los anteriores movimientos.
- **Recuerda la historia.**
- **Kuhn demostró** (1953) que en juegos de memoria perfecta, las estrategias mixtas y de comportamiento son equivalentes.
  Dadas las estrategias de los oponentes, la misma distribución sobre los resultados puede ser generada por estrategias mixtas o de comportamiento para el jugador i.

Con todo lo anterior, nótese la diferencia entre:

Simultáneo:

$$\Gamma : \langle N, \{A_i\}_{i=1}^n, \{S_i\}_{i=1}^n, \{v_i(\cdot)\}_{i=1}^n, \{\Delta S_i\}_{i=1}^n, \{\Pi_i(s_{-i})\}_{i=1}^n \rangle$$

Secuencial:

$$\Gamma : \langle N, \{h_i\}_{i=1}^n, \{A_i(h_i)\}_{i=1}^n, \{S_i \ \forall \ s_i(h_i) \in A_i(h_i)\}_{i=1}^n, \{v_i\}_{i=1}^n, \{\Delta S_i\}_{i=1}^n, \{\Delta A_i(h_i)\}_{i=1}^n \rangle$$

Estrategias que se generan a partir de las acciones que puede seguir cada conjunto de información.

Considere el siguiente ejemplo:

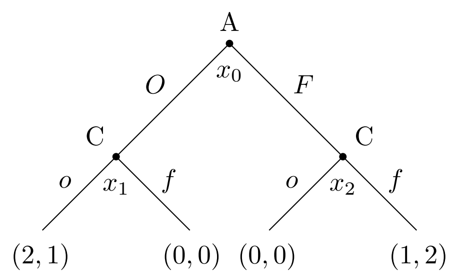
De nuevo la Batalla de los sexos

Recuerde los pagos (v_1, v_2): Ir separados reporta $(0,0)$, ir a la Ópera $(2,1)$, ir al Fútbol $(1,2)$.

Se juega de forma secuencial y Alex (J_A) juega primero.

Se determina:

El juego en forma extensiva



Conjuntos de información

$\lvert h_A \rvert = 1$	$h_A^1 = \{x_0\}$
	$h_0^1 = \{x_1\}$
$\lvert h_C \rvert = 2$	$h_1^2 = \{x_2\}$

Estrategias Puras, Mixtas, de Comportamiento

$A_C(h_C^1) = \{o, f\}$	$\lvert S_A \rvert = 2$	$S_A = \{O, F\}$
$A_C(h_C^2) = \{o, f\}$	$\lvert S_C \rvert = 2x2 = 4$	$S_C = \{oo, ff, of, fo\}_{\bar{O}\bar{F}}$

Matriz de pagos

$J_1 \backslash J_2$	**oo**	**of**	**fo**	**ff**
O	$(2,1)$	$(2,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$
F	$(0,0)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(1,2)$

$$S^N = \{(O, oo), (O, of), (F, ff)\}$$

$$\Delta S_c = \{(\sigma_c(oo), \sigma_c(ff), \sigma_c(of), \sigma_c(fo)) : \sigma_c(s_c) \geq 0 \quad \forall s_c \in S_c \quad ; \quad \sum_{s_c \in S_c} \sigma_c(s_c) = 1\}$$

$$\Delta A_c(h_c^1) = \{(\sigma_c(o), \sigma_c(f)) : \sigma_c(o) \geq 0,\ \sigma_c(f) \geq 0;\ \sigma_c(o) + \sigma_c(f) = 1\}$$

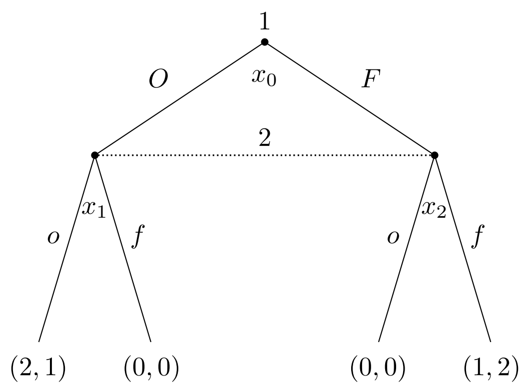
$$\sigma_c(a_c(h_c^1))$$

$$\Delta A_c(h_c^2) = \{(\sigma_c(o), \sigma_c(f)) : \sigma_c(o) \geq 0,\ \sigma_c(f) \geq 0;\ \sigma_c(o) + \sigma_c(f) = 1\}$$

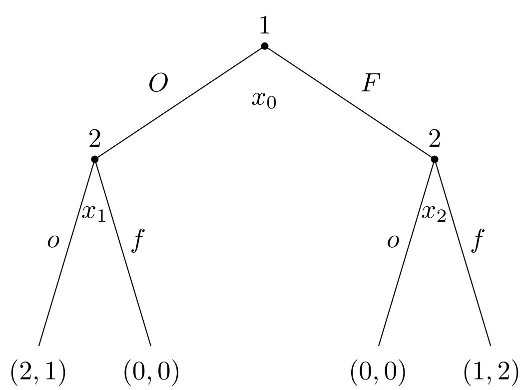
$$\sigma_c(a_c(h_c^2))$$

$\Delta S_A = \Delta A_c(h^A) \quad \rightarrow$ Solo se cumple si el juego es de **Memoria Perfecta**.

Parte Javier (pág 143-147), (pág 151-162)



Árbol con forma simultánea: Batalla de los sexos



Árbol con forma secuencial: Batalla de los sexos

Notar que para el primer árbol mostrado la matriz de pago en la forma normal tiene la siguiente forma:

1\2	**o**	**f**
O	$(2,1)$	$(0,0)$
F	$(0,0)$	$(1,2)$

Este es el mismo juego que se ha visto desde un inicio del curso. Sin embargo, al tener la forma extensiva de un juego secuencial, la matriz tiene la siguiente forma:

1\2	**oo**	**of**	**fo**	**ff**
O	$(2,1)$	$(2,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$
F	$(0,0)$	$(1,2)$	$(0,0)$	$(1,2)$

donde el primer componente de la estrategia del jugador 2 dice lo que haría si el jugador 1 juega su primera estrategia (O en este caso) y el segundo componente dice lo que haría si el jugador 2 juega su segunda estrategia (F en este caso). Por ejemplo, la estrategia del jugador 2 of en este caso dice que si el jugador 1 juega O, él juega o; y, si el jugador 1 juega F él juega f. Los conjuntos de estrategias se pueden representar de la forma:

$$S_1 = \{O, F\}, S_2 = \{oo, of, fo, ff\}.$$

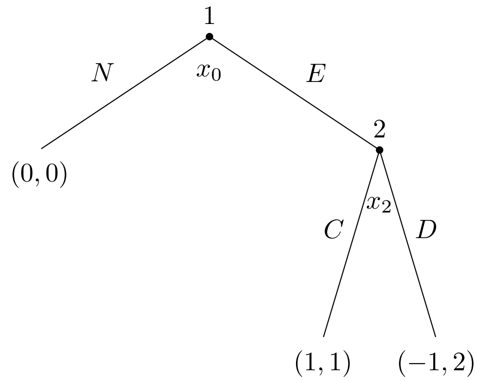
La Razón principal por la que se pasa un juego de una forma extensiva a una forma normal es para resolver los equilibrios de Nash del Juego. Particularmente, este método es muy útil cuando se hablan de juegos de dos jugadores con estrategias finitas. Después de todo, la forma normal busca encontrar la "escencia estratégica" del juego. Este no se concentra tanto en el órden del juego; sino, cómo interactúan los jugadores entre sí y sus pagos asociados. Por otro lado, la forma extensiva se concentra bastante en mantener el órden del juego; sin embargo, resolver equilibrios de Nash puede ser más complicado de esta forma. Lo anterior va muy de la mano con el hecho que:

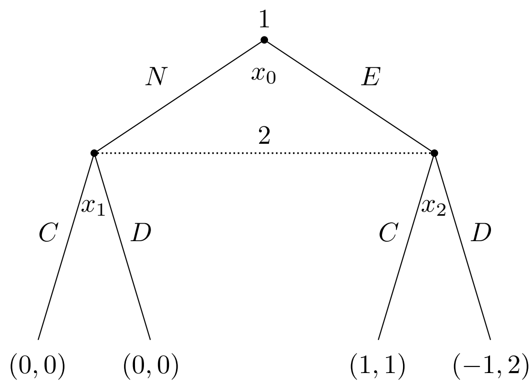
Observación: Toda forma extensiva tiene una única forma normal; pero, no toda forma normal tiene una única forma extensiva.

Lo anterior se puede notar fácilmente con el siguiente ejemplo. Tómese la siguiente matriz representativa de una forma normal:

1\2	**C**	**D**
N	$(0,0)$	$(0,0)$
E	$(1,1)$	$(-1,2)$

Note que esta forma normal se puede expresar de las siguientes formas extensivas:





Sin embargo, cada forma extensiva solo se puede representar de dicha forma normal.

4.1 Equilibrios de Nash y Rutas de Juego

Como fue mencionado, al pasar una forma extensiva a su forma normal se consigue la escencia estratégica del juego. Con esta forma, es sencillo encontrar los equilibrios de Nash como se hace siempre (por medio de la correspondencia de mejores respuestas). Tómese el ejemplo de la batalla de los sexos:

1\2	**oo**	**of**	**fo**	**ff**
O	$(\overline{\underline{2,1}})$	$(\overline{\underline{2,1}})$	$(0,0)$	$(0,0)$
F	$(0,0)$	$(\overline{1,2})$	$(\underline{0,0})$	$(\overline{\underline{1,2}})$

En este juego se presentan las dos correspondencias de mejores respuestas que saldrían en un juego simultáneo $\{(O, oo), (F, ff)\}$. Sin embargo, sale una tercera correspondencia la cual tiene el mismo pago que (O, oo) solo que es (O, of) y dice "el jugador 1 va a jugar la estrategia O. El jugador 2 va a jugar o si el jugador 1 juega O y va a jugar f sie el jugador 1 juega f. Notar que la diferencia entre estos dos equilibrios no está en lo que se juega en el equilibrio; sino, lo que está **fuera** del equilibrio. Pero qué significa que un conjunto de información esté fuera del equilibrio? Para ello, véase la siguiente definición.

Definición 7.8: Sea $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ un perfil de estrategias de comportamiento de un equilibrio de Nash en una forma extensiva. Se dice que la información está en la **ruta de equilibrio** sii se puede llegar a σ^* con una probabilidad positiva (distinta de cero). Análogamente, se dice que la información está fuera de la ruta de equilibrio si σ^* es cero.

Con esta definición se puede entender mejor el concepto de amenazas. Una amenaza es la estrategia que un jugador toma después de que otro jugador tomó la decisión. Las amenazas pueden ser creibles o no creibles. **Una amenaza creible** puede suceder solo si hay más de 1 equilibdrio de Nash y el juego es en etapas. Entonces, si un jugador escoge una mejor respuesta, el siguiente jugador plantea una amenaza creible en la elección del primer jugador si este puede cambiar su elección poniendo a ambos jugadores en otro equilibrio de Nash.

Por ejemplo, la estrategia (O, of) es una estrategia creible; ya que, si el jugador 1 se desvía de la ruta de equilibrio y escoje F el jugador 2 respondería a lo mejor posible.

5 Credibilidad y Racionalidad Secuencial

En la sección anterior se mostró que pueden haber juegos los cuales no todas las estrategias son creibles. Por ejemplo, la batalla de los sexos. En este juego la correspondencia de mejores respuestas es:

$$S^N = \{(O, oo), (O, of), (F, ff)\}$$

Sin embargo, nótese que $\{(O, oo), (F, ff)\}$ no son creibles. Ya que si el jugador 1 elige O y jugador 2 elige f no se estaría llegando a una mejor respuesta. Análogamente, si el jugador 1 escoge F y el jugador 2 elige o tampoco se llegaría a una mejor respuesta. Entonces, se despicha tere con la intuición de los Equilibrios de Nash cuando uno se da cuenta que no siempre las estrategias de equilibrio van a dejar a los jugadores en una mejor respuesta si uno de los jugadores se desvía de la ruta de equilibrio. Para delimitar más el concepto de un equilibrio, tómese la siguiente definición:

5.1 Secuencialidad racional

Definición 8.1: Dadas las estrategias $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ de los oponentes, se dice que una estrategia de comportamiento es **secuencialmente racional** sii i elige la mejor respuesta para las estrategias de comportamiento σ_{-i} en cada conjunto de información.

En otras palabras, un jugador usa estrategias que son óptimas en **todo conjunto de información**. Entonces, la solución de la batalla de los sexos se puede delimitar aún más. **se tiene que tener muy en cuenta que para aplicar el proceso de secuencialidad racional se debe de usar inducción hacia atrás.** Entonces, comenzando por el jugador 2 se puede ver que si J_1 juega O la estrategia que sigue la secuencialidad racional es o. Sin pérdida de generalidad (SPG), si J_1 juega F, J_2 juega f. Por lo tanto, como J_1 sabe que J_2 jugará estrategias secuencialmente racionales, J_1 elige jugar O debido a que le muestra mayor pago que F $((2, 1) > (1, 2))$. Sin embargo, todo esto es lo mismo que dice el Eq de Nash. Más allá de eso, este proceso dice que si J_1 se desvía de la ruta de equilibrio y escoge F, J_2 por la racionalidad secuencial eligiría f. Por ende, el único par de estrategias de comportamiento racionalmente secuenciales son (O, of).

Nota Importante: La racionalidad secuencial **no es** un método de solución de juegos. Es un proceso que se debe de entender para aplicarlo al método de solución de juegos de equilibrio perfecto en subjuegos (se verá más adelante).

Proposición 8.1: Cualquier juego de información perfecta tiene una solución por inducción hacia atrás que es secuencialmente racional. Además, si no hay dos o más nodos terminales que presenten el mismo pago la solución por inducción hacia atrás **es única**.

Fun fact, esto se conoce como **el teorema de Zermelo.**

Corolario: Cualquier juego finito con información perfecta tiene al menos un equilibrio de Nash secuencialmente racional en estrategias puras. Además, si no hay dos o más nodos terminales que presenten el mismo pago entonces el juego tiene un único equilibrio de Nash secuencialmente racional.

Evidentemente, se despicha tere si se tienen juegos con información imperfecta; ya que, la inducción hacia atrás se complica. Para poder lidiar con este tipo de juegos se debe de implementar un concepto nuevo:

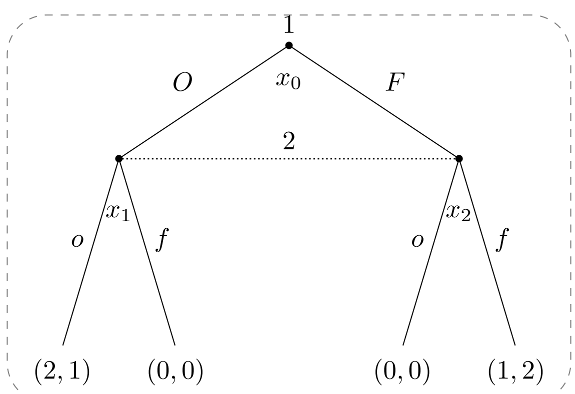
5.2 Subjuegos

Definición 8.2: Un **subjuego** adecuado G de una forma extensiva de un juego Γ consiste solamente de un nodo y todos sus sucesoras (todo lo que lo sigue) dentro de Γ con la propiedad que si $x \in G$ y $x' \in h(x)$ entonces, $x' \in G$ (esto dice que los nodos dentro de un mismo conjunto de información están dentro de G). El subjuego G es un árbol de juego en sí con los nodos, acciones y pagos heredados de Γ.

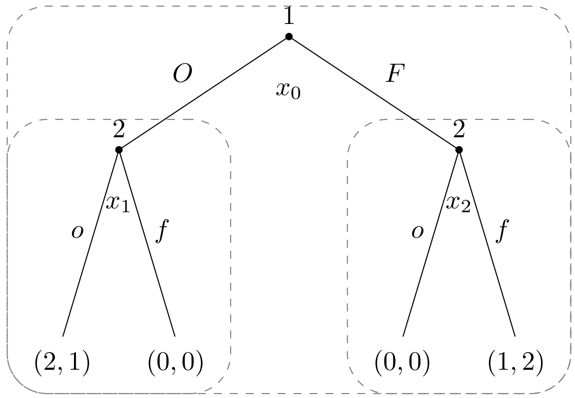
Nota: Para agilizar todo, se le va a decir al subjuego adecuado solo subjuego.

NOTA: Una manera muy fácil de encontrar subjuegos es enfocarse en los conjuntos de información que tienen un único nodo. De ahí va a comenzar un subjuego. Los conjuntos de información con varios nodos pueden pertenecer a un subjuego; pero, no empezarlo.

Para entender este concepto mejor, vea los subjuegos de la Batalla de los sexos en su forma secuencial y su forma simultánea (ojo, cada subjuego es un rectángulo punteado):



Árbol con forma simultánea: Batalla de los sexos



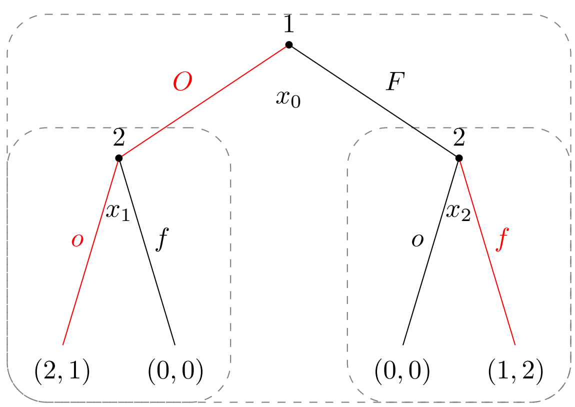
Árbol con forma secuencial: Batalla de los sexos

Con esta herramienta se puede restringir la atención solo a un subjuego y resolverlo. Una vez este resuelto, se puede usar la información encontrada en ese subjuego para resolver otros subjuegos por medio de inducción hacia atrás. Para formalizar lo dicho, tómese la siguiente definición:

5.3 Equilibrio Perfecto en subjuegos

Definición 8.3: Un **equilibrio perfecto en subjuegos** es aquel que para un juego Γ en forma extensiva, $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ es el perfil de estrategias de comportamiento que para cualquier subjuego G en Γ las estrategias de σ^* en G hacen un equilibrio de Nash.

Entonces, los equilibrios perfectos en subjuegos deben de también contemplar los equilibrios de Nash que no se consideran en la ruta de equilibrio. Por ejemplo, tómese de nuevo la batalla de los sexos:



Donde se puede llegar a notar que el equilibrio perfecto en subjuegos es:

$$S^{PS} = (O, of)$$

Este ejemplo se puede usar para resaltar el siguiente hecho:

Hecho: Para cualquier juego finito de información perfecta, el conjunto de mejores respuestas de los equilibrios perfectos en subjuegos coinciden con el conjunto de mejores respuestas que sobreviven ser secuencialmente racionales comporbado por medio de inducción hacia atrás.

Nota: Si un juego no tiene subjuegos, no existen equilibrios perfectos en subjuegos. Lo único que se pueden encontrar son equilibrios de Nash comúnes y corrientes.

Parte Sebastián (pág 163-169, pág 175-182.5)

5.4 Modelo de Stackelberg

Heinrich von Stackelberg en 1934 planteó que cuando los jugadores toman decisiones en forma secuencial, el orden del juego es importante y los jugadores lo saben.
Considere el juego del duopolio de Cournot que es un juego simultáneo:

- $\underbrace{max}_{q_i}(100 - q_i - q_j)q_i - 10q_i$
- $MR_i(q_j) = \frac{90-q_j}{2}$
- El equilibrio $q_i = q_j = 30$

Para el modelo de Stackelberg el jugador 1 escoge q_1 primero y luego el jugador 2 escoge q_2 con base en la decisión del jugador 1.
Para ello el jugador 2 maximiza su ganancia cuando q_1 ya es conocido; por ende, el jugador 2 seguirá su mejor respuesta y por la racionalidad secuencial, esto implica:

$$q_2(q_1) = \frac{90 - q_1}{2}$$

Note que, en este juego hay infinitos nodos terminales e infinitos conjuntos de información precedentes de los nodos terminales. En particular, cada elección distinta de q_1 es un conjunto de información diferente para el jugador 2.
Como el jugador 1 conoce exactamente como un jugador racional 2 responde a su elección de q_1, entonces el jugador 1 resuelve:

$$\underbrace{\max}_{q_1}\left[100 - q_1 - \left(\frac{90 - q_1}{2}\right)\right]$$

La condición de primer orden es:

$$100 - 2q_1 - 45 + q_1 - 10 = 0 \Longrightarrow q_1 = 45$$

Así, las ganancias del jugador 1 son: $\pi_1 = (100 - 67.5) \cdot 45 - 10 \cdot 45 = 1012.5$.
Las ganancias para el jugador 2 son: $(100 - 67.5) \cdot 22.5 - 10 \cdot 22.5 = 506.25$. En cambio, en el modelo de Cournot las cantidades de equilibrio son $q_1 = q_2 = 30$ y las ganancias son $\pi_1 = \pi_2 = 900$.
La forma correcta de presentar el equilibrio de Nash es: $S^N = \left(45, \frac{90-q_1}{2}\right)$
Importante, $(45, 22.5)$ no es un equilibrio de Nash, dado que no es una correspondencia de mejores respuestas.

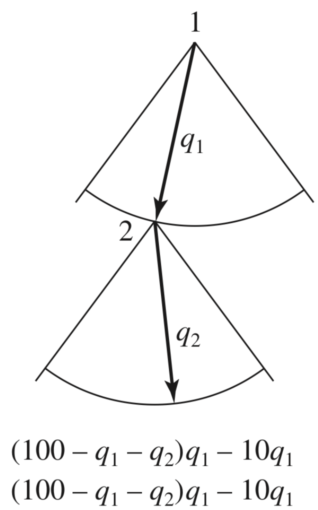


Figure 5: Modelo de Stackelberg (secuencial)

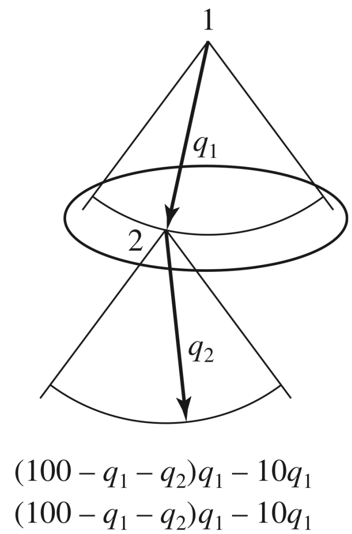


Figure 6: Modelo de Cournot (simultáneo)

Nota: En el modelo de Cournot como todo el juego es el único subjuego, entonces $q_1 = q_2 = 30$ es el único equilibrio perfecto en subjuegos.

5.5 Preferencias temporales inconsistentes

Descuento exponencial:

$$v(x_1, ..., x_T) = u(x_1) + \delta u(x_2) + ... + \delta^{T-1} u(x_T) = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} u(x_t)$$

Los jugadores que siguen esta factor de descuento siempre se mantienes fieles a su plan de acción original; es decir, presentan un comportamiento consistente a lo largo del tiempo. **Descuente hiperbólico:**

$$u(x_1) + \beta \sum_{t=2}^{T} \delta^{t-1} u(x_t)$$

En este caso, el factor β descuente todos los periodos futuros en relación al presente. Se utiliza para explicar fenómenos como la procrastinación, ahorros insuficientes, etc.

5.6 Resumen

- Los juegos en forma extensiva a menudo tienen algunos equilibrios de Nash que no son secuencialmente racionales, aunque, se espera que los jugadores elijan estrategias secuencialmente racionales.

- En juegos de información de perfecta la inducción hacia atrás resultará en equilibrios de Nash secuencialmente racionales. **Si no hay 2 pagos en nodos terminales que sean iguales entonces habrá un único equilibrio de Nash secuencialmente racional.**

- Un equilibrio perfecto en subjuegos es la forma más general de inducción hacia atrás en juegos de información imperfecta.
- Al menos un equilibrio de Nash en un juego será un equilibrio perfecto en subjuegos.

6 Juegos en etapas

Nota: Los juegos de varias etapas se presentan cuando los jugadores pueden condicionar el comportamiento futuro a los resultados pasados; lo que, conduce a un conjunto más rico de resultados autoejecutables.

6.1 Definición de un juego en etapas:

Un juego en etapas es una secuencia finita de juegos de forma normal, en los que cada etapa del juego es independiente, bien definida, de información completa pero imperfecta (un juego de movimientos simultáneos)
Cada juego se juega en un periodo distinto; tal que, el juego 1 se juega en el periodo $t = 1$, el juego 2 en el periodo $t = 2$, y así sucesivamente, hasta el periodo $t = T$, que sería la última etapa en el juego.
Además, se asume que después de que cada etapa es completada todos los jugadores observan los resultados de esa etapa.
Los juegos en etapas:

- Se juegan en forma secuencial por los mismos jugadores.
- Los resultados finales se evalúan considerando la secuencia completa del juego.
- La historia del juego en $t - 1$ es de conocimiento común.
- Cada juego tiene un conjunto de acciones que lleva a los resultados del juego.

6.2 Pagos

Para la determinación de los pagos es necesario considerar el valor del dinero en el tiempo.

- El factor de descuento $\delta \in (0, 1)$.
- δ cercano a 1 implica que el jugador valora las ganancias futuras.
- δ cercano a 0 implica que el jugador valora las ganancias actuales.

Los pagos totales se determinan como:

$$v_i = v_i^1 + \delta v_i^2 + \delta^2 v_i^3 + ... + \delta^{T-1} v_i^T = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} v_i^t$$

6.3 Estrategias

La formulación de estrategias dependen de la combinación de posibles acciones que puede tomar el jugador i en cada uno de los juegos, condicionado a lo que hizo el jugador j.
El número de conjuntos de información en cualquier etapa t debe ser igual al número de resultados posibles de los juegos de etapa jugados anteriormente $1, 2, ..., t - 1$.

De manera general, en un juego de T etapas, una estrategia pura del jugador i es una lista de estrategias puras condicionales:

$$S_i = \left\{s_i^1, s_i^2(h_1), \ldots, s_i^t(h_{t-1}), \ldots, s_i^T(h_{T-1})\right\}$$

Donde h_{T-1} es un resultado particular que ocurrió en el periodo t y $s_i^t(h_{t-1})$ es una acción para el jugador i de la etapa t. Se puede pensar a h_{t-1} como una historia particular de eventos que ocurrieron en el periodo t del conjunto de todas las posibles historias o resultados H_{t-1}.

Para solidificar esta idea, consideremos un juego con n empresas que eligen precios en una secuencia de mercados. En la etapa $t = 1$, eligen precios en el mercado 1, se determinan las ganancias en este mercado y esto es seguido por $T - 1$ juegos de mercado adicionales, cada uno con su propia estructura de demanda.
Si cada empresa selecciona su precio p_i^t en el período t (que corresponde a la etapa t), entonces una estrategia pura para la empresa i es una lista de precios:

$$\left\{p_i^1, p_i^2(h_1), \ldots, p_i^t(h_{t-1}), \ldots, p_i^T(h_{T-1})\right\}$$

donde $p_i^1 \geq 0$ y $p_i^t(h_{t-1}) \geq 0$ para todo $t \in \{2, \ldots, T\}$.
Cada historia h_t es la secuencia de precios previamente elegidos:

$$h_1 = (p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1)$$

$$h_2 = \left((p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1), (p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2)\right)$$

y en general:

$$h_{t-1} = \left((p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1), (p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2), \ldots, (p_1^{t-1}, p_2^{t-1}, \ldots, p_n^{t-1})\right)$$

Para el caso de una estrategia de comportamiento para el jugador i esta se representa de la siguiente forma:

$$\sigma_i = \left\{\sigma_i^1, \sigma_i^2(h_1), \ldots, \sigma_i^t(h_{t-1}), \ldots, \sigma_i^T(h_{T-1})\right\}$$

Cada conjunto de información de cada jugador está asociado con la historia del juego de las etapas anteriores.

6.4 Equilibrio perfecto en subjuegos

Proposición 9.1: Considere un juego con T etapas, donde σ^{t*} es un perfil de estrategias que corresponden a un equilibrio de Nash para el subjuego t. Se da un equilibrio perfecto en subjuegos en el juego en etapas si la ruta de equilibrio coincide con la ruta generada por el perfil de estrategias $\sigma^{1*}, \sigma^{2*}, ..., \sigma^{T*}$.

Proposición 9.2: Si σ^* es un equilibrio de Nash del juego en etapas que consiste en los juegos de etapa $G_1, G_2, \ldots, G_T$, entonces la restricción de σ^* al juego de etapa en el período T debe ser un equilibrio de Nash de ese juego de etapa.

La proposición establece que para cualquier juego de etapa finito de longitud T, en el último juego de etapa G_T, los jugadores deben jugar un equilibrio de Nash de ese juego de etapa. El razonamiento es simple: dado que no hay futuro que pueda depender de las acciones tomadas en la etapa T, lo único que determina lo mejor para cualquier jugador en esa etapa es jugar una mejor respuesta en función de lo que cree que los otros jugadores están haciendo en esa etapa. Este razonamiento implica otro hecho importante:

Proposición 9.3: Si un juego en etapas finito consiste en juegos de etapa que cada uno tiene un equilibrio de Nash único, entonces el juego en etapas tiene un equilibrio perfecto en subjuegos único.

Nota: Agregar una constante a los pagos de los jugadores en cada nodo terminal de un juego en forma extensiva no cambiará el orden de los resultados para los jugadores y, por lo tanto, no cambiará el conjunto de equilibrios.

7 Juegos de Negociación

Los juegos de negociación son uno de los temas más debatidos en la Teoria de Juegos. Para efecto de este curso se va a estar haciendo utilización del juego propuesto por **Rubinstein (1982)** a partir de los propuesto por Ståhl (1972, 1977): la repartición de un pie entre dos jugadores.

- Dos jugadores que tienen que repartirse un pie (de valor agregado 1).
- Uno propone una división $(x, 1-x)$ del pie, y el otro decide si acepta o no. En caso de no aceptar, proponen otra división y repiten.
- En cada propuesta, se descuenta (δ) del pie (tiempo es dinero).

Este es un juego de ofertas alternadas con un "enlace temporal".

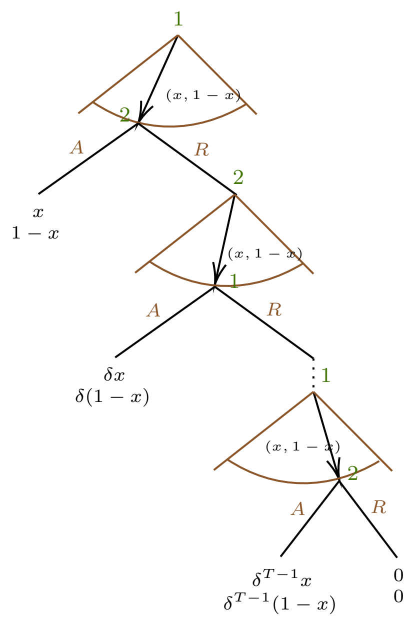
- El primer jugador propone $(x, 1-x)$, y el segundo jugador decide si acepta (A) o rechaza (R).
- Si rechaza, el segundo jugador propone $(x, 1-x)$, pero ahora los pagos se descuentan en δ:

$$(\delta x, \delta(1-x))$$

- Si se llega a un tercer período, los pagos se descuentan en δ^2:

$$(\delta^2 x, \delta^2(1-x))$$

Inicialmente, vamos a suponer que el juego acaba en el período T (en donde el pie se "daña" y nadie come nada), pero después se va a extender infinitamente hasta que se llegue al punto terminal del juego: que se llegue a un acuerdo.



Nota: *Para este tipo de juegos el libro parece asumir que los jugadores tienen una inclinación por aceptar la propuesta: la igualdad de pagos entre rechazar y aceptar resulta en la estrategia de aceptar.*

7.1 Una Ronda de Negociación: El Juego del Ultimátum

Asumamos que se tiene solamente una ronda de negociación ($T = 1$) en donde el primer jugador propone una división $(x^*, 1-x^*)$ del pie y el segundo jugador puede aceptar (reportando $(v_1, v_2) = (x^*, 1-x^*)$) o rechazar (reportando $(v_1, v_2) = (0, 0)$).

Proposición 11.1 *En el juego de negociación si $T = 1$ entonces cualquier división del pie $x^* \in [0,1], (v_1, v_2) = (x^*, 1-x^*)$, es un equilibrio de Nash.*

2 \ 1	$x^* \in [0,1]$
A	$(x^*, 1-x^*)$
R	$(0,0)$

Note que para cualquier x^* que proponga el primer jugador, el segundo jugador va a aceptar si $1 - x^* \geq 0$ (hay infinitos nodos de información por lo que la representación es solamente una guía).

En caso de hacerlo por inducción hacia atrás se puede llegar a notar que el segundo jugador siempre va a aceptar la propuesta del primero pues $x \geq 0$ siempre. El primer jugador va a saber esto y va a proponer exactamente $x^* = 1$ resultando en pagos de $(v_1, v_2) = (1, 0)$.

Proposición 11.2 *El juego de negociación con $T = 1$ admite un único equilibrio perfecto en subjuegos en donde el jugador 1 ofrece $x = 1$ y el jugador 2 acepta la oferta $x \leq 1$*

$$S^{PS} = \{(x^*, A) | x^* = 1\}$$

Nota: *La racionalidad secuencial implica que en la última ronda el jugador que hace la oferta tiene todo el poder de negociación, lo que resulta en que obtenga todo el excedente.*

7.2 Rondas Finitas de Negociación

Como ya se indicó en la ultima nota, la última ronda de cualquier juego de negociación va a darle todo el poder de negociación al jugador que ofrezca. En un juego de dos rondas, entonces, va a suceder lo siguiente por medio de inducción hacia atrás:

- El jugador 1 va a aceptar cualquier porpuesta del jugador 2.
- El jugador 2 sabe que 1 va a aceptar por lo que propone $x_2^* = 1$ (se queda con todo el pie). Esto reporta un pago decontado por ser la segunda ronda de $(v_1, v_2) = (0, \delta)$
- El jugador 2 sabe que si rechaza la primera oferta del primer jugador va a obtener $v_2 = \delta$ por lo que va a decidir acpetar solamente si $1 - x_1^* \geq \delta$. Esto quiere decir que 1 va a tener que proponer $1 - \delta \geq x_1^*$ para que 2 acepte.
- El jugador 1 sabe que si el jugador 2 no acepta su propuesta va a terminar teniendo un pago de $v_1 = 0$ por lo que propone exactamente $x_1^* = 1 - \delta$.

Finalmente este juego va a reusltar en un equilibrio perfecto en subjuegos en el que el jugador 2 acepta la propuesta de 1 en la primera ronda, resultando en los pogos $(v_1, v_2) = (1 - \delta, \delta)$.

Si se extiende este análisis a T periodos se puede observar que la lógica se mantiene pero ahora ajustando a los δ de descuento de cada periodo posterior. Asuma un $T < \infty$ que es impar, por lo que el jugador 1 ofrece primero y último.

- El jugador 2 va a aceptar cualquier porpuesta del jugador 1.
- El jugador 1 sabe que 2 va a aceptar por lo que propone $x_T^* = 1$. Esto reporta un pago decontado $(v_1, v_2) = (\delta^{T-1}, 0)$
- El jugador 2 sabe que el jugador 1 va a obtener un pago $v_1 = \delta^{T-1}$ si no llega a aceptar su oferta, además se sabe que si se ofrece x_{T-2}^* el pago va a ser $v_1 = \delta^{T-2} x_{T-1}^*$, es decir $\delta^{T-1} \leq \delta^{T-2} x_{T-1}^* \longrightarrow \delta = x_{T-1}^*$. Por lo que ofrece $x_{T-1}^* = \delta$, lo que resulta en $(v_1, v_2) = (\delta^{T-1}, \delta(1 - \delta^{T-2}))$

Si se repite este análisis se va a llegar a la siguiente propuesta en la priemra ronda:

$$
\begin{aligned}
x_1^* &= 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \delta^4 - \ldots + \delta^{T-1} \\
&= (1 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots + \delta^{T-1}) - (\delta + \delta^3 + \delta^5 + \ldots + \delta^{T-2}) \\
&= \frac{1 - \delta^{T+1}}{1 - \delta^2} - \frac{\delta - \delta^T}{1 - \delta^2} \\
&= \frac{1 + \delta^T}{1 + \delta}
\end{aligned}
$$

Lo que resulta en los pagos:

$$
(v_1, v_2) = (x_1^*, 1 - x_1^*) = (\frac{1 + \delta^T}{1 + \delta}, \frac{\delta - \delta^T}{1 + \delta})
$$

Proposición 11.3 *Cualquier equilibrio perfecto en subjuegos tiene que tener un acuerdo en la priemra ronda.*

$$\lim_{\delta \to 1} \lim_{T \to \infty} v_1 = \lim_{\delta \to 1} \frac{1}{1+\delta} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \to 1} \lim_{T \to \infty} v_2 = \lim_{\delta \to 1} \frac{\delta}{1+\delta} = \frac{1}{2}$$

Este resultado es el mismo al que se llega en caso de hacer el análisis del juego con $T \to \infty$ desde el inicio (ver páginas 228-229 del Tadelis para tener más detalle al respecto). El resto del capitulo contiene ejemplos del mismo juego pero complejizados por medio de distintas reglas (ver páginas 229-235 del Tadelis para los ejemplos).