Universidad de Costa Rica

Microeconomía II

Jose Miguel Mora Casasola

I semestre, 2024

Última compilación: 29 de febrero de 2024

Cualquier consulta o corrección del material escriba a:
JOSE.MORACASASOLA@ucr.ac.cr

Índice

1. Función de utilidad, demandas y función de mínimo gasto

1.1. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} ln(x_i) \qquad \forall i = 2, \ldots, n$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.

2. Halle la función de utilidad indirecta.

3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.

4. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución:

Comprobar si hay solución de esquina:

Si $\lim\limits_{x_i \to 0} UM_i = \infty$ entonces no hay solución de esquina para x_i

Note que:

$$\lim_{x_1 \to 0} UM_1 = \lim_{x_1 \to 0} 1 = 1 \neq \infty \text{ (puede pasar que } x_1 = 0)$$

$$\lim_{x_i \to 0} UM_i = \lim_{x_i \to 0} \frac{1}{x_i} = \infty \quad \forall i = 2, \dots, n$$ (no hay solución de esquina para x_i $\forall i$ con $i = 2, \dots n$)

Maximizando la utilidad:

Problema del consumidor:

$$\max_{x_j, \forall j} \left\{ x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i \right\} \quad \text{s.a} \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i$$

El lagrangeano asociado es:

$$\mathcal{L}: x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i + \lambda \left(m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i \right)$$

Condiciones de primer orden

$$\text{CPO} \begin{cases} \mathcal{L}_1: 1 - \lambda p_1 = 0 \\ \mathcal{L}_2: \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_j: \frac{1}{x_j} - \lambda p_j = 0 \\ \mathcal{L}_k: \frac{1}{x_k} - \lambda p_k = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_n: \frac{1}{x_n} - \lambda p_n = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda: m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i = 0 \end{cases}$$

Solución interna ($x_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$)

Combinando $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_j$ se obtiene que

$$\frac{1}{\frac{1}{x_j}} = \frac{p_1}{p_j} \Rightarrow x_j^m = \frac{p_1}{p_j}$$ (para este caso la cond. opt. coincide con la demanda)

Inyectando esto en $\mathcal{L}_\lambda$ se tiene

$$m - p_1 x_1 - \sum_{j=2}^{n} \cancel{p_j}\left(\frac{p_1}{\cancel{p_j}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow m - p_1 x_1 - \sum_{j=2}^{n} p_1 = 0$$

$$\Rightarrow m - p_1 x_1 - (n-1)p_1 = 0$$

$$x_1 = \frac{m - (n-1)p_1}{p_1}$$ (marshalliana de x_1)

¿Cuándo $x_1 > 0$? $\quad \frac{m-(n-1)p_1}{p_1} > 0 \Rightarrow \frac{m}{p_1} > n-1$

Dado que:

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i$$

$$\Rightarrow v(m, p_1, \overset{\vec{p}}{\dots}, p_n) = \frac{m-(n-1)p_1}{p_1} + \sum_{i=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_i}\right)$$ (utilidad indirecta)

Minimizando el gasto:

Problema del consumidor:

$$\min_{x_j, \forall j} \left\{ p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i \right\} \quad \text{s.a} \quad \bar{u} = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i$$

El lagrangeano asociado es:

$$\mathcal{L}: p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i + \lambda\left(\bar{u} - x_1 - \sum_{i=2}^{n} \ln x_i\right)$$

$$\text{CPO}\begin{cases} \mathcal{L}_1: p_1 - \lambda = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_j: p_j - \frac{\lambda}{x_j} = 0 \\ \mathcal{L}_K: p_K - \frac{\lambda}{x_K} = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_\lambda: \bar{u} - x_1 - \sum_{i=2}^{n} \ln x_i = 0 \end{cases}$$

Combinando $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_j$ se obtiene que:

$$\frac{p_1}{p_j} = x_j$$

Inyectando esto en $\mathcal{L}_\lambda$ se tiene

$$x_1 = u - \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right)$$

Dado que $G = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i$

$$G(\bar{u}, p_1, \cdots p_n) = p_1 u - p_1 \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right) + (n-1)p_1 \quad \text{(función de mínimo gasto)}$$

Solución de esquina $(x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_j > 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n)$

Si $\frac{m}{p_1} < n-1 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \wedge \quad m = \sum_{j=2}^{n} p_j x_j \quad \wedge \quad u = \sum_{i=2}^{n} \ln x_i$

Combinando $\mathcal{L}_j \wedge \mathcal{L}_K$ se tiene: $\frac{x_j}{x_K} = \frac{p_K}{p_j}$ (cond. opt.)

Inyectando esto en $m = \sum_{j=2}^{n} p_j x_j$

Se llega a $m = \sum_{j=2}^{n} p_K x_K \Rightarrow m = (n-1) p_K x_K \Rightarrow x_K = \frac{m}{(n-1)p_K}$ (marshalliana)

Inyectando la cond. opt. en la función de utilidad se tiene

$$u = \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_K x_K}{p_j}\right)$$

$$u=(n-1)\ln p_K+(n-1)\ln x_K-\sum_{j=2}^{n}\ln p_j \Rightarrow x_K=e^{\frac{u-(n-1)\ln p_K+\sum_{j=2}^{n}\ln p_j}{n-1}}$$

$$v(m,p_2,\dots,p_n)=\sum_{K=2}^{n}\ln\left(\frac{m}{(n-1)p_K}\right)=(n-1)\left[\ln(m)-\ln(n-1)\right]-\sum_{K=2}^{n}\ln p_K$$

$$G(\bar{u},p_2,\dots,p_n)=\sum_{K=2}^{n}p_K e^{\frac{u-(n-1)\ln p_K+\sum_{j=2}^{n}\ln p_j}{n-1}}$$

1.2. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución:

$$TMS=\frac{UM_j}{UM_K}=\frac{\alpha_j x_j^{-1}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}}{\alpha_K x_K^{-1}\prod_{K=1}^{n}x_K^{\alpha}}=\frac{p_j}{p_K}\Rightarrow \frac{x_K}{x_j}=\frac{\alpha_K p_j}{\alpha_j p_K} \quad \text{(cond. opt)}$$

Al inyectar la cond. opt en la restricción presupuestaria se obtiene la demanda marshalliana

$$m=\sum_{K=1}^{n}\frac{\alpha_K p_j x_j}{\alpha_j}\Rightarrow x_j=\frac{\alpha_j m}{p_j\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}$$

Al inyectar la cond. opt en la función de utilidad se obtiene la demanda hicksiana

$$U=\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{\alpha_K p_j}{\alpha_j p_K}x_j\right)^{\alpha_K}\Rightarrow U=\left(\frac{p_j x_j}{\alpha_j}\right)^{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{\alpha_K}{p_K}\right)^{\alpha_K}\Rightarrow x_j=\frac{\alpha_j U^{\frac{1}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{p_K}{\alpha_K}\right)^{\frac{\alpha_K}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}}{p_j}$$

$$V(m,p_1,\dots,p_n)=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_j m}{p_j\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}\right)^{\alpha_j}=\left(\frac{m}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\cdot\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\alpha_j}{p_j}\right]^{\alpha_j}$$

$$G(\bar{u},p_1,\dots,p_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j U^{\frac{1}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{p_K}{\alpha_K}\right)^{\frac{\alpha_K}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}=U^{\frac{1}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{p_K}{\alpha_K}\right)^{\frac{\alpha_K}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right]$$

1.3. Ejercicio

La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) \qquad \text{con} \qquad \forall x_j > 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución:

Si se maximiza la utilidad

El inciso dice $x_i > 0 \ \forall i$ por lo que sólo interesa solución interna.

$$\max_{x_i \ \forall i} \left\{ x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) \right\} \quad \text{s.a} \quad m = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i$$

$$\mathcal{L}: x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) + \lambda\left(m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i\right)$$

$$\text{CPO} \begin{cases} \mathcal{L}_1: 1 - \lambda p_1 = 0 \\ \quad \vdots \\ \mathcal{L}_j: \frac{1}{x_j - 1} - \lambda p_j = 0 \\ \mathcal{L}_K: \frac{1}{x_K - 1} - \lambda p_K = 0 \\ \quad \vdots \\ \mathcal{L}_\lambda: m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{p_1} =$$

$$\lambda p_j = \frac{1}{x_j - 1}$$

$$\lambda = \frac{1}{(x_j - 1) p_j}$$

Combinando $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_j$ se obtiene que:

$$\frac{1}{\frac{1}{x_j - 1}} = \frac{p_1}{p_j} \Rightarrow x_j = \frac{p_1}{p_j} + 1$$

Inyectando esto en $\mathcal{L}_\lambda$ se obtiene la demanda marshalliana

$$m - p_1 x_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j\left(\frac{p_1}{p_j} + 1\right) = 0$$

$$m - p_1 x_1 - (n-1) p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j = 0$$

$$x_1 = \frac{m - (n-1) p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j}{p_1}$$

Inyectando $x_j = \frac{p_1}{p_j} + 1$ en la función de utilidad se obtiene la demanda hicksiana

$$u = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right) \Rightarrow x_1 = u - (n-1) \ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j$$

$$V(m,p_1,\ldots,p_n)=\frac{m-(n-1)p_1-\sum_{j=2}^{n}p_j}{p_1}+\sum_{j=2}^{n}\ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right)=\frac{m-(n-1)p_1-\sum_{j=2}^{n}p_j}{p_1}+(n-1)\ln p_1-\sum_{j=2}^{n}\ln p_j$$

$$G(\bar{u},p_1,\ldots,p_n)=p_1\left[u-(n-1)\ln p_1+\sum_{j=2}^{n}\ln p_j\right]+\sum_{j=2}^{n}p_j\left(\frac{p_1}{p_j}+1\right)$$

$$\Rightarrow G(\bar{u},p_1,\ldots,p_n)=p_1\left[u-(n-1)\ln p_1+\sum_{j=2}^{n}\ln p_j\right]+(n-1)p_1+\sum_{j=2}^{n}p_j$$

1.4. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.
4. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución:

1)

$$\max_{X_i \ \forall i} \left\{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right\} \quad s.a \quad m \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \wedge \quad x_i \geqslant 0 \quad \forall i=1,\dots,n$$

$$UM_i = \frac{1}{x_i} \Rightarrow \lim_{x_i \to 0} UM_i = \infty \Rightarrow x_i > 0 \Rightarrow UM_i > 0 \Rightarrow m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Entonces

$$\max_{X_i \ \forall i} \left\{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i\right\} \quad s.a \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \lambda\left(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

$$CPO \begin{cases} \mathcal{L}_{x_j} = \frac{1}{x_j} - \lambda p_j = 0 \\ \mathcal{L}_{x_K} = \frac{1}{x_K} - \lambda p_K = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda} = m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_K}} = \frac{p_j}{p_K} \Rightarrow x_K = \frac{p_j}{p_K} x_j$$

$$m = \sum_{K=1}^{n} p_K x_K$$

$$\Rightarrow m = \sum_{K=1}^{n} \cancel{p_K} \cdot \frac{p_j}{\cancel{p_K}} x_j$$

$$\Rightarrow m = n p_j x_j$$

$$x_j = \frac{m}{n p_j} = x_j(m, p_1, \dots, p_n)$$

2)

$$v(m,p_1,\cdots,p_n)=\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{m}{np_j}\right)$$

$$v(m,p_1,\cdots,p_n)=n\ln m-n\ln n-\sum_{j=1}^{n}\ln p_j$$

3)

$$\min_{x_i\ \forall i}\ \sum_{i=1}^{n}p_ix_i \quad \text{s.a} \quad u=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\mathcal{L}:\ \sum_{i=1}^{n}p_ix_i+\lambda\left(u-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)$$

$$\text{CPO}\begin{cases}\mathcal{L}_{x_j}:\ p_j+\lambda\frac{1}{x_j}=0\\ \mathcal{L}_{x_K}:\ p_K+\lambda\frac{1}{x_K}=0\\ \mathcal{L}_{\lambda}:\ u-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\end{cases}$$

$$\frac{p_j}{p_K}=\frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_K}}\Rightarrow\frac{x_K}{x_j}=\frac{p_j}{p_K}\Rightarrow x_K=\frac{p_j}{p_K}x_j$$

$$u=\sum_{K=1}^{n}\ln x_K\Rightarrow u=\sum_{K=1}^{n}\ln\left(\frac{p_j}{p_K}x_j\right)$$

$$u=\sum_{K=1}^{n}\left[\ln p_j+\ln x_j-\ln p_K\right]$$

$$u=n\ln p_j+n\ln x_j-\sum_{K=1}^{n}\ln p_K$$

$$\ln x_j=\frac{u-n\ln p_j+\sum_{K=1}^{n}\ln p_K}{n}$$

$$\cancel{e}^{\cancel{\ln} x_j} = e^{\frac{u - n\ln p_j + \sum_{k=1}^{n} \ln p_k}{n}}$$

$$x_j = e^{\frac{u - n\ln p_j + \sum_{k=1}^{n} \ln p_k}{n}} = x_j(\bar{u}, p_1, \dots, p_n)$$

4)

$$G^*(\bar{u}, p_1, \dots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j$$

$$G^*(\bar{u}, p_1, \dots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} P_j \cdot e^{\frac{u - n\ln p_j + \sum_{k=1}^{n} \ln p_k}{n}}$$

1.5. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.

2. Halle la función de utilidad indirecta.

3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.

4. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución:

$$TMS_{jK} = \frac{UM_j}{UM_K} = \frac{P_j}{P_K}$$

$$U = x_1^{\alpha_1} \prod_{i \neq 1}^{n} x^{\alpha_i}$$

$$U_1 = \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \prod_{i \neq 1}^{n} x^{\alpha_i} = \alpha_1 x_1^{-1} \cdot x_1^{\alpha_1} \prod_{i \neq 1}^{n} x^{\alpha_i} = \alpha_1 x_1^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

$$UM_j = \alpha_j x_j^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

$$UM_K = \alpha_K x_K^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

$$TMS_{jK} = \frac{\alpha_j x_j^{-1} \cancel{\prod_{i=1}^{n} x^{\alpha_i}}}{\alpha_K x_K^{-1} \cancel{\prod_{i=1}^{n} x^{\alpha_i}}} = \frac{P_j}{P_K}$$

$$x_K = \frac{\alpha_K P_j}{\alpha_j P_K} x_j \rightarrow \text{condición optimalidad}$$

Marshallionas

$$m = \sum_{K=1}^{n} P_K x_K \Rightarrow m = \sum_{K=1}^{n} \cancel{P_K} \frac{\alpha_K P_j}{\alpha_j \cancel{P_K}} x_j$$

$$m = \sum_{K=1}^{n} \frac{\alpha_K P_j}{\alpha_j} x_j \Rightarrow m = \frac{P_j x_j}{\alpha_j} \cancelto{1}{\sum_{K=1}^{n} \alpha_K}$$

$$x_j^{m} = \frac{\alpha_j m}{P_j}$$

Hicksianas

$$x_K = \frac{\alpha_K P_j}{\alpha_j P_K} x_j \rightarrow \text{condición optimalidad}$$

$$U = \prod_{K=1}^{n} x_K^{a_K}$$

$$U=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j P_k}x_j\right]^{\alpha_k}$$

$$U=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{P_j x_j}{\alpha_j}\right]^{\alpha_k}\left[\frac{\alpha_k}{P_k}\right]^{\alpha_k}$$

$$U=\left[\frac{P_j x_j}{\alpha_j}\right]^{\cancel{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\,1}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\alpha_k}{P_k}\right]^{\alpha_k}$$

$$x_j=\frac{\alpha_j\cdot\bar{u}}{P_j}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k}$$

Utilidad indirecta

$$U=\prod_{j=1}^{n}x_j^{a_j}$$

$$v(m,P_1,\dots,P_n)=\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\alpha_j m}{P_j}\right]^{\alpha_j}=m^{\cancel{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\,1}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\alpha_j}{P_j}\right]^{\alpha_j}=m\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\alpha_j}{P_j}\right]^{\alpha_j}$$

Función mínimo gasto

$$G(\bar{u},P_1,\dots,P_n)=\sum_{j=1}^{n}\cancel{P_j}\cdot\frac{\alpha_j\cdot\bar{u}}{\cancel{P_j}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k}$$

$$G(\bar{u},P_1,\dots,P_n)=\bar{u}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k}\cancel{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j}\,1$$

$$G(\bar{u},P_1,\dots,P_n)=\bar{u}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k}$$

1.6. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 \prod_{i=2}^{n} x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.

2. Halle la función de utilidad indirecta.

3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.

4. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución:

$$U = x_1^2 \prod_{i=2}^{n} x_i$$

$$\mathcal{L}: x_1^2 \prod_{i=2}^{n} x_i + \lambda\left[m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i\right]$$

$$\text{CPO}\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1}: 2x_1 \prod_{i=2}^{n} x_i - \lambda p_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{x_j}: x_1^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i - \lambda p_j = 0 \\ \mathcal{L}_{x_k}: x_1^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq k}}^{n} x_i - \lambda p_k = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda}: m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2\cancel{x_1} \prod_{i=2}^{n} x_i}{x_1^{\cancel{2}} \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i} = \frac{p_1}{p_j}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x_j}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_j} \implies x_j = \dfrac{p_1}{2p_j} x_1 \\[2em] \dfrac{\cancel{x_1^2} \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i}{\cancel{x_1^2} \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq k}}^{n} x_i} = \dfrac{p_j}{p_k} \implies x_k = \dfrac{p_j}{p_k} x_j \end{array}\right\} \text{cond. opt.}$$

$$m = p_1 x_1 + \sum_{k=2}^{n} p_k x_k$$

$$m = p_1 x_1 + (n-1) p_j x_j$$

$$m = p_1 x_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} p_1 x_1$$

$$p_1 x_1 \left(1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) = m$$

$$\frac{p_1 x_1}{2} (1+n) = m$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{2m}{p_1(1+n)} \\ x_j &= \frac{m}{p_j(1+n)} \end{aligned}\right\} \text{marshalliana}$$

$$V(m, p_1, \dots, p_n) = \left[\frac{2m}{p_1(1+n)}\right]^2 \prod_{j=2}^{n} \frac{m}{p_j(1+n)} = \left[\frac{2m}{p_1(1+n)}\right]^2 \left(\frac{m}{1+n}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^{n} p_j^{-1} = \frac{4m^{n+1}}{p_1^2 (n+1)^{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{-1}$$

$$u = x_1^2 \prod_{j=2}^{n} \frac{p_1}{2p_j} x_1$$

$$u = x_1^2 x_1^{n-1} \left(\frac{p_1}{2}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^{n} p_j^{-1}$$

$$u \left(\frac{2}{p_1}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^{n} p_j = x_1^{n+1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}} \\ x_j &= \frac{p_1}{2p_j} u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned}\right\} \text{Hicksianas}$$

$$G(u, p_1, \ldots, p_n) = p_1 u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{j=2}^{n} \frac{p_1}{2} u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}}$$

1.7. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=2}^{n} (x_1 - 1) x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.
4. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución:

$$u=\prod_{i=2}^{n}(x_1-1)x_i \implies u=(x_1-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}x_i$$

$$\mathcal{L}: (x_1-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}x_i+\lambda\left[m-p_1x_1-\sum_{i=2}^{n}p_ix_i\right]$$

$$\text{CPO}\begin{cases}\mathcal{L}_{x_1}=(n-1)(x_1-1)^{n-2}\prod_{i=2}^{n}x_i-\lambda p_1=0\\[2ex] \mathcal{L}_{x_j}: (x_1-1)^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\i\neq j}}^{n}x_i-\lambda p_j=0\\[2ex] \mathcal{L}_{x_k}: (x_1-1)^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\i\neq k}}^{n}x_i-\lambda p_k=0\\[2ex] \mathcal{L}_{\lambda}: m-p_1x_1-\sum_{i=2}^{n}p_ix_i=0\end{cases}$$

$$\frac{(n-1)\cancel{(x_1-1)}^{n-2}\prod_{i=2}^{n}x_i}{\cancel{(x_1-1)}^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\i\neq j}}^{n}x_i}=\frac{p_1}{p_j} \implies \frac{(n-1)\,x_j\,\cancel{\prod_{\substack{i=2\\i\neq j}}^{n}x_i}}{(x_1-1)\cancel{\prod_{\substack{i=2\\i\neq j}}^{n}x_i}}=\frac{p_1}{p_j}$$

$$x_j=\frac{p_1}{p_j(n-1)}(x_1-1) \quad (\text{cond. opt. entre } x_1 \wedge x_j)$$

$$\frac{\cancel{(x_1-1)}^{n-1} \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i}{\cancel{(x_1-1)}^{n-1} \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq k}}^{n} x_i} = \frac{p_j}{p_k} \Rightarrow \frac{x_k}{x_j} = \frac{p_j}{p_k} \Rightarrow x_k = \frac{p_j}{p_k} x_j \quad (\text{cond. opt. entre } x_j \wedge x_k)$$

$$m - p_1 x_1 - \sum_{k=2}^{n} p_k x_k = 0$$

$$m - p_1 x_1 - \sum_{k=2}^{n} p_j x_j = 0$$

$$m - p_1 x_1 - (n-1) p_j x_j = 0$$

$$m - p_1 x_1 - (\cancel{n-1}) \cancel{p_j} \cdot \frac{p_1}{\cancel{p_j} (\cancel{n-1})} (x_1 - 1) = 0$$

$$m - 2p_1 x_1 + p_1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^m &= \frac{m+p_1}{2p_1} \\ x_j^m &= \frac{p_1}{p_j(n-1)} \left(\frac{m+p_1}{2p_1} - 1 \right) \end{aligned}\right\} \text{Marshalliana}$$

$$\left.\begin{aligned} x_j &= \frac{p_1}{p_j(n-1)} (x_1 - 1) \\ x_k &= \frac{p_j}{p_k} x_j \end{aligned}\right\} \text{cond. opt}$$

$$U=(x_1-1)^{n-1}\prod_{k=2}^{n}x_k$$

$$U=\left[(x_1-1)p_jx_j\right]^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k^{-1}$$

$$U=\left[(x_1-1)\cancel{p_j}\,\frac{p_1}{\cancel{p_j}(n-1)}(x_1-1)\right]^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k^{-1}$$

$$U=\left[(x_1-1)^2\cdot\frac{p_1}{(n-1)}\right]^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k^{-1}$$

$$U=(x_1-1)^{2(n-1)}\left(\frac{p_1}{n-1}\right)^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned}
x_1^H&=\left[U\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}+1\\
x_j^H&=\frac{p_1}{p_j(n-1)}\left[U\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}
\end{aligned}\right\}\text{Hicksiana}$$

$$V=\left(\frac{m+p_1}{2p_1}-1\right)^{n-1}\prod_{j=2}^{n}\frac{p_1}{p_j(n-1)}\left(\frac{m+p_1}{2p_1}-1\right)$$

$$G^*=p_1\left[U\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}+p_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{p_1}{(n-1)}\left[U\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1}\prod_{k=2}^{n}p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}$$

1.8. Ejercicio

Considere un individuo que presenta las siguientes preferencias por los bienes:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} \qquad \text{con} \qquad x_j > 0 \quad , \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

1. Encuentre las demandas marshallianas para todos los bienes.
2. Encuentre la función de utilidad indirecta.
3. Encuentre las demandas hicksianas para todos los bienes.
4. Encuentre la función de mínimo gasto.

Solución:

$$TMS_{1j} = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot x_j^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{n}{x_j^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{p_1}{p_j} \Rightarrow x_j^{M,H} = \left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}}$$

$$m = p_1x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j\left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \Rightarrow m = p_1x_1 + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

$$x_1(m, p_1, \dots, p_n) = \frac{m - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}}{p_1}$$

$$v(m, p_1, \dots, p_n) = \frac{m - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}}{p_1} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

$$v(m, p_1, \dots, p_n) = \frac{m - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}}{p_1} + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

$$\bar{u} = x_1 + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow x_1(\bar{u}, p_1, \dots, p_n) = u - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

$$G(\bar{u}, p_1, \dots, p_n) = p_1\left[u - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}\right] + \sum_{j=2}^{n} p_j\left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}}$$

$$G(\bar{u}, p_1, \dots, p_n) = p_1\left[u - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}\right] + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

1.9. Ejercicio

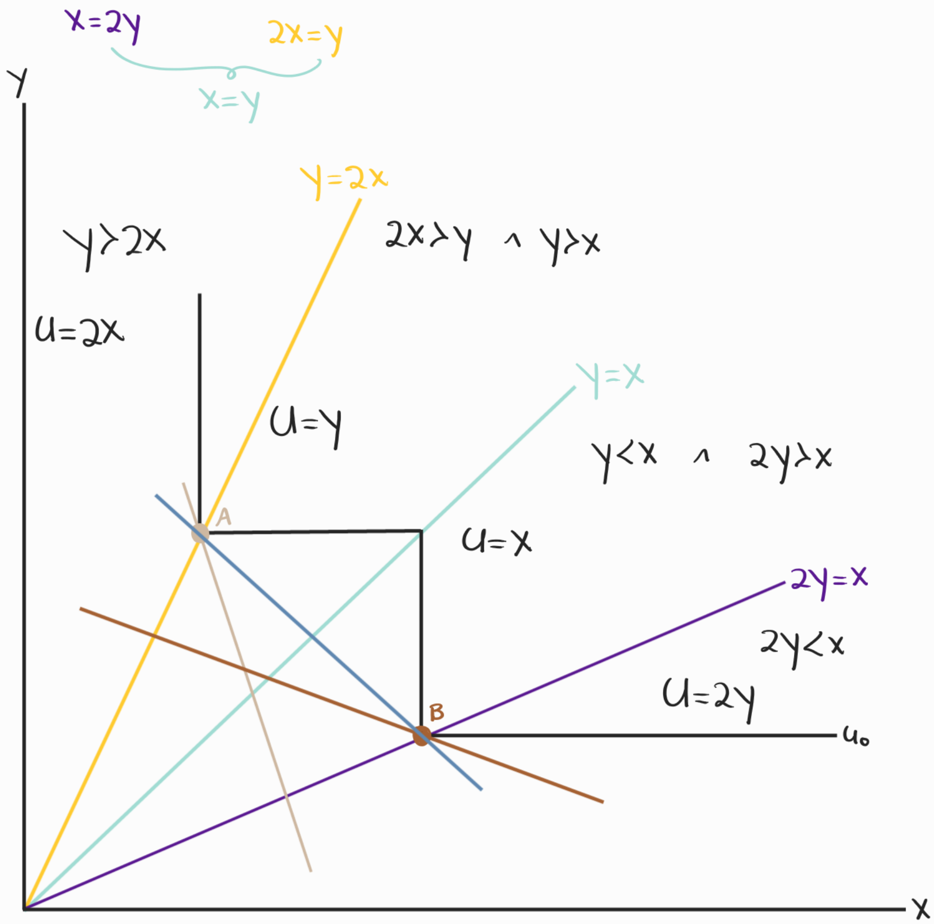
Considere un individuo que tiene las siguientes preferencias por los bienes x_1 y x_2:

$$U(x_1, x_2) = max\{min\{x, 2y\}, min\{2x, y\}\}$$

1. Obtenga las demandas marshallianas, hicksianas, la función de utilidad indirecta y la función de mínimo gasto para cada caso.

Solución:

$$U = \text{máx}\{\text{mín}\{x, 2y\}, \text{mín}\{2x, y\}\}$$



Si $\frac{P_x}{P_y} > 1$ (punto A)

$y = 2x$ cond. opt.

$$m = p_y \cdot 2x + p_x \cdot x$$

$$m = x(2p_y + p_x)$$

$$x^M = \frac{m}{2p_y + p_x} \quad \wedge \quad y^M = \frac{2m}{2p_y + p_x}$$

$$\underbrace{U = 2x \quad \vee \quad U = y}$$

$$x^H = \frac{1}{2}U \Rightarrow y^H = U$$

$$G = p_x \cdot \frac{1}{2} u + p_y \cdot u$$

$$V = \frac{2m}{2p_y + p_x}$$

Si $\frac{P_x}{P_y} < 1$ (punto B)

$2y = x$ cond. opt.

$$y^m = \frac{m}{2p_x + p_y} \quad \wedge \quad x^m = \frac{2m}{2p_x + p_y}$$

$$u = 2y \quad \vee \quad u = x^H$$

$$\Downarrow$$

$$y^H = \frac{1}{2} u$$

$$G = p_x \cdot u + p_y \cdot \frac{u}{2}$$

$$V = \frac{2m}{2p_x + p_y}$$

Si $\frac{P_x}{P_y} = 1$

Se indetermina, podría ser punto A o B.

1.10. Ejercicio

Considere un individuo que tiene las siguientes preferencias por los bienes x_1 y x_2:

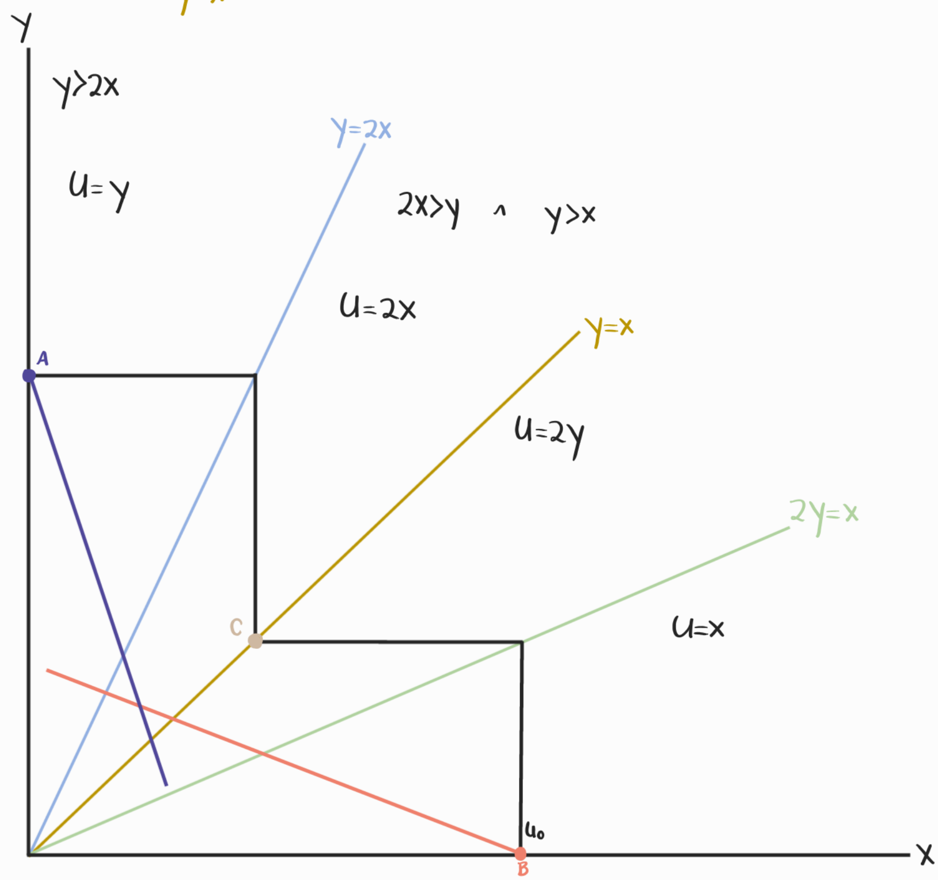
$$U(x_1, x_2) = min\{max\{2x, y\}, max\{x, 2y\}\}$$

1. Obtenga las demandas marshallianas, hicksianas, la función de utilidad indirecta y la función de mínimo gasto para cada caso.

Solución:

$$U=\text{mín}\{\text{máx}\{2x,y\},\ \text{máx}\{x,2y\}\}$$

$$\underbrace{2x=y \qquad x=2y}_{y=x}$$



Si $\frac{P_x}{P_y}>1$

Punto A

$Y^{m}=\frac{m}{P_y} \quad \wedge \quad X^{m,H}=0$

$Y^{H}=u$

$V=\frac{m}{P_y} \quad \wedge \quad G^{*}=P_y u$

Si $\frac{P_x}{P_y} < 1$

Punto B

$y^{m,H} = 0 \quad \wedge \quad x^m = \frac{m}{p_x}$

$x^H = u$

$V = \frac{m}{p_x} \quad \wedge \quad G^* = p_x \cdot u$

Si $\frac{P_x}{P_y} = 1$

El óptimo podría estar en punto A, B, C.

El óptimo en el punto C sería:

$y = x$

$x^m = \frac{m}{p_x + p_y} = y^m$

$u = 2x \quad \vee \quad u = 2y$

$\Rightarrow x^H = \frac{u}{2} = y^H$

$V = \frac{2m}{p_x + p_y} \quad \wedge \quad G^* = \frac{u}{2}(p_x + p_y)$

2. Propiedades: teoría del consumidor

2.1. Ejercicio

Considere un individuo que consume del bien 1 y del bien 2; este individuo tiene una función de utilidad indirecta dada por:

$$v(m, p_1, p_2) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1$$

1. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que maximiza la utilidad del individuo dado los precios y el ingreso.
2. Obtenga la función de mínimo gasto.
3. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que minimiza el gasto del individuo dado los precios y un nivel de utilidad.
4. Considerando la ecuación de Slutsky, obtenga el efecto total, efecto sustitución y efecto ingreso de un cambio en el precio del bien 2 sobre la demanda del bien 1.
5. Ayer el individuo tenía un ingreso de 100 y se enfrentaba a un precio del bien 1 igual al precio del bien 2 y este igual a 1. Hoy, el individuo tiene un ingreso de 150 pero el precio del bien 1 aumento a 2 y el precio del bien 2 disminuyó a 0.5. ¿El individuo está mejor, peor o igual? Justifique.
6. Obtenga la función de utilidad en términos de los bienes, es decir, $u(x_1, x_2)$.

Solución:

1)

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}} \cdot \frac{-p_2}{p_1^2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{-p_2}{p_1^2} = \frac{-1}{p_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \frac{1}{p_2}$$

$$x_1^{m,H} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_2} = \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}} \cdot \frac{1}{p_1} - \frac{m}{p_2^2} = \frac{1}{p_2}\left(1 - \frac{m}{p_2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial m} = \frac{1}{p_2}$$

$$x_2^m = \frac{m}{p_2} - 1$$

2)

$$V = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m}{p_2} - 1$$

$$u = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{G^*}{p_2} - 1$$

$$G^* = p_2 u + p_2 - p_2 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

3)

$$\frac{\partial G^*}{\partial p_2} = u + 1 - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - p_2 \cdot \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}} \cdot \frac{1}{p_1} = u \cancel{+1} - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \cancel{-1}$$

$$x_2^H = u - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

4) $$\frac{\partial X_1^H}{\partial P_1} = \frac{\partial X_1^m}{\partial P_1} + \frac{\partial X_1^m}{\partial m} \cdot \frac{\partial G^*}{\partial X_1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^H}{\partial P_1}}_{E.S} \quad \underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial P_1}}_{E.T} \quad \underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial m} \cdot \frac{\partial G^*}{\partial X_1}}_{E.I}$$

$$X_1^{m,H} = \frac{p_2}{p_1}$$

E.S:

$\dfrac{\partial X_1^H}{\partial P_2} = \dfrac{1}{p_1}$ (bienes sustitutos)

E.I:

$\dfrac{\partial X_1^m}{\partial m} = 0 \Rightarrow$ no hay efecto ingreso

E.T:

$$\frac{\partial X_1^m}{\partial P_2} = \frac{1}{p_1}$$

5) Note que $V_0(m=100, p_1=p_2=1) = 99 < V_1\left(m=150, p_1=2, p_2=\frac{1}{2}\right) \approx 297{,}61$

$\therefore$ El individuo está mejor hoy.

6) $$V = \underbrace{\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}_{X_1^m} + \underbrace{\frac{m}{p_2} - 1}_{X_2^m}$$

$$u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$$

Considere la demanda del bien 2 (marshalliana y hicksiana) dada por:

$$x_2^M = \frac{m}{p_2} - 1 \qquad\qquad x_2^H = u - \ln\frac{p_2}{p_1}$$

La ecuación de Slutsky es:

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} = \frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} + \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H$$

El término del lado izquierdo de la ecuación corresponde al efecto sustitución, corresponde al cambio en x_2 por un cambio en los precios relativos de los bienes. El primer término del lado derecho de la ecuación corresponde al efecto total y el segundo término corresponde al efecto ingreso, que es el cambio en la cantidad del bien x_2 por un cambio en el poder adquisitivo o ingreso real.

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} = -\frac{m}{p_2^2}$$

Si nos interesa el cambio en x_2 sólo por el efecto sustitución entonces lo podemos obtener como:

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} = -\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}}\frac{1}{p_1} = -\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{p_2}$$

Y el cambio por efecto ingreso corresponde a:

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = \frac{1}{p_2}\left[u - \ln\frac{p_2}{p_1}\right]$$

Observe que la suma del efecto sustitución con el efecto ingreso es el efecto total, este sería igual a:

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = -\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_2}\left[u - \ln\frac{p_2}{p_1}\right]$$

Quedando así,

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = -\frac{1}{p_2}\left[u + 1 - \ln\frac{p_2}{p_1}\right] \tag{1}$$

Observe que habíamos dicho que el efecto total es: $\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} = -\frac{m}{p_2^2}$. Para que haya coincidencia en ambos resultados se debe de dejar la ecuación 1 en términos del ingreso por lo que se cambia la u por la utilidad indirecta para que la expresión quede en términos de los precios y el ingreso. La utilidad indirecta para este ejercicio correspondía a:

$$v(m, p_1, p_2) = \ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1$$

Así, la ecuación quedaría igual a:

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = -\frac{1}{p_2}\left[\ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1 + 1 - \ln\frac{p_2}{p_1}\right]$$

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = -\frac{m}{p_2^2}$$

Este último resultado del efecto total es equivalente al resultado obtenido cuando se calculó de la forma $\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2}$.

2.2. Ejercicio

Considere un individuo que consume del bien 1 y del bien 2; este individuo tiene una función de gasto mínimo dada por:

$$G(\bar{u}, p_1, p_2) = \bar{u}p_1 - \frac{p_1^2}{4p_2}$$

1. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que minimiza el gasto del individuo dado los precios y un nivel de utilidad.
2. Obtenga la función que indique el nivel máximo de utilidad que el individuo puede alcanzar dado su ingreso y los precios de mercado.
3. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que maximiza la utilidad del individuo dado los precios y el ingreso.
4. Considerando la ecuación de Slutsky, obtenga el efecto total, efecto sustitución y efecto ingreso de un cambio en el precio del bien 1 sobre la demanda del bien 2.
5. Ayer el individuo tenía un ingreso de 5 colones y se enfrentaba a un precio del bien 1 igual al precio del bien 2 y este igual a 1. Hoy, el individuo tiene un ingreso de 7 pero el precio del bien 1 aumento a 2 y el precio del bien 2 disminuyó a 0.5. ¿El individuo está mejor, peor o igual? Justifique.
6. Obtenga la función de utilidad en términos de los bienes; es decir, $u(x_1, x_2)$.

Solución:

$$G^*(\bar{u}, p_1, p_2) = \bar{u}p_1 - \frac{p_1^2}{4p_2}$$

$$X_1^H = \frac{\partial G^*}{\partial P_1} = \bar{u} - \frac{p_1}{2p_2}$$

$$X_2^{H,M} = \frac{\partial G^*}{\partial P_2} = \frac{p_1^2}{4p_2^2}$$

$$m = vp_1 - \frac{p_1^2}{4p_2}$$

$$V = \frac{m}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2}$$

$$X_1^M = -\frac{\frac{\partial V}{\partial p_1}}{\frac{\partial V}{\partial m}} = \frac{\frac{m}{p_1^2} - \frac{1}{4p_2}}{\frac{1}{p_1}} = \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}$$

$$\underset{ES}{\frac{\partial X_2^H}{\partial p_1}} = \underset{ET}{\frac{\partial X_2^M}{\partial p_1}} + \underbrace{\frac{\partial X_2}{\partial m} \cdot \frac{\partial G^*}{\partial p_2}}_{E.I}$$

$$\frac{\partial X_2^H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2p_2^2}$$

$$\frac{\partial X_2^M}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2p_2^2}$$

$$\frac{\partial X_2^M}{\partial m} = 0$$

$$V_0(m=5, p_1=p_2=1) = 5{,}25 > V_1(m=7, p_1=2, p_2=0{,}5) = 4{,}5$$

$\therefore$ El individuo estaba mejor ayer.

$$V = \frac{m}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2}$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}}_{X_1} + \frac{p_1}{4p_2} + \frac{p_1}{4p_2}$$

$$\Rightarrow V = \underbrace{\frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}}_{X_1} + \underbrace{\frac{p_1}{2p_2}}_{X_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$U(X_1, X_2) = X_1 + X_2^{\frac{1}{2}}$$

Otra forma de hacer el inciso 6:

$$X_2^M = \frac{p_1^2}{4p_2^2} \qquad X_1^M = \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}$$

Despejo p_2 en X_2^M y p_1 en X_1^M (o en este caso m en X_1^M porque p_1 está difícil).

$$p_2 = \frac{p_1}{2X_2^{\frac{1}{2}}} \qquad m = p_1X_1 + \frac{p_1^2}{4p_2}$$

Inyecto ambas ecuaciones en V, cambio V por U y simplifico al máximo.

$$V = \frac{m}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2}$$

$$U = \frac{\left(p_1X_1 + \frac{p_1^2}{4p_2}\right)}{p_1} + \frac{\cancel{p_1}}{4 \cdot \frac{\cancel{p_1}}{2X_2^{\frac{1}{2}}}} = X_1 + \frac{p_1}{4p_2} + \frac{1}{2}X_2^{\frac{1}{2}}$$

2.3. Ejercicio

La función de utilidad indirecta de un individuo es la siguiente:

$$v(p_1, p_2, m) = \kappa \frac{m(p_1 + p_2)}{p_1 p_2}$$

Donde p_i es el precio del bien i, m es su ingreso y $\kappa > 0$.

1. Obtenga las demandas ordinarias para cada uno de los bienes.
2. Obtenga la función de mínimo gasto.
3. Obtenga las demandas compensadas para cada uno de los bienes.
4. Determine el efecto total, ingreso y sustitución de un cambio en p_1 en la cantidad del bien 1.

Solución:

$$V(p_1, p_2, m) = K \cdot \frac{m(p_1+p_2)}{p_1 p_2} = \frac{Km}{p_2} + \frac{Km}{p_1}$$

$$u = K\,\frac{G^*(p_1+p_2)}{p_1 p_2}$$

$$G^* = \frac{u p_1 p_2}{K(p_1+p_2)}$$

$$X_1^M = \frac{\cancel{-}\cancel{-}\frac{(Km)}{p_1^{\cancel{2}}}}{\frac{K(p_1+p_2)}{\cancel{p_1}p_2}} = \frac{\cancel{K}mp_2}{\cancel{K}p_1(p_1+p_2)} = \frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)}$$

$$X_2^M = \frac{mp_1}{p_2(p_1+p_2)}$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial p_1} = \frac{up_2K(p_1+p_2) - up_1p_2K}{K^2(p_1+p_2)^2}$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial p_1} = \frac{up_2K(\cancel{p_1}+p_2) - up_1p_2K}{K^2(p_1+p_2)^2}$$

$$X_1^H = \frac{up_2^2}{K(p_1+p_2)^2}$$

$$X_2^H = \frac{up_1^2}{K(p_1+p_2)^2}$$

$$G^* = p_1 \frac{up_2^2}{K(p_1+p_2)^2} + p_2 \frac{up_1^2}{K(p_1+p_2)^2}$$

$$G^* = \frac{up_1p_2}{K(p_1+p_2)^{\cancel{2}}} \cancel{(p_2+p_1)}$$

Ecuación Slutsky

$$X_1^H(p_1,\dots,p_n,u) = X_1^m(p_1,\dots,p_n, G^*(p_1,\dots,p_n,u))$$

$$\frac{\partial X_1^H}{\partial p_1} = \frac{\partial X_1^m}{\partial p_1} + \frac{\partial X_1^m}{\partial m} \cdot \frac{\partial G^*}{\partial p_1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^H}{\partial p_1}}_{E.S} = \underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial p_1}}_{E.T} + \underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial m} \cdot X_1^H}_{E.I}$$

Efecto directo

Efecto en x_1 de un ΔP_1

$$X_1^m = \frac{mp_2}{p_1(p_1+p_2)} \quad \wedge \quad X_1^H = \frac{up_2^2}{K(p_1+p_2)^2}$$

$$ET = \frac{-mp_2}{p_1^2(p_1+p_2)^2}(2p_1+p_2)$$

$$ES = \frac{-up_2^2}{K(p_1+p_2)^3}$$

$$EI = \frac{p_2}{p_1(p_1+p_2)} \frac{up_2^2}{K(p_1+p_2)^2}$$

2.4. Ejercicio

Considere la siguiente función de utilidad indirecta que presenta un individuo

$$v(p_1, \cdots, p_n, m) = \left[\frac{m}{n}\right]^n \prod_{i=1}^{n} p_i^{-1}$$

1. Obtenga las demandas ordinarias para cada uno de los bienes.
2. Obtenga la función de mínimo gasto.
3. Obtenga las demandas compensadas para cada uno de los bienes.
4. Determine el efecto total, ingreso y sustitución de un cambio en el precio del bien k en la cantidad del bien j.

Solución:

$$x_j^m = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_j}}{\frac{\partial v}{\partial m}} = \frac{\cancel{+}\cancel{\left(\frac{m}{n}\right)^n} \frac{1}{p_j} \cancel{\prod_{i=1}^{n} p_i^{-1}}}{n \cdot m^{-1} \cancel{\left(\frac{m}{n}\right)^n} \cancel{\prod_{i=1}^{n} p_i^{-1}}} = \frac{m}{np_j} = x_j^m$$

$$V = m^n \left(\frac{1}{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} p_i^{-1}$$

$$u = G^{*n} \left(\frac{1}{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} p_i^{-1}$$

$$G^{*n} = u\, n^n \prod_{i=1}^{n} p_i$$

$$G^{*} = n u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial p_j} = x_j^H = \frac{1}{n} p_j^{-1} n u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$x_j^H = p_j^{-1} u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}}$$

Ecuación Slutsky

$$\frac{\partial x_j^H}{\partial p_k} = \frac{\partial x_j^m}{\partial p_k} + \frac{\partial x_j^m}{\partial m} \cdot x_k^H$$

$$\frac{\partial x_j^H}{\partial p_k} = \frac{1}{n} p_k^{-1} \; p_j^{-1} u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\partial x_j^m}{\partial p_k} = 0$$

$$\frac{\partial x_j^m}{\partial m} \cdot x_k^H = \frac{1}{n} p_j^{-1} \; p_k^{-1} u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}}$$

3. Estática comparativa teoría del consumidor

3.1. Ejercicio

La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) \quad , \quad \forall x_j > 0 \quad , \quad j = 1, \cdots, n$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas de todos los bienes.
2. Determine cómo se distribuye el efecto ingreso y efecto sustitución entre el efecto total de un cambio en el precio del bien 1 sobre ambos tipos de bienes.
3. Demuestre que se cumple la Agreción de Cournot y la Agregación de Engel.

Solución:

$$TMS_{1j} = \frac{P_1}{P_j} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{X_j - 1}} = \frac{P_1}{P_j} \Rightarrow X_j^{m,H} = \frac{P_1}{P_j} + 1$$

$$m = p_1 x_1 + (n-1)\, p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j$$

$$X_1^m = \frac{m}{p_1} - (n-1) - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j$$

$$u = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right)$$

$$X_1^H = u - (n-1)\ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j$$

2)

$$X_1^H(\vec{P}, u) = X_1^m\left(\vec{P},\, G^*(\bar{u}, \vec{P})\right)$$

$$\frac{X_1^H}{\partial p_1} = \frac{\partial X_1^m}{\partial p_1} + \frac{\partial X_1^m}{\partial m} \cdot \frac{\partial G^*}{\partial p_1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^H}{\partial p_1}}_{E.S} = \frac{-(n-1)}{p_1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial p_1}}_{E.T} = \frac{-m}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^2}\sum_{j=2}^{n} p_j = \frac{-1}{p_1}\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial m} \cdot X_j^H}_{E.I} = \frac{1}{p_1} \cdot X_1^H$$

Observe que

$$\underbrace{\frac{X_1^H}{\partial p_1}}_{E.S} - \underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial p_1}}_{E.T} = \frac{-(n-1)}{p_1} + \frac{1}{p_1}\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)$$

$$\frac{X_1^H}{\partial p_1} - \frac{\partial X_1^m}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1}\underbrace{\left(\frac{m}{p_1} - (n-1) - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)}_{X_1} = \frac{1}{p_1}\cdot X_1 = \underbrace{\frac{\partial X_1^m}{\partial m}\cdot X_j^H}_{E.I}$$

$$\frac{E.I}{E.T} = -X_1\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)^{-1} \quad \wedge \quad \frac{E.S}{E.T} = (n-1)\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)^{-1}$$

Cruzada:

$$X_j^{m,H} = \frac{P_1}{P_j} + 1$$

$$\frac{X_j^H}{\partial p_1} = \frac{\partial X_j^m}{\partial p_1} + \frac{\partial X_j^m}{\partial m}\cdot\frac{\partial 6^*}{\partial p_1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{p_j}}_{ES} = \underbrace{\frac{1}{p_j}}_{ET} + \underbrace{0}_{EI}$$

$$\frac{E.I}{E.T} = 0 \quad \wedge \quad \frac{E.S}{E.T} = 1$$

Agregación Engel

$$m = p_1 x_1(\vec{P}, m) + \sum_{j=2}^{n} p_j X_j(\vec{P}, m)$$

$$1 = \frac{\partial m}{\partial m} = p_1\cdot\frac{\partial x_1}{\partial m} + \sum_{j=2}^{n} p_j\cdot\frac{\partial x_j}{\partial m}$$

$$1 = \cancel{p_1}\cdot\frac{1}{\cancel{p_1}} + \cancel{\sum_{j=2}^{n} p_j\cdot 0}^{\,0}$$

Agregación Cournot

Para p_1

$$m = p_1 x_1(\vec{P}, m) + \sum_{j=2}^{n} p_j X_j(\vec{P}, m)$$

$$\frac{\partial m}{\partial p_1} = 0 = X_1 + p_1\cdot\frac{\partial X_1}{\partial p_1} + \sum_{j=2}^{n} p_j\cdot\frac{\partial X_j}{\partial p_1}$$

$$= x_1 - \left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right) + \sum_{j=2}^{n} \cancel{p_j} \cdot \frac{1}{\cancel{p_j}}$$

$$0 = x_1 - \left(\underbrace{\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j - (n-1)}_{x_1}\right)$$

Para p_j

$$m = p_1 x_1(\vec{p}, m) + p_j x_j(\vec{p}, m) + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n} p_k x_k(\vec{p}, m)$$

$$\frac{\partial m}{\partial p_j} = p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_j} + x_j + p_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial p_j}$$

$$= \cancel{p_1} \cdot \frac{-1}{\cancel{p_1}} + x_j - \cancel{p_j} \cdot \frac{p_1}{p_j^{\cancel{2}}} + \cancelto{0}{\sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n} p_k \cdot 0}$$

$$0 = x_j - 1 - \underbrace{\frac{p_1}{p_j}}_{-x_j}$$

3.2. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.
2. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.
3. Encuentre la elasticidad de sustitución.
4. Demuestre que la demanda marshalliana es homogénea de grado cero en precios e ingreso.
5. Demuestre que la demanda hicksiana es homogénea de grado cero en precios.
6. Muestre que se cumple la simetría de Hicks.
7. Dada la ecuación de Slutsky, obtenga el efecto ingreso y el efecto sustitución propia como proporción del efecto total.
8. Calcule la descomposición de Slutsky (en términos de elasticidades propias).
9. Determine la veracidad de la siguiente proposición y justifique su respusta:
   Se puede afirmar que la demanda hicksiana por el bien i es más elástica que la demanda marshalliana por el bien i.
10. Muestre que se cumple la agregación de Engel.
11. Muestre que se cumple la agregación de Cournot.

Solución:

$$u=\prod_{i=1}^{n} x_i$$

$$TMS_{jK}=\frac{P_j}{P_K} \Rightarrow \frac{X_K}{X_j}=\frac{P_j}{P_K} \Rightarrow X_K=\frac{P_j}{P_K}\cdot X_j$$

$$m=\sum_{K=1}^{n} p_j x_j \Rightarrow X_j=\frac{m}{nP_j} \quad \wedge \quad X_j=\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{K=1}^{n} P_K^{\frac{1}{n}}}{P_j}$$

$$X_j(m,\vec{P})=\frac{m}{nP_j} \quad \wedge \quad X_j(\bar{u},\vec{P})=\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{K=1}^{n} P_K^{\frac{1}{n}}}{P_j}$$

3)

$$\sigma=\frac{\Delta\%\left(\frac{X_K}{X_j}\right)}{\Delta\% TMS_{jK}}=\frac{\partial\left(\frac{X_K}{X_j}\right)}{\partial TMS}\cdot\frac{TMS}{\left(\frac{X_K}{X_j}\right)}=\frac{\partial \ln \frac{X_K}{X_j}}{\partial \ln TMS}$$

$$TMS_{jK}=\frac{X_K}{X_j}$$

$$\ln TMS_{jK}=\ln\frac{X_K}{X_j} \Rightarrow \sigma=1$$

σ mide el grado de sustituibilidad entre bienes.

Observe que para la Cobb-Douglas $\sigma\in\mathbb{R}^+$ porque pertenece a la familia CES.

4) Si es homogénea de grado 0 en $m \wedge \vec{P}$

$$\Rightarrow X_j(\lambda m,\lambda\vec{P})=\lambda^0\cdot X_j(m,\vec{P})$$

$$X_j(m,\vec{P})=\frac{m}{nP_j}$$

$$X_j(\lambda m,\lambda\vec{P})=\frac{\cancel{\lambda} m}{n\cancel{\lambda}P_j}=\frac{m}{nP_j}=X_j^m$$

5) Si es homogénea de grado 0 en $\vec{P}$

$$\Rightarrow X_j(\bar{u},\lambda\vec{P})=\lambda^0 X_j(\bar{u},\vec{P})$$

$$X_j\left(\bar{u},\lambda\vec{P}\right)=\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}\left(\lambda P_k\right)^{\frac{1}{n}}}{\lambda P_j}=\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^{n}\lambda^{\frac{1}{n}}P_i}{\lambda P_j}=\frac{\lambda}{\lambda}\,\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}=\lambda^{0}\,\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}=X_j\left(\bar{u},\vec{P}\right)$$

6)

$$X_j=\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}$$

$$X_j=\frac{u^{\frac{1}{n}}\cdot P_i^{\frac{1}{n}}\prod_{k\neq i}P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}\quad\wedge\quad X_i=\frac{u^{\frac{1}{n}}\cdot P_j^{\frac{1}{n}}\prod_{k\neq j}P_k^{\frac{1}{n}}}{P_i}$$

$$\frac{\partial X_j}{\partial P_i}=\frac{1}{n}\cdot P_i^{-1}\,\frac{u^{\frac{1}{n}}}{P_j}\prod_{k=1}^{n}P_k^{\frac{1}{n}}\quad\wedge\quad\frac{\partial X_i}{\partial P_j}=\frac{\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}}P_j^{-1}}{P_i}\prod_{k=1}^{n}P_k^{\frac{1}{n}}$$

7)

$$X_j\left(m,\vec{P}\right)=\frac{m}{nP_j}\quad\wedge\quad X_j\left(\bar{u},\vec{P}\right)=\frac{u^{\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_j^{H}}{\partial P_j}}_{ES}=\underbrace{\frac{\partial X_j^{M}}{\partial P_j}}_{ET}+\underbrace{\frac{\partial X_j^{M}}{\partial m}\cdot X_j^{H}}_{EI}$$

$$\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{P_j}\cdot\cancel{X_j}=\frac{-1}{P_j}\cancel{X_j}+\frac{1}{nP_j}\cancel{X_j}$$

$$=\frac{1}{P_j}\left(-1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{ES}{ET}=\frac{-1}{n}+1=\frac{n-1}{n}$$

$$\frac{EI}{ET}=\frac{-1}{n}\quad\vee\quad\left(1-\frac{ES}{ET}\right)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

8) $\eta_{jj}^{H}=\eta_{jj}^{M}+\frac{P_jX_j}{m}\cdot\eta_{jm}$

$$x_j(m,\vec{p}) = \frac{m}{nP_j} \quad \wedge \quad x_j(\bar{u},\vec{p}) = \frac{u^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}$$

$$\eta_{jj}^{m} = \frac{-1}{P_j} \cdot x_j \cdot \frac{P_j}{x_j} \qquad \eta_{jj}^{H} = \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{P_j} \cdot x_j \cdot \frac{P_j}{x_j}$$

$$\eta_{jj}^{m} = -1 \qquad \eta_{jj}^{H} = \left(\frac{1}{n}-1\right)$$

$$\eta_{jm}^{m} = \frac{m}{np_j} \cdot \frac{1}{x_j}$$

$$\eta_{jm}^{m} = 1$$

$$\eta_{jj}^{H} = \eta_{jj}^{m} + \frac{P_j x_j}{m} \cdot \eta_{jm}$$

$$\left(\frac{1}{n}-1\right) = -1 + \underbrace{\frac{P_j x_j}{m}}$$

$$\frac{1}{n} - 1 = -1 + \frac{\cancel{P_j}}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m}}{n\cancel{P_j}} = -1 + \frac{1}{n}$$

9) Note que los bienes son bienes ordinarios porque $\eta_{ii} < 0$.

Observe que $\eta_{im} > 0 \ \forall i$ por lo que el bien i es un bien normal por lo que

$$\underbrace{\eta_{ii}^{H}}_{-} = \underbrace{\eta_{ii}^{m}}_{-} + \underbrace{\frac{P_i x_i}{m} \eta_{im}}_{+} \Rightarrow |\eta_{ii}^{H}| < |\eta_{ii}^{m}| \quad \text{dado que } \eta_{ii}^{H}, \eta_{ii}^{m} < 0.$$

$\therefore$ La proposición es falsa.

Por ejemplo, suponga $\frac{P_i x_i}{m} \eta_{im} = 1 \ \wedge \ \eta_{ii}^{m} = -5$

Eso implicaría que $\eta_{ii}^{H} = -4$ por lo que η_{ii}^{H} es más inelástica (recuerde que para comparar elasticidades se toma el valor absoluto $|\eta_{ii}^{m}| > \eta_{ii}^{H}$).

10)

$$1=\sum_{j=1}^{n}\frac{P_jX_j}{m}\cdot\eta_{jm}$$

$$1=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_jX_j}{m}\cdot 1=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cancel{P_j}}{\cancel{m}}\cdot\frac{\cancel{P_j}}{n\cancel{m}}=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

11)

$$X_j(m,\vec{P})=\frac{m}{nP_j}$$

$$m=P_jX_j+\sum_{i\neq j}^{n}P_iX_i$$

$$\frac{\partial m}{\partial P_j}=0=X_j+P_j\cdot\frac{\partial X_j}{\partial P_j}+\sum_{i\neq j}^{n}P_i\cdot\cancel{\frac{\partial X_i}{\partial P_j}}^{\,0}$$

$$X_j+\cancel{P_j}\cdot\frac{-1}{\cancel{P_j}}\cdot X_j=0$$

3.3. Ejercicio

Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.
2. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.
3. Calcule la descomposición de Slutsky (en términos de elasticidades propias).
4. Calcule la descomposición de Slutsky (en términos de elasticidades cruzadas).
5. Muestre que se cumple la agregación de Engel. Además, interpréte este resultado.
6. Muestre que se cumple la agregación de Cournot. Además, interpréte este resultado.

$$TMS_{jk} = \frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_k}} = \frac{x_k}{x_j} = \frac{P_j}{P_k}$$

$$m = \sum_{j=1}^{n} P_k x_k \Rightarrow x_k = \frac{m}{nP_k}$$

$$u = \sum_{k=1}^{n} \ln\left[\frac{P_j x_j}{P_k}\right]$$

$$u = n\ln P_j + n\ln x_j - \sum_{k=1}^{n} \ln P_k$$

$$\ln x_j = \frac{u}{n} - \ln P_j + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln P_k$$

$$x_j = \frac{e^{\frac{u}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln P_k}}{e^{\ln P_j}}$$

3)

$$\eta_{jj}^{H} = \eta_{jj}^{m} + \frac{P_j x_j}{m} \cdot \eta_{jm}$$

$$x_j = \frac{m}{nP_j}$$

$$\eta_{jj}^{m} = \frac{-1}{P_j} \cdot x_j \cdot \frac{P_j}{x_j} = -1$$

$$\eta_{jm} = 1$$

$$\Rightarrow \eta_{jj}^{H} = -1 + \frac{P_j x_j}{m}$$

4)

$$\eta_{jk}^{H} = \eta_{jk}^{m} + \frac{P_k x_k}{m} \cdot \eta_{jm}$$

$$\eta_{jk}^{H} = 0 + \frac{P_k x_k}{m}$$

$$\eta_{jk}^{H} = \frac{P_k x_k}{m}$$

5)

$$X_K = \frac{m}{nP_K}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j X_j}{m} \eta_{jm}$$

$$\eta_{jm} = \frac{\partial X_j}{\partial m} \cdot \frac{m}{X_j} = \frac{1}{nP_j} \cdot \frac{m}{X_j} = 1$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\cancel{P_j}}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m}}{n\cancel{P_j}}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}$$

6)

$$0 = X_j + P_j \cdot \frac{\partial X_j}{\partial P_j} + \sum_{i \neq j}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial P_j}$$

$$X_i = \frac{m}{nP_i}$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial P_j} = 0$$

$$\frac{\partial X_j}{\partial P_j} = \frac{-1}{P_j} \cdot X_j$$

$$0 = \cancel{X_j} + \cancel{P_j} \cdot \frac{-\cancel{X_i}}{\cancel{P_j}} = 0$$

3.4. Ejercicio

La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.
2. Demuestre que se cumple la agregación de Engel y la Agregación de Cournot.

Solución:

$$TMS=\frac{UM_j}{UM_K}=\frac{\alpha_j x_j^{-1}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{\alpha_K x_K^{-1}\prod_{K=1}^{n} x_K^{\alpha}}=\frac{p_j}{p_K}\Rightarrow \frac{x_K}{x_j}=\frac{\alpha_K p_j}{\alpha_j p_K}\quad \text{(cond. opt)}$$

Al inyectar la cond. opt en la restricción presupuestaria se obtiene la demanda marshalliana

$$m=\sum_{K=1}^{n}\frac{\alpha_K p_j x_j}{\alpha_j}\Rightarrow x_j=\frac{\alpha_j m}{p_j\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}$$

Al inyectar la cond. opt en la función de utilidad se obtiene la demanda hicksiana

$$U=\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{\alpha_K p_j}{\alpha_j p_K}x_j\right)^{\alpha_K}\Rightarrow U=\left(\frac{p_j x_j}{\alpha_j}\right)^{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{\alpha_K}{p_K}\right)^{\alpha_K}\Rightarrow x_j=\frac{\alpha_j U^{\frac{1}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}\prod_{K=1}^{n}\left(\frac{p_K}{\alpha_K}\right)^{\frac{\alpha_K}{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}}}{p_j}$$

Agregación Engel

$$\frac{\partial m}{\partial m}=1=\sum_{j=1}^{n}p_j\,\frac{\partial x_j(m,p_1,\dots,p_n)}{\partial m}$$

$$x_j=\frac{\alpha_j m}{p_j\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial m}=\frac{\alpha_j}{p_j\sum_{K=1}^{n}\alpha_K}=\frac{1}{m}x_j$$

$$1=\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{1}{m}x_j=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}p_j x_j=\frac{1}{m}\cdot m=1$$

En elasticidades sería:

$$1=\sum_{j=1}^{n}p_j\,\frac{\partial x_j(m,p_1,\dots,p_n)}{\partial m}\cdot\frac{m}{x_j}\cdot\frac{x_j}{m}$$

$$\Rightarrow 1=\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j x_j}{m}\cdot\eta_{jm}$$

$$\eta_{jm} = \frac{\partial X_j}{\partial m} \cdot \frac{m}{X_j} = \frac{\partial \ln X_j}{\partial \ln m} = 1$$

$$\Longrightarrow 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j X_j}{m} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} p_j X_j = \frac{1}{m} \cdot m = 1$$

Agregación Cournot

$$m = p_1 X_1 + \dots + p_j X_j + \dots + p_n X_n$$

$$\frac{\partial m}{\partial p_j} = 0 = p_1 \cdot \frac{\partial X_1}{\partial p_j} + \dots + X_j + p_j \cdot \frac{\partial X_j}{\partial p_j} + \dots + p_n \frac{\partial X_n}{\partial p_j}$$

$$0 = X_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} \cdot p_i$$

$$0 = X_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} \cdot p_i$$

$$\boxed{0 = X_j + \frac{\partial X_j}{\partial p_j} \cdot p_j + \sum_{i \neq j}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} \cdot p_i}$$

$$X_i = \frac{\alpha_i m}{p_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Cuando $i \neq j$: $\dfrac{\partial X_i}{\partial p_j} = 0$

Cuando $i = j$: $\dfrac{\partial X_j}{\partial p_j} = -\dfrac{\alpha_j m}{p_j^2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = \dfrac{-1}{p_j} \cdot X_j$

Entonces:

$$0 = X_j + \frac{\partial X_j}{\partial p_j} \cdot p_j + \sum_{i \neq j}^{n} \cancelto{0}{\frac{\partial X_i}{\partial p_j}} \cdot p_i$$

$$0 = X_j + \frac{-1}{p_j} \cdot X_j \cdot p_j = 0$$

En elasticidades sería:

$$\Rightarrow 0 = X_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} p_i$$

$$\Rightarrow 0 = X_j \cdot \frac{p_j}{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial p_j} p_i \cdot \frac{p_j}{m} \cdot \frac{X_i}{X_i}$$

$$\Rightarrow 0 = X_j \cdot \frac{p_j}{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i X_i}{m} \cdot \eta_{ij}$$

$$\boxed{0 = X_j \cdot \frac{p_j}{m} + \frac{p_j X_j}{m} \eta_{jj} + \sum_{i \neq j}^{n} \frac{p_i X_i}{m} \cdot \eta_{ij}}$$

$$X_i = \frac{\alpha_i m}{p_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Note que:

$$\ln X_i = \ln \alpha_i + \ln m - \ln p_i - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$$

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \ln X_i}{\partial \ln p_j} = 0$$

$$\eta_{jj} = \frac{\partial \ln X_j}{\partial \ln p_j} = -1$$

Así,

$$0 = X_j \cdot \frac{p_j}{m} + \frac{p_j X_j}{m} \cdot -1 = 0$$

3.5. Ejercicio

La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_i)$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.

2. Demuestre que se cumple la agregación de Engel y la Agregación de Cournot.

Solución:

$$TMS_{jk} = \frac{\prod_{i \neq j}(x_i - \alpha_i)}{\prod_{i \neq k}(x_i - \alpha_i)} = \frac{x_k - \alpha_k}{x_j - \alpha_j} = \frac{p_j}{p_k} \Rightarrow x_k = \frac{p_j}{p_k}\left(x_j - \alpha_j\right) + \alpha_k$$

$$m = \sum_{k=1}^{n}\left[p_j\left(x_j - \alpha_j\right) + \alpha_k p_k\right]$$

$$m = np_j x_j - np_j \alpha_j + \sum_k \alpha_k p_k$$

$$x_j^m = \frac{m + np_j\alpha_j - \sum_k \alpha_k p_k}{np_j}$$

$$u = \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{p_j}{p_k}\left(x_j - \alpha_j\right)\right]$$

$$u = p_j^n (x_j - \alpha_j)^n \prod_{k=1}^{n} p_k^{-1} \Rightarrow u^{\frac{1}{n}} \cdot \prod_{k=1}^{n} p_k^{\frac{1}{n}} = p_j\,(x_j - \alpha_j)$$

$$x_j^H = \frac{u^{\frac{1}{n}} \cdot \prod_{k=1}^{n} p_k^{\frac{1}{n}}}{p_j} + \alpha_j$$

2)

$$x_j^m = \frac{m}{np_j} - \frac{\sum p_i \theta_i}{np_j} + \theta_j$$

$$x_j^m = \frac{m}{np_j} - \frac{p_j\theta_j}{np_j} - \frac{\sum_{i \neq j} p_i \theta_i}{np_j} + \theta_j$$

$$1 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^m}{\partial m}$$

$$\frac{\partial x_j^m}{\partial m} = \frac{1}{np_j}$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{1}{np_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

3)

$$m = p_j x_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i x_i$$

$$0 = x_j + p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_j} = \frac{-m}{n p_j^2} + \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \theta_i}{n p_j^2}$$

$$x_i = \frac{m}{n p_i} - \frac{p_i \theta_i}{n p_i} - \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} p_k \theta_k}{n p_i} + \theta_j$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\theta_j}{n p_i}$$

$$0 = x_j + p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

$$0 = x_j - \frac{m}{n p_j} + \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \theta_i}{n p_j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \cancel{p_i} \frac{\theta_j}{n \cancel{p_i}}$$

$$0 = x_j - \frac{m}{n p_j} + \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \theta_i}{n p_j} + \frac{n-1}{n} \theta_j$$

Lo demanda era: $x_j = \frac{m}{n p_j} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \theta_i}{n p_j} + \theta_j$

$$0 = \cancel{\frac{m}{n p_j}} - \frac{\sum p_i \theta_i}{n p_j} + \theta_j - \cancel{\frac{m}{n p_j}} + \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \theta_i}{n p_j} + \frac{n-1}{n} \theta_j$$

$$0 = -\frac{\sum p_i \theta_i}{n p_j} + \theta_j + \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \theta_i}{n p_j} + \frac{n-1}{n} \theta_j$$

$$= -\frac{\cancel{p_j} \theta_j}{n \cancel{p_j}} - \cancel{\frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \theta_i}{n p_j}} + \theta_j + \cancel{\frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i \theta_i}{n p_j}} - \frac{n-1}{n} \theta_j$$

$$= \frac{-\theta_j}{n} + \theta_j - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta_j$$

$$= \cancel{\frac{-\theta_j}{n}} + \cancel{\theta_j} - \cancel{\theta_j} + \cancel{\frac{1}{n} \theta_j} = 0$$

3.6. Ejercicio

Si un consumidor posee la siguiente función de utilidad, encuentre:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - \frac{1}{\prod_{i=2}^{n} x_i}$$

1. Las funciones de demanda marshallianas y hicksianas para todos los tipos de bienes (debe analizar si existen soluciones de esquina).

2. Que se cumple la agregación de Cournot para todos los tipos de bienes.

3. Que se cumple la siguiente igualdad para todos los tipos de bienes:

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_{ij}^{h} = 0$$

4. Consumo intertemporal

4.1. Ejercicio

Un individuo considera que su consumo presente y futuro son sustitutos perfectos. Sin embargo, descuenta un poco el consumo futuro para reflejar las incertidumbres de la vida. Por tanto, su función de utilidad está dada por

$$u(c_0, c_1) = c_0 + (1 - \beta)c_1$$

donde $0 \leq \beta \leq 1$ y representa la impaciencia del individuo por el consumo futuro.

1. ¿Cuánto sería el consumo presente y futuro de acuerdo con diferentes valores que pueden existir de tasa de interés y el factor de impaciencia?

2. ¿Cuál es su conclusión respecto a la relación entre el comportamiento de ahorro de la persona y su factor de impaciencia?

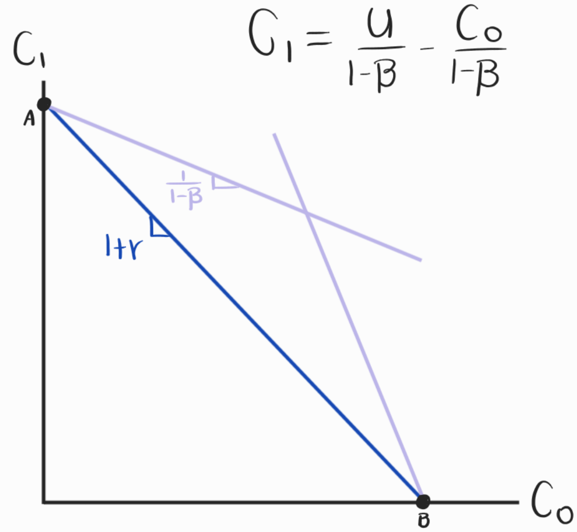
3. ¿Cómo cambiaría sus respuestas anteriores si las preferencias por el consumo presente y futuro fueran de perfectos complementos?

Solución:

Si $\frac{1}{1-\beta} < 1+r$ (Punto A)

$C_1 = y_1 + (1+r)y_0 \Rightarrow C_0 = 0$

$$C_1 = \frac{U}{1-\beta} - \frac{C_0}{1-\beta}$$



Si $\frac{1}{1-\beta} > 1+r$ (Punto B)

$C_0 = y_0 + \frac{y_1}{1+r} \Rightarrow C_1 = 0$

Si $\frac{1}{\beta} = 1+r$

No hay solución única

Si aumenta impaciencia $\Rightarrow \uparrow\beta \Rightarrow (1-\beta)\downarrow \Rightarrow \left(\frac{1}{1-\beta}\right)\uparrow \Rightarrow$ más propenso estar en el caso $B \Rightarrow$ más propenso a consumir hoy (ahorrar menos hoy).

Si aumenta tasa de interés $\Rightarrow \uparrow r \Rightarrow (1+r)\uparrow \Rightarrow$ más propenso a estar en el caso $A \Rightarrow$ más propenso a consumir más mañana (ahorrar más hoy).

3)

$$U = \min\{C_0, (1-\beta)C_1\}$$

$$C_0 = (1-\beta)C_1$$

$$C_1 = \frac{C_0}{1-\beta}$$

$$y_0 + \frac{y_1}{1+r} = C_0 + \frac{C_0}{(1+r)(1-\beta)}$$

$$y_0 + \frac{y_1}{1+r} = C_0\left(1 + \frac{1}{(1+r)(1-\beta)}\right)$$

$$C_0^* = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(1+r)(1-\beta)}\right)} \left[y_0 + \frac{y_1}{1+r} \right]$$

$$C_1^* = \frac{1}{(1-\beta)\left(1 + \frac{1}{(1+r)(1-\beta)}\right)} \left[y_0 + \frac{y_1}{1+r} \right]$$

4.2. Ejercicio

Considere un individuo que vive dos periodos $t = 0, 1$ y cuyas preferencias se pueden representar mediante la función $u(c_0, c_1) = c_0 c_1$, donde c_t representa el consumo en el periódo t. Su dotación consiste en un ingreso de \$100 en $t = 0$ y nada en $t = 1$. Además, existe un mercado de crédito que permite prestar (ahorrar en $t = 0$) o pedir prestado (endeudarse en $t = 0$) a la tasa de interés $r = 10\,\%$.

1. ¿Cuál será el nivel de consumo de este indivuo en cada periódo? Plantee el problema de maximización correspondiente y resuélvalo mostrando su gráfico (sea cuidadoso al graficar).

2. Suponga ahora que en $t = 0$ este individuo tiene la posibilidad de invertir en uno de los siguientes dos proyectos (mutuamente excluyentes):

$$Proyecto\,1: \quad g(x) = 10X^{\frac{1}{2}}$$

$$Proyecto\,2: \quad g(x) = 20X^{\frac{1}{4}}$$

   donde por X de inversión en $t = 0$ el proyecto entregará $g(x)$ en $t = 1$. Ambos proyectos son perfectamente divisibles.

   ¿Cuál proyecto escogerá? ¿Cuál será el monto de la inversión y el nivel de consumo de este individuo en cada periódo? Explique intuitivamente su resultado, mostrando la situación en un gráfico.

Solución:

$Y_0 = 100$

$r = 0{,}1$

$Y_0 = C_0 + \frac{C_1}{1{,}1}$

$\mathcal{L} = C_0 C_1 + \lambda\left(Y_0 - C_0 - \frac{C_1}{1{,}1}\right)$

$\mathcal{L}_{C_0}: \ C_1 - \lambda = 0$

$\mathcal{L}_{C_1}: \ C_0 - \lambda \cdot \frac{1}{1.1} = 0$

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{\frac{1}{1.1}} = 1.1$$

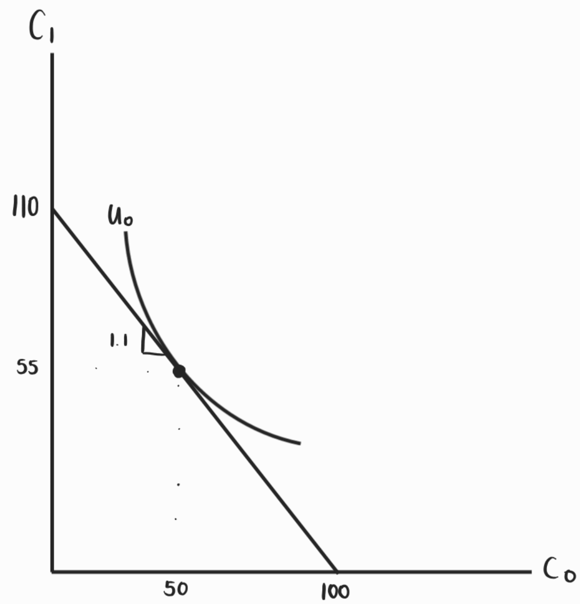
$\Rightarrow C_1 = 1.1\, C_0$

$Y_0 = C_0 + C_0$

$Y_0 = 2C_0$

$C_0 = 50 \Rightarrow C_1 = 55$

$S_0 = 50$



2)

Proyecto 1

$g(x) = 10x^{\frac{1}{2}}$

$Y_0 = 100$

$Y_0 = C_0 + S_0$

C_1 va a ser mis retornos sobre lo que invertí

$C_1 = 10 S_0^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{C_1^2}{100} = S_0$

Proyecto 2

$g(x) = 20x^{\frac{1}{4}}$

$Y_0 = 100$

$Y_0 = C_0 + S_0$

C_1 va a ser mis retornos sobre lo que invertí

$C_1 = 20 S_0^{\frac{1}{4}}$

$\left(\frac{C_1}{20}\right)^4 = S_0$

$$\max \; U(c_0, c_1)$$

s.a

$$y_0 = c_0 + S_0$$

$$\frac{c_1^2}{100} = S_0$$

$$\mathcal{L}: c_0 c_1 + \lambda\left(y_0 - c_0 - \frac{c_1^2}{100}\right)$$

$$\mathcal{L}_{c_0}: c_1 - \lambda = 0$$

$$\mathcal{L}_{c_1}: c_0 - \frac{2\lambda c_1}{100} = 0$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{100}{2c_1}$$

$$\frac{c_1^2}{50} = c_0$$

$$y_0 = c_0 + \frac{c_1^2}{100}$$

$$y_0 = c_0 + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{c_1^2}{50}}_{c_0}$$

$$100 = \frac{3}{2} c_0$$

$$c_0 = \frac{200}{3} \Rightarrow S_0 = \frac{100}{3}$$

$$c_1 = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$\max \; U(c_0, c_1)$$

s.a

$$y_0 = c_0 + \left(\frac{c_1}{20}\right)^4$$

$$\mathcal{L}: c_0 c_1 + \lambda\left[y_0 - c_0 - \left(\frac{c_1}{20}\right)^4\right]$$

$$\mathcal{L}_{c_0}: c_1 - \lambda = 0$$

$$\mathcal{L}_{c_1}: c_0 - \lambda \cdot \frac{4c_1^3}{20^4} = 0$$

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{20^4}{4c_1^3}$$

$$\frac{c_1^4}{20^4} = \frac{c_0}{4}$$

$$y_0 = c_0 + \frac{c_1^4}{20^4}$$

$$100 = c_0 + \frac{c_0}{4}$$

$$100 = \frac{5}{4} c_0$$

$$\frac{400}{5} = c_0$$

$$c_0 = 80 \Rightarrow S_0 = 20$$

$$c_1 \approx 42{,}3$$

$$U\left(c_0 = \frac{200}{3}, c_1 = \frac{100}{\sqrt{3}}\right) \approx 3849 \quad > \quad U(c_0 = 80, c_1 = 42) = 3360$$

proyecto 1 $\succ$ proyecto 2

4.3. Ejercicio

Una persona con una expectativa de vida hasta el periodo n tiene una función de utilidad intertemporal igual a:

$$U(c_1, \ldots, c_n) = min\,\{c_1, \ldots, c_n\}$$

1. Si esta persona cuenta con un ahorro de A colones en el periodo actual (periodo 0) y nada en el resto de los periodos, ¿cuál sería el consumo óptimo en el periodo asumiendo que la tasa de interés es igual a r?

2. Suponga que esta persona no desea trabajar, encuentre una fórmula que muestre cuánto tendría que ser su ahorro hoy para mantener su senda óptima de consumo hasta su expectativa de vida, asumiendo que la tasa de interés es igual a 10 %.

$$U(c_0,\ldots,c_n) = \text{mín}\{c_0,\ldots,c_n\}$$

$$A = \sum_{i=0}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

$$C_i = C_j \Rightarrow C_j \Rightarrow \frac{A}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(1+r)^i}}$$

b) $r = 0{,}1$

$$S_0 = A - C_0 \Rightarrow S_0 = A - \frac{A}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1{,}1^i}}$$

5. Mercado de trabajo

5.1. Ejercicio

Juan valora el consumo de bienes (x) y ocio (h). Sus preferencias están representadas mediante la función $U = x\,h$. Él dispone de 100 horas para el ocio o el trabajo (L), de modo que su restricción de tiempo es de la forma $h + L = 100$. Además, dispone de un ingreso no salarial de \$500, y recibe un salario de w por hora. El precio de los bienes es $p = 1$.

1. Encuentre la curva de oferta de trabajo óptima de Juan en función del salario.

2. Encuentre el salario de reserva, explicando claramente a qué corresponde este concepto.

3. Suponga que ahora si Juan trabaja, su tiempo total disponible para el ocio y trabajo cae a 80 horas (gasta 20 horas en traslado al trabajo, lo que no constituye ocio ni trabajo). ¿Es su nuevo salario de reserva mayor o menor que el anterior? Demuestre su respuesta.

$T = 100$

$$\max_{x,h} \; u(x,h) \quad s.a \quad T = L + h \;\wedge\; x = wL + 500$$

$$\max_{x,h} \; u(x,h) \quad s.a \quad T = L + h \;\wedge\; x = w(T-h) + 500$$

$$\mathcal{L}: x \cdot h + \lambda(x - wT + wh - 500)$$

$$\mathcal{L}_x: h + \lambda = 0$$

$$\mathcal{L}_h: x + \lambda w = 0$$

$$\frac{x}{h} = w \Rightarrow x = wh$$

$$x = w(T-h) + 500$$

$$2wh = wT + 500$$

$$h = \frac{T}{2} + \frac{250}{w} \Rightarrow L = \frac{T}{2} - \frac{250}{w}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{Tw}{2} + 250$$

Si $T = 100$

$$h = 50 + \frac{250}{w} \quad , \quad x = 50w + 250 \quad , \quad L = 50 - \frac{250}{w}$$

Salario de reservo es un w' tal que $L = 0$

$$\Rightarrow 0 = L = 50 - \frac{250}{w'}$$

$$50 = \frac{250}{w'}$$

$$w' = 5$$

3) Si $L > 0 \Rightarrow T' = T - 20$

Así, $$L=\frac{(T-20)}{2}-\frac{250}{w}=\frac{T'}{2}-\frac{250}{w}$$

Nuevo salario reservo es un w'' tal que nuevamente $L=0$

$$0=L=\frac{T'}{2}-\frac{250}{w''}$$

$$\frac{250}{w''}=\frac{T'}{2}\Rightarrow w''=\frac{500}{T'}$$

Dado que $T'=80 \Rightarrow w''=6{,}25$

Note que $w''>w'$

6. Medidas del bienestar

6.1. Ejercicio

Un individuo tiene la siguientes preferencias por el bien x_1 y x_2:

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Se sabe que ayer el individuo tenía un ingreso de $m = 100$ y se enfrentaba a unos precios igual a $p_1 = p_2 = 1$. Hoy, lo único que varió fue que el precio del bien 1 bajó a $p_1^{'} = 0{,}5$.

1. Calcule la variación compensatoria ante dicho cambio.

2. Calcule la variación equivalente ante dicho cambio.

3. Calcule la variación en el excedente del consumidor marshalliano.

Solución:

$$TMS_{12} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$x_1(m,\vec{P}) = \frac{m}{2P_1} \quad \wedge \quad x_2(m,\vec{P}) = \frac{m}{2P_2}$$

$$x_1(\bar{u},\vec{P}) = \left(\frac{\bar{u}P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad x_2(\bar{u},\vec{P}) = \left(\frac{\bar{u}P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v(m,\vec{P}) = \frac{m^2}{4P_1P_2} \quad \wedge \quad G(\bar{u},\vec{P}) = 2\left(\bar{u}P_1P_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Situación 0 (punto A)

$x_1^0 = 50 = x_2^0$

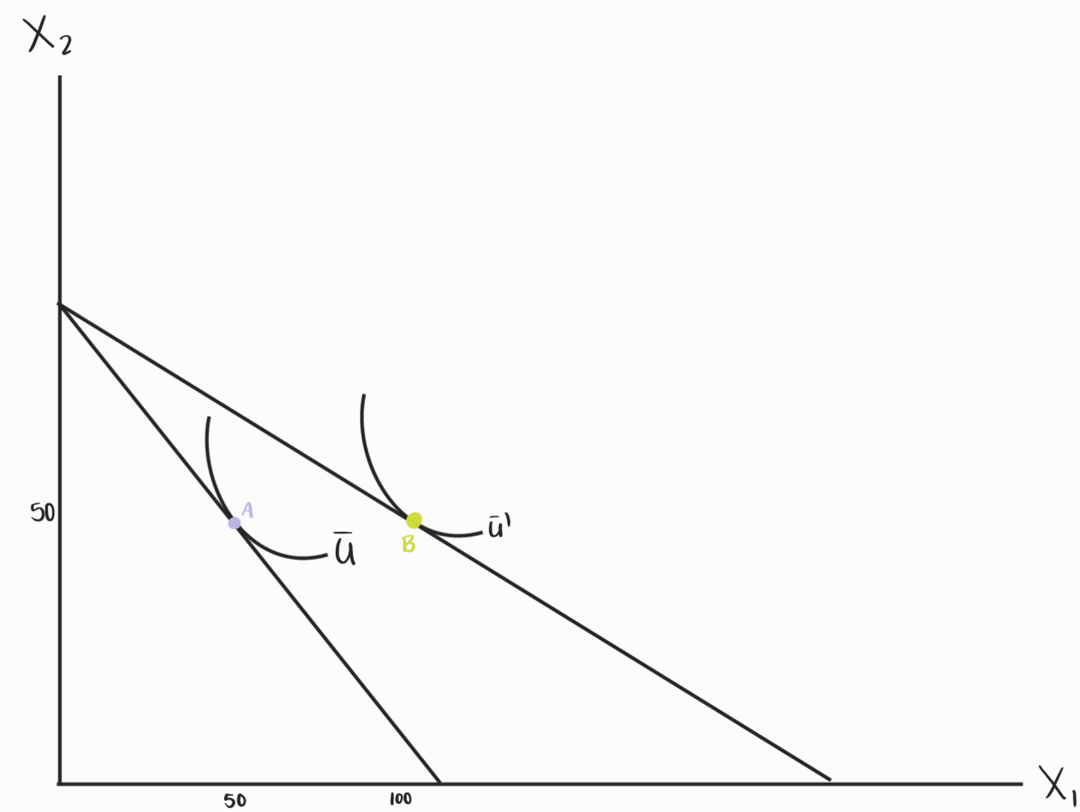
$V^0 = 50^2 = \bar{u}$

$G_0^* = 100$

Situación 1 (punto B)

$x_1^1 = 100 \wedge x_2^1 = 50$

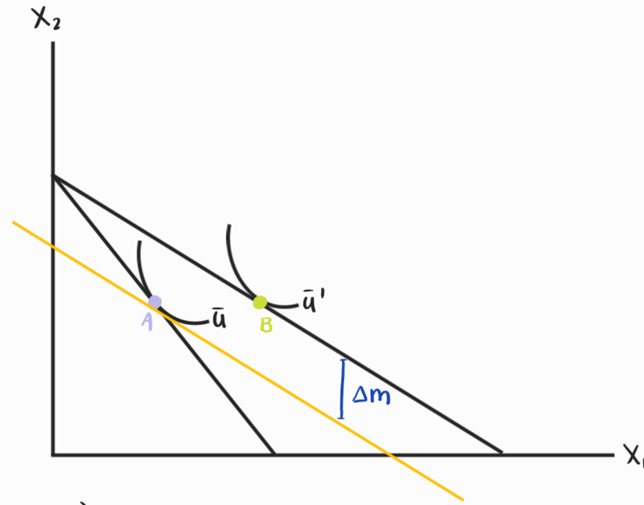
$V^1 = 2 \cdot 50^2 = \bar{u}^1 \wedge G_1^* = 100$



VC:

Δm para que $u = \bar{u}$ a $\vec{P}'$.

$$\Delta m = G(\vec{P}', u') - G(\vec{P}', u)$$
$$= G(P, u) - G(P', u)$$
$$= \int_{P'}^{P} x_1(\vec{P}, u)\, dp_1$$

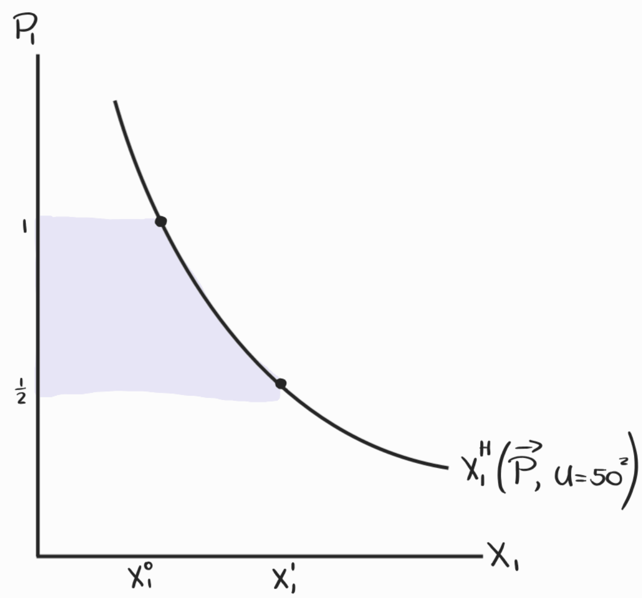


$$VC = G(p_1 = p_2 = 1,\ u = 50^2) - G(p_1 = \tfrac{1}{2},\ p_2 = 1,\ u = 50^2)$$

$$\Delta m = 100 - 50\sqrt{2} \approx 29{,}29$$

Otra forma

$$VC = \int_{P'}^{P} x_1^H(\vec{P}, \bar{u})\, dp_1$$
$$= \int_{P'}^{P} \left(\frac{uP_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{2}} dp_1$$
$$= (\bar{u}p_2)^{\frac{1}{2}} \int_{0,5}^{1} \frac{1}{P_1^{\frac{1}{2}}}\, dp_1$$
$$= (\bar{u}p_2)^{\frac{1}{2}} \left[2P_1^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_{0,5}^{1}$$
$$= 50 \cdot 2 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 29{,}29$$



Tercera forma

$$V(m, \vec{P}) = \frac{m^2}{4P_1P_2}$$

$$V_0 = \frac{m^2}{4} \quad \wedge \quad V = \frac{m^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{m^2}{2}$$

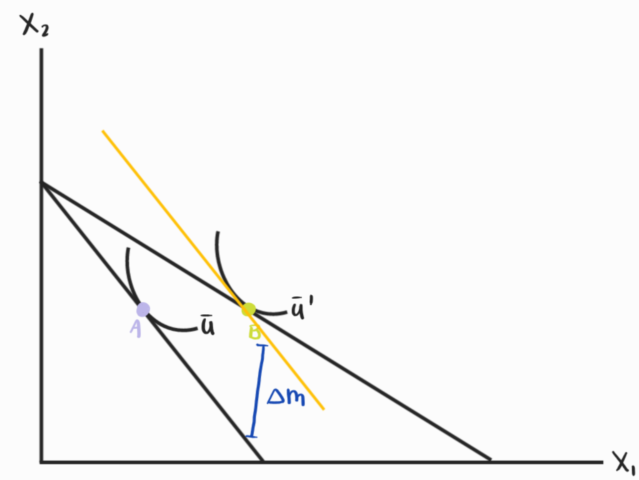
$$\frac{m^2}{4} = \frac{(m-VC)^2}{2}$$

Con $m=100$

$$VC = 29,29$$

VE:

Δm para que $u=\bar{u}'$ a $\vec{P}$



$$VC = G(\vec{P}, \bar{u}') - G(\vec{P}', \bar{u}')$$

$$= \int_{P'}^{P} X_1(\vec{P}, \bar{u})\, dp_1$$

$$G(\bar{u}, \vec{P}) = 2(\bar{u} P_1 P_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$VC = G(p_1 = p_2 = 1,\ \bar{u}' = 2\cdot 50^2) - G(p_1 = 0.5,\ p_2 = 1,\ \bar{u}' = 2\cdot 50^2)$$

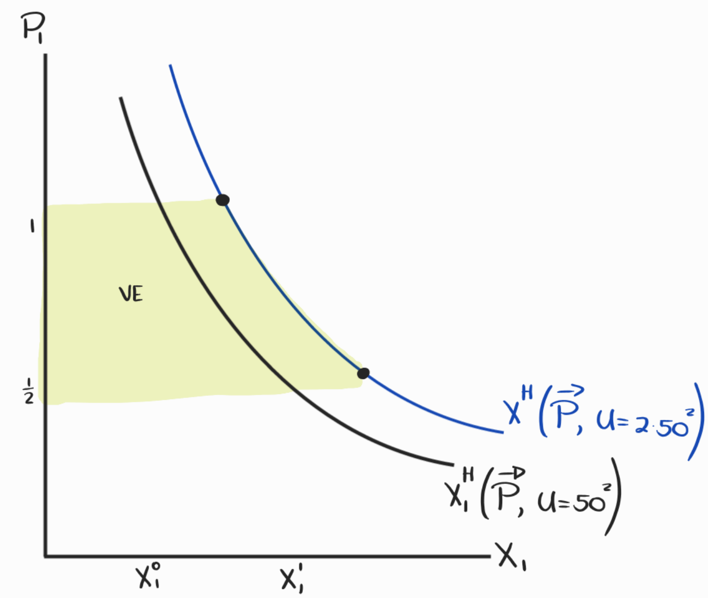
$$= 100\sqrt{2} - 100 \approx 41,42$$

Otra forma

$$= \int_{P'}^{P} X_1^H(\vec{P}, \bar{u}')\, dp_1$$

$$= (\bar{u}' p_2)^{\frac{1}{2}} \int_{0,5}^{1} \frac{1}{P_1^{\frac{1}{2}}}\, dp_1$$

$$= \sqrt{2}\cdot 50 \cdot 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \approx 41,42$$



Dado que $E.I > 0 \Rightarrow VE > VC$

Tercera forma

$$V(m,\vec{P}) = \frac{m^2}{4P_1P_2}$$

$$V_0 = \frac{m^2}{4} \quad \wedge \quad V = \frac{m^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{m^2}{2}$$

$$\frac{(m+VE)^2}{4} = \frac{m^2}{2}$$

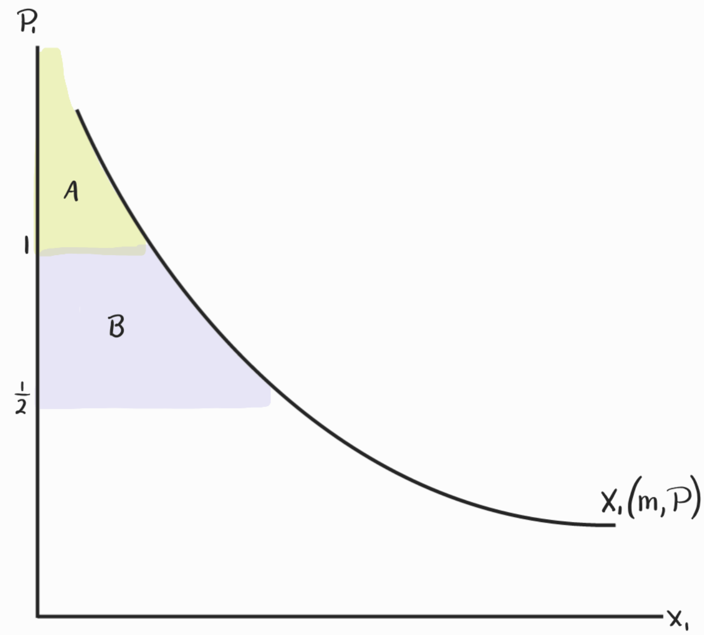
Si $m = 100 \Rightarrow VE = 41{,}42$

ΔECM

ECM cuando $p_1 = 1$: A

ECM cuando $p_1 = \frac{1}{2}$: $A+B$

ΔECM: $A+B-A = B$



$$\Delta ECM = \int_{P'}^{P} X_1(m,\vec{P})\, dp_1$$

$$X_1(m,\vec{P}) = \frac{m}{2P_1}$$

$$= \frac{m}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} p_1^{-1}\, dp_1$$

$$= \frac{m}{2}\left[\ln(1) - \ln\tfrac{1}{2}\right]$$

$$\Delta ECM = 50\ln 2 \approx 34{,}66$$

6.2. Ejercicio

Una persona consume dos bienes cuyos precios son igual a 1 y posee un ingreso de 100. El consumidor tiene una función de utilidad igual a:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$$

Para los siguientes incisos determine sus respuestas considerando el bien x_1.

1. Determine el Excedente del Consumidor Verdadero (ECV).
2. Determine la Variación Compensatoria (VC).
3. Determine la Variación Equivalente (VE).
4. Determine el Excedente del Consumidor Marshalliano (ECM).
5. Determine una relación entre sus respuestas y justifique.

Solución:

$TMS_{1,2} = x_2 = \frac{p_1}{p_2}$

$x_1(m,\vec{p}) = \frac{m}{p_1} - 1$

$x_1(u,\vec{p}) = u - \ln p_1 + \ln p_2$

$v(m,\vec{p}) = \frac{m}{p_1} - 1 + \ln p_1 - \ln p_2$

$G(u,\vec{p}) = p_1 [u - \ln p_1 + \ln p_2 + 1]$

Situación inicial (sol. de esquina)

Si $x_1 = 0 \Rightarrow p_1'' = m \Rightarrow p_1'' = 100$

$x_1 = 0 \wedge x_2 = 100 \Rightarrow u_0 = \ln 100$

Situación final

$x_1 = 99 \wedge x_2 = 1 \Rightarrow u_1 = 99$

1)

$\ln 100 = 99 + \ln x_2' \Rightarrow x_2' = \frac{100}{e^{99}}$

$ECV = m_0 - p_2 x_2' - p_1 x_1 = 100 - \frac{100}{e^{99}} \cdot 1 - 99 \cdot 1 \approx 1$

2)

$VC = m - G(u_0, p_1 = p_2 = 1) = 100 - (\ln 100 + 1) = 94{,}39$

3)

$V.E = G(u_1, p_1 = 100, p_2 = 1) - m = 100(99 - \ln 100)$

4)

$ECM = \int_1^{100} x_1(m, p_1, p_2) = \left[m \ln p_1 - p_1 \right]_1^{100} = 100 \ln 100 - 100 + 1 = 100 \ln 100 - 99$

6.3. Ejercicio

Considere un individuo cuyas preferencias se pueden representar como: $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ donde x_1 y x_2 son bienes que se compran en el mercado, y cuyos precios son $p_1 = p_2 = 1$. La variable x_3 es un índice de calidad del aire que respira. Mientras más lejos esté la vivienda de la zona industrial mejor es la calidad del aire que respira. Así, si d es la distancia entre la vivienda del individuo y la zona industrial, sabemos que x3 = 100d.

El individuo recibe todos los meses un ingreso de $1,500, pero debe pagar inmediatamente el monto que gasta en el arriendo de su vivienda, p_v. Luego, su ingreso disponible para la compra de x_1 y x_2 es $m = 1500 - p_v$.

Suponga que este individuo puede elegir su lugar de residencia, y que el arriendo (precio de la vivienda) es $p_v = 10d$ (es decir, las viviendas que están más lejos de la zona industrial tienen un precio más alto).

1. Encuentre la máxima utilidad que puede alcanzar este individuo dados los precios que enfrenta. Ayuda: el individuo maximiza utilidad escogiendo $x_1, x_2 \wedge d$.

2. Suponga ahora que el precio de la vivienda se duplica, pasando a ser $p_v = 20d$. Calcule el cambio en el bienestar asociado a este cambio en el precio de la vivienda, usando la variación compensatoria. Explique la intuición de su procedimiento.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} U = X_1 X_2 X_3 \\ P_1 = P_2 = 1 \\ X_3 = 100d \\ m = 1500 - pv \\ pv = 10d \end{array}\right\} \begin{array}{l} U = 100d X_1 X_2 \\ m = 1500 - 10d \end{array}$$

$$\max_{d, X_1, X_2} U \quad \text{s.a} \quad 1500 - 10d = X_1 P_1 + X_2 P_2 \Rightarrow 1500 = P_1 X_1 + P_2 X_2 + 10d$$

$$\mathcal{L} = 100d X_1 X_2 + \lambda\left(1500 - P_1 X_1 - P_2 X_2 - 10d\right)$$

$$\text{CPO} \begin{cases} \mathcal{L}_d = 100 X_1 X_2 - 10\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_{X_1} = 100d X_2 - \lambda P_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{X_2} = 100d X_1 - \lambda P_2 = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = 1500 = P_1 X_1 + P_2 X_2 + 10d \end{cases}$$

$$\frac{1\cancel{0}0 X_1 \cancel{X_2}}{10\cancel{0}d \cancel{X_2}} = \frac{10}{P_1} \Rightarrow X_1 = \frac{10d}{P_1}$$

$$\frac{1\cancel{0}0 \cancel{X_1} X_2}{1\cancel{0}0d \cancel{X_1}} = \frac{10}{P_2} \Rightarrow X_2 = \frac{10d}{P_2}$$

Tomando $P_1 = P_2 = 1$

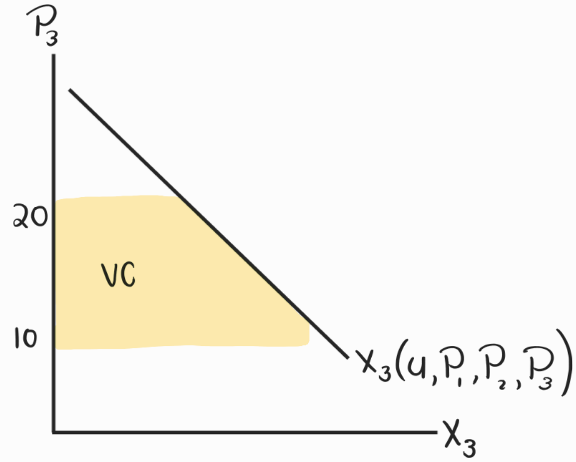
$$X_2 = 10d \wedge X_1 = 10d$$

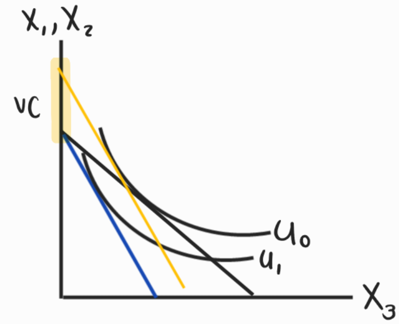
$$1500 = 10d + 10d + 10d \Rightarrow 1500 = 30d \Rightarrow d = \frac{150\cancel{0}}{3\cancel{0}} = 50$$

$$\Rightarrow X_2 = 500 = X_1 \quad \Rightarrow U_0 = 100 \cdot 50 \cdot 500 \cdot 500 = 5000 \cdot 500^2$$

2)

$pv' = 20d$





$$VC = \int_{10}^{20} x_3(u, P_1, P_2, P_3)\, dP_v = \int_{10}^{20} d(u, P_1, P_2, P_3)\, dP_3$$

$$U = x_1 x_2 x_3$$

$$u = 100d \left(\frac{P_v d}{P_1}\right)\left(\frac{P_v d}{P_2}\right)$$

$$u = 100 d^3 \frac{P_v^2}{P_1 P_2}$$

$$d^H = \left[\frac{u}{10^2} \cdot \frac{P_1 P_2}{P_v^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$d^H = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{P_v^{\frac{2}{3}}}$$

$$VC = \int_{10}^{20} \frac{u^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{P_v^{\frac{2}{3}}}\, P_v = \frac{u^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{P_v^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Bigg|_{10}^{20} \right]$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} \left(3 \cdot 10^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot 20^{\frac{1}{3}}\right) \approx 389{,}88$$

Otra forma

$$VC = G^*(P_1, P_2, P_3', \bar{u}_0) - G^*(P_1, P_2, P_3, \bar{u}_0)$$

$$G = P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_3$$

Se tenía:

$$X_1 = \frac{P_v d}{P_1} \quad \wedge \quad X_2 = \frac{P_v d}{P_2} \quad \wedge \quad d^H = \left[\frac{\bar{u}}{10^2} \cdot \frac{P_1 P_2}{P_v^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow X_1^H = \left[\frac{\bar{u}}{10^2} \cdot \frac{P_v P_2}{P_1^2}\right]^{\frac{1}{3}} \quad \wedge \quad X_2^H = \left[\frac{\bar{u}}{10^2} \cdot \frac{P_v P_1}{P_2^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$G^* = P_1 \left[\frac{\bar{u}}{10^2} \cdot \frac{P_v P_2}{P_1^2}\right]^{\frac{1}{3}} + P_2 \left[\frac{\bar{u}}{10^2} \cdot \frac{P_v P_1}{P_2^2}\right]^{\frac{1}{3}} + P_v \left[\frac{\bar{u}}{10^2} \cdot \frac{P_1 P_2}{P_v^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Considerando $P_1 = P_2 = 1$

$$G^* = \frac{3\bar{u}^{\frac{1}{3}}}{10^{\frac{2}{3}}} \cdot P_3^{\frac{1}{3}}$$

$$G^*(\bar{u}_0, P_1 = 1, P_2 = 1, P_3) \approx 696{,}24\, P_v^{\frac{1}{3}}$$

$$VC = G^*(P_1, P_2, P_3', \bar{u}_0) - G^*(P_1, P_2, P_3, \bar{u}_0) = 389{,}88$$

6.4. Ejercicio

Un consumidor presenta una función de utilidad igual a $U(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$, y posee un ingreso de 400 y $(p_1, p_2) = (4, 1)$. Para los siguientes incisos determine sus respuestas considerando el bien x_1.

1. Determine la variancia compensatoria.
2. Determine la variancia equivalente.
3. Determine el excedente del consumidor verdadero.
4. Determine el excedente del consumidor marshalliano.
5. Determine la relación entre las medidas del bienestar según sus respuestas y justifique.

Solución:

$$U = 2x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$TMS_{1,2} = \frac{2x_1^{-\frac{1}{2}}}{x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 = \frac{p_1^2}{4p_2^2} x_1$$

$$m = p_1x_1 + \frac{p_1^2}{4p_2} x_1 \Rightarrow m = x_1\left(p_1 + \frac{p_1^2}{4p_2}\right) \Rightarrow m = x_1\left(\frac{4p_2p_1 + p_1^2}{4p_2}\right)$$

$$x_1^M = \frac{4mp_2}{4p_2p_1 + p_1^2} \quad , \quad x_2^M = \frac{p_1^{\cancel{2}}}{\cancel{4}p_2^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{4}m\cancel{p_2}}{\cancel{p_1}(4p_2 + p_1)} = \frac{mp_1}{p_1p_2 + 4p_2^2}$$

$$U = 2x_1^{\frac{1}{2}} + \frac{p_1}{2p_2} x_1^{\frac{1}{2}} \Rightarrow U = x_1^{\frac{1}{2}}\left(2 + \frac{p_1}{2p_2}\right) \Rightarrow U = x_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4p_2 + p_1}{2p_2}\right)$$

$$\Rightarrow x_1^H = \frac{4p_2^2 U^2}{(4p_2 + p_1)^2} \quad \wedge \quad x_2^H = \frac{p_1^2}{\cancel{4p_2^2}} \cdot \frac{\cancel{4p_2^2} U^2}{(4p_2 + p_1)^2} = \frac{Up_1^2}{(4p_2 + p_1)^2}$$

$$V = 2\cdot\left(\frac{4mp_2}{4p_2p_1 + p_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{mp_1}{p_1p_2 + 4p_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$G^* = \frac{4p_2^2 p_1 U^2}{(4p_2 + p_1)^2} + \frac{p_1^2 p_2 U^2}{(4p_2 + p_1)^2}$$

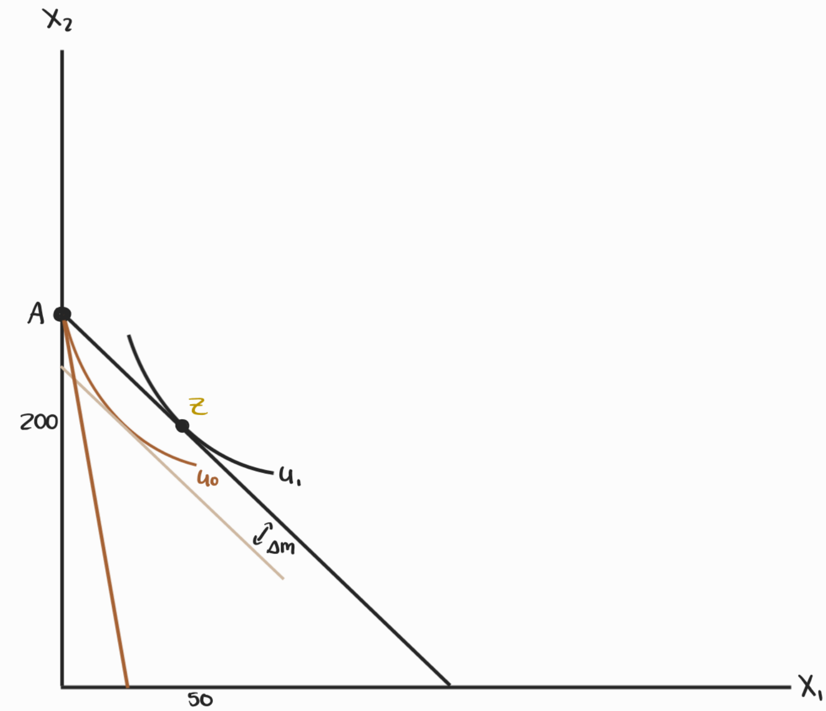
Situación inicial: $p_1 \to \infty$, $p_2 = 1$, $m = 400$

$x_1 = 0$, $x_2 = 400$, $U_0 = 20$

Situación final: $p_1 = 4$, $p_2 = 1$, $m = 400$ (punto z)

$x_1 = 50$, $x_2 = 200$, $U_1 = 20\sqrt{2} \approx 28{,}284$

1) V.C



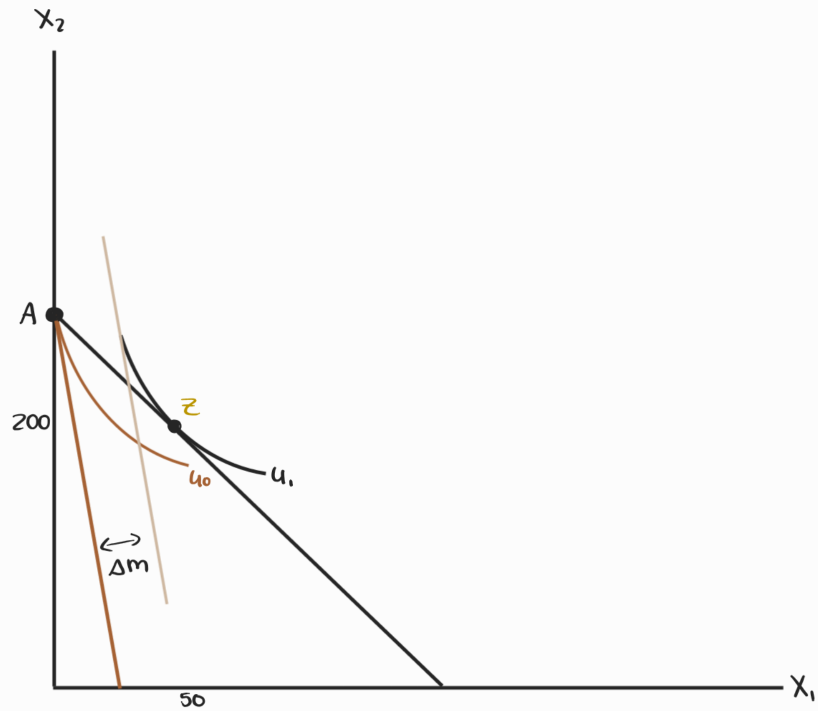
$$VC = G(u_0, p_1 \to \infty, p_2 = 1) - G(u_0, p_1 = 4, p_2 = 1)$$

Dado que $G(u_0, p_1 \to \infty, p_2 = 1) = G(u_1, p_1 = 4, p_2 = 1) = m$

$$VC = \underbrace{G(u_0, p_1 \to \infty, p_2 = 1)}_{m} - G(u_0, p_1 = 4, p_2 = 1)$$

$$VC = 400 - 200 = 200$$

2) V.E



$$V.E = G(u_1, p_1 \to \infty, p_2 = 4) - G(u_0, p_1 \to \infty, p_2 = 1)$$

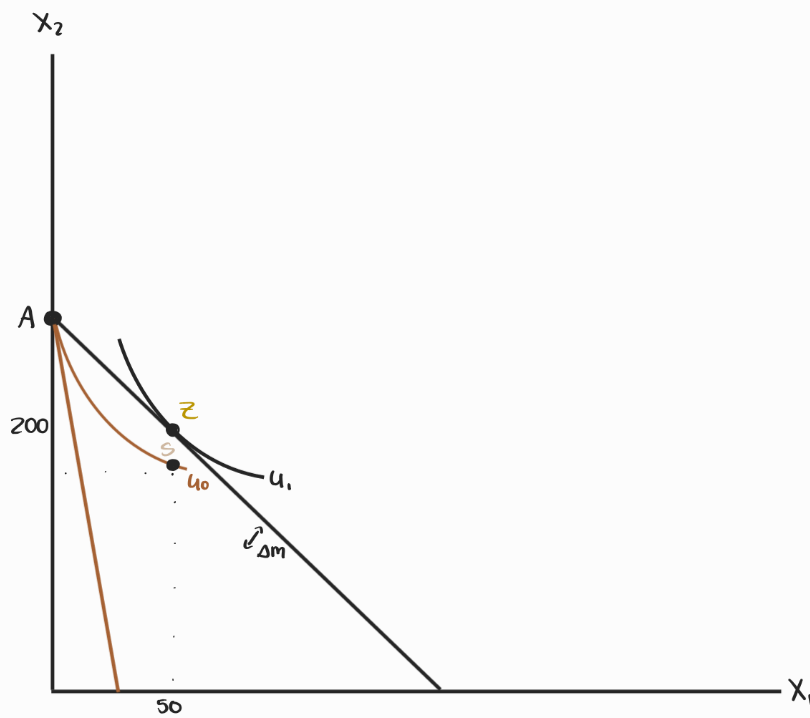
Dado que $G(u_0, p_1 \to \infty, p_2 = 1) = G(u_1, p_1 = 4, p_2 = 1) = m$

$$V.E = \underbrace{G(u_1, p_1 \to \infty, p_2 = 4)}_{\text{Este sería el caso en el que } x_1 = 0} - \underbrace{G(u_0, p_1 \to \infty, p_2 = 1)}_{400}$$

Entonces $u_1 = 20\sqrt{2} = x_2'^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 400 \cdot 2 = x_2' = 800 \Rightarrow$ lo que tendría que gastar sería $p_2 x_2' = 800$

$V.E = 800 - 400 = 400$

3) ECV :



$$20\sqrt{2} = U_1 = 2\cdot 50^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$$

$$U_0 = 20 = 2\cdot 50^{\frac{1}{2}} + x_2'^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_2' = 34{,}31$$

$$ECV = \overline{m} - p_2 x_2' - p_1 \overline{x}_1$$

$$ECV = 400 - 34{,}31 - 4\cdot 50 = 165{,}69$$

4) ECM

$$ECM = \int_{p_1}^{\infty} x_1^m \, dp_1 = \int_4^{\infty} \frac{4mp_2}{4p_2p_1 + p_1^2} = \int_4^{\infty} \frac{4\cdot 400}{4p_1 + p_1^2} = 1600\left[\int_4^{\infty} \frac{1}{4p_1+p_1^2}\right] = 1600\left[\frac{1}{4}\left(\ln x - \ln(x+4)\right)\right]_4^{\infty}$$

$$ECM = 400\left[\ln\left(\frac{x}{x+4}\right)\right]_4^{\infty} = -400\ln\left(\frac{4}{8}\right) \approx 277{,}26$$

5)

Note que x_1 es un bien normal ya que $\frac{\partial x_1^m}{\partial m} > 0$.

Entonces se cumple que:

$$VE > ECM > VC > ECV$$

6.5. Ejercicio

Una persona tiene un ingreso igual a 1 000 000 de colones, con el cual puede financiar el arriendo de una vivienda (x_1) de 400 metros cuadrados o comprar 10 diarios de comida (x_2). Esta persona tiene una función de utilidad igual a $U(x_1, x_2) = x_1+$, donde x_1 son la cantidad de metros cuadrados y x_2 son la cantidad de diarios de comida. Una empresa desea contratar a esa persona, pero debe relocalizarla en otra región en donde el costo del alquiler es el doble. La empresa está considerando ofrecer un bono mensual para que el trabajador se traslade.

1. Calcule el monto mínimo del bono (más barato para la empresa) que podría lograr convencer a esta persona a trasladarse de sitio.

2. ¿Cuál debería ser el monto máximo del bono que la empresa debería ofrecer para convencer definitivamente a esta persona a trasladarse de sitio?

7. Preferencias Reveladas

7.1. Ejercicio

Usted tiene la siguiente información parcial sobre las compras de un consumidor (él sólo consume 2 bienes): ¿Qué rango de valores puede adquirir α para que usted concluya que:

	Año 1		Año 2	
	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
Bien 1	100	100	120	100
Bien 2	100	100	α	80

Cuadro 1: Canastas de consumo del agente

1. este comportamiento contradice el Axioma Débil de Preferencias Reveladas (ADPR)?
2. la canasta del año 1 es revelada como preferida sobre la canasta del año 2?
3. la canasta del año 2 es revelada como preferida sobre la canasta del año 1?
4. el bien 1 es un bien inferior a algún precio para este consumidor? (asuma que se cumple con el ADPR)
5. el bien 2 es un bien inferior a algún precio para este consumidor? (asuma que se cumple con el ADPR)

1)

$$A=\begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix} \quad \wedge \quad B=\begin{pmatrix}120\\\alpha\end{pmatrix}$$

$$m_1^A = 100\cdot 100 + 100\cdot 100 = 2\cdot 100^2$$

$$m_2^A = 100\cdot 100 + 100\cdot 80 = 100\cdot 180$$

$$m_2^B = 120\cdot 100 + 80\cdot \alpha$$

$$m_1^B = 120\cdot 100 + 100\cdot \alpha$$

caso 1: $A \succ B$

$$m_2^A > m_2^B$$

$$\Rightarrow 100\cdot 180 > 120\cdot 100 + 80\cdot\alpha$$

$$75 > \alpha$$

caso 2: $B \succ A$

$$m_1^B > m_1^A$$

$$\Rightarrow 120\cdot 100 + 100\cdot\alpha > 2\cdot 100^2$$

$$\alpha > 80$$

$\therefore$ Si $75 < \alpha \leq 80$ se rompe el ADPR

2) Es el caso 1

3) Es el caso 2

4) Sería on bien inferior si $(\uparrow m \wedge \downarrow X_1) \vee (\downarrow m \wedge \uparrow X_1)$

Esta $\uparrow X_1$ entonces para que sea un bien interior tuvo que haber $\downarrow m$.

Para que $\downarrow m$ entonces $m_1^A > m_2^B$

$$\Rightarrow 2\cdot 100^2 > 120\cdot 100 + 80\cdot\alpha$$

$$100 > \alpha$$

5)

Caso 1: $\alpha < 100 \wedge \uparrow m$

$\uparrow m \Rightarrow m_2^B > m_1^A \Rightarrow 120 \cdot 100 + 80 \cdot \alpha > 2 \cdot 100^2 \Rightarrow \alpha > 100 \quad \Rightarrow\Leftarrow$ no ocurre

Caso 2: $\alpha > 100 \wedge \downarrow m$

$\downarrow m \Rightarrow m_2^B < m_1^A \Rightarrow 120 \cdot 100 + 80 \cdot \alpha < 2 \cdot 100^2 \Rightarrow \alpha < 100 \quad \Rightarrow\Leftarrow$

Además, en el inciso 4 se dijo que si $\alpha < 100$ entonces X_1 es inferior. Además, si $\alpha < 100 \Rightarrow \downarrow m \Rightarrow$ necesariomente X_2 tendría que ser un bien normal pues no se podría dar que ambos sean bienes inferiores a la vez con sólo dos bienes.

7.2. Ejercicio

Se conoce las compras que un individuo hace en tres periódos distintos:

	Ayer		Hoy		Mañana	
Bien	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
Bien 1	4	1	**x**	3	4	1
Bien 2	5	1	5	1	**y**	2
Bien 3	**z**	3	2	1	2	1

Cuadro 2: Canasta de consumo del individuo para distintos periódos

1. Si el individuo tiene la siguiente relación de preferencia $A \succ H \quad \wedge \quad H \succ M$, determine si existe posibilidad de que se rompa el ADPR. Donde A es ayer, H es hoy y M es mañana.
2. Determine si se puede romper el AFPR si $A \succ H \quad \wedge \quad H \succ M$.
3. Demuestre que no se rompe el ADPR y el AFPR para unos parámetros x, y y z que satisfagan sus respuestas anteriores.

$$A=\begin{pmatrix}4\\5\\z\end{pmatrix} \quad , \quad H=\begin{pmatrix}x\\5\\z\end{pmatrix} \quad \wedge \quad M=\begin{pmatrix}4\\y\\z\end{pmatrix}$$

$G_A^1 = 9+3z \qquad G_H^1 = 11+x \qquad G_M^1 = 10+y$

$G_A^2 = 17+z \qquad G_H^2 = 7+3x \qquad G_M^2 = 14+y$

$G_A^3 = 14+z \qquad G_H^3 = 12+x \qquad G_M^3 = 6+2y$

1) Dos caso a analizar:

Caso $A \succ H$:

$$G_H^2 = 7+3x < G_A^2 = 17+z$$

$$\Rightarrow x < \frac{10+z}{3}$$

Caso $H \succ M$

$$G_H^3 = 12+x > G_M^3 = 6+2y$$

$$\Rightarrow x > 2y-6$$

Entonces, se cumple el ADPR si $\quad 2y-6 < x < \frac{10+z}{3}$

2)

$A \dot{\succ} M$

Se tienen que cumplir con las condiciones de arribo, y además,

$$G_A^3 = 14+z > G_M^3 = 6+2y$$

$$2y-6 < z+2$$

3)

Así, las condiciones en conjunto serían

$$2y-6<x<\frac{10+z}{3} \quad \wedge \quad 2y-6<z+2$$

Si $y=1$, por ejemplo, entonces z podría ser 5 y así, necesariamente

$$-4<\underbrace{0\leq}_{}x<5$$

por condición de no negatividad de x

Tome $x=3$, la tabla sería:

	Ayer		Hoy		Mañana	
Bien	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
Bien 1	4	1	**3**	3	4	1
Bien 2	5	1	5	1	**1**	2
Bien 3	**5**	3	2	1	2	1

$G_A^1=24 \qquad G_H^1=14 \qquad G_M^1=11$

$G_A^2=22 \qquad G_H^2=16 \qquad G_M^2=15$

$G_A^3=19 \qquad G_H^3=15 \qquad G_M^3=8$

Note que:

Periódo 1: $A \overset{d}{\succ} H \quad \wedge \quad A \overset{d}{\succ} M$

Periódo 2: $H \overset{d}{\succ} M$

Periódo 3: No se revela nada.

Dado que $A \overset{d}{\succ} H \wedge H \overset{d}{\succ} M \Rightarrow A \overset{i}{\succ} M$, justamente la segunda relación del periódo 1 lo comprueba.

Así, no se rompe el ADPR ni el AFPR.

7.3. Ejercicio

Considere una economía compuesta por dos consumidores, 1 y 2, cuyas preferencias se representan mediante las funciones:

$$u(x_{1i}, x_{2i}) = x_{1i}^{\alpha_i} x_{2i}^{1-\alpha_i} \qquad \text{con} \qquad \alpha_1 = 0,2 \qquad \wedge \qquad \alpha_2 = 0,8$$

1. Derive las demandas individuales y la demanda agregada por los bienes 1 y 2.

2. Inicialmente ambos consumidores tienen un ingreso idéntico de $m_1 = m_2 = 100$, y enfrentan los precios $p_1 = p_2 = 1$. Después, el ingreso del consumidor 1 es $m_1 = 180$, y el ingreso del consumidor 2 es $m_2 = 20$ (de modo que el ingreso total sigue siendo $M = 200$). Muestre que si p_1 cayera (junto con ocurrir la redistribución del ingreso), la cantidad total consumida también podría caer, a pesar de que el ingreso total no ha cambiado (muestre explícitamente para qué niveles de p_1 ocurriría eso). ¿Significa esto que el bien 1 es un bien Giffen? Fundamente.

3. Suponga ahora que, junto a la redistribución del ingreso descrita en el inciso anterior, los precios de los bienes 1 y 2 cambian a $p_1 = 0,8$ y $p_2 = 1,2$ respectivamente. ¿Se cumple en este caso el axioma débil de preferencias reveladas a nivel agregado (es decir, considerando la cantidad total demandada de ambos bienes y el ingreso total)? ¿Qué relación tiene esto con la existencia de un agente representativo?

a)

$$x_{ij} = \alpha_{ij} \frac{m_j}{p_i} \qquad (i \equiv \text{bienes} \wedge j \equiv \text{individuos})$$

$$X_i \equiv \sum_{j=1}^{2} x_{ij} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} \frac{m_j}{p_i} = \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} m_j$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} = 20 \\ x_{12} = 80 \\ x_{21} = 80 \\ x_{22} = 20 \end{array}\right\} X_1 = 100 = X_2$$

b)

Si $p_1' = 0{,}9 \wedge m_1 = 180 \wedge m_2 = 20$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}' = 40 \\ x_{12}' = 17{,}\bar{7} \end{array}\right\} X_1' = 57{,}\bar{7} \qquad (\text{Note que } X_1' < X_1)$$

$$X_1 = \frac{1}{p_1}(0{,}2m_1 + 0{,}8m_2)$$

$$X_1 = \frac{1}{p_1} \cdot 100$$

$$X_1' = \frac{1}{p_1'} \cdot (36 + 16) = \frac{1}{p_1'} \cdot 52$$

$$X_1' < X_1 \Rightarrow \frac{52}{p_1'} < \frac{100}{p_1}$$

$$p_1 = 1 \Rightarrow \frac{52}{p_1'} < 100 \Rightarrow p_1' > \frac{52}{100}$$

No es un bien Giffen, lo que sucede es que la caída en el ingreso individual del individuo con mayor preferencia por x_1 contrarresta el efecto de la caída en p_1.

c)

$$X_i = \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} m_j$$

Cesta original

Para la demanda agregada

$$\left.\begin{array}{l} X_i = \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} m_j \\ X_1 = X_2 = 100 \end{array}\right\} M = 200$$

Cesta en (c)

$$\left. m_1 = 180 \wedge m_2 = 20 \right\} M'' = 200$$

$$p_1'' = 0{,}8 \quad \wedge \quad p_2'' = 1{,}2$$

$$X_1'' = 65$$

$$X_2'' = 123{,}\bar{3}$$

Note que en $t=1$ ambas canastas eran alcanzables se y prefirió la de $(100, 100)$ por lo que esta se revela directamente preferida. En $t=2$ ambas canastas eran alcanzables y preferí la $(65, 123.\bar{3})$ por lo que se rompe el axioma débil de preferencia revelada.

7.4. Ejercicio

Una economía está compuesta por dos individuos cuyas preferencias son

$$U(x_{1j}, x_{2j}) = x_{1j}^{\alpha_i} x_{2j}^{1-\alpha_i} \qquad ; \qquad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 \qquad \wedge \qquad 0 < \alpha_i < 1$$

Inicialmente el ingreso de la economía se divide en dos partes iguales entre los individuos y los precios iniciales son iguales a 1. Suponga que el precio del bien 1 se reduce a 0,8 y que el ingreso se redistribuye para que el consumidor 1 obtenga el 75 % de ingreso de la economía y el 2 elresto.

Para las siguientes preguntas usted debe calcular la demanda agregada de cada uno de los bienes.

1. Encuentre el valor de α_1 que hace que el consumo agregado del bien x_1 no cambie con la redistribución del ingreso y la caída en el precio descritas.

2. Asuma que $\alpha_1 = 0,2$, si la caída en el precio y la redistribución del ingreso descritas ocurren conjuntamente con un incremento en P_2 a 1,2; calcule el consumo agregado de cada bien e indique si ello rompe con el ADPR.

$$X_{ij} = \alpha_j \frac{m_j}{p_i}$$

$$X_1 = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \frac{m_j}{p_1} \Rightarrow X_1 = \frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j m_j$$

$$X_1 = \frac{1}{p_1} \left[(1-\alpha_2) m_1 + \alpha_2 m_2 \right]$$

a)

$$X_1 = \frac{M}{2} \quad \wedge \quad X_1' = \frac{10}{8} \left(\frac{3}{4} (1-\alpha_2) M + \frac{1}{4} \alpha_2 M \right) = \frac{15}{16} M - \frac{5}{8} \alpha_2 M$$

α_2 tal que $X_1 = X_1'$

$$\Rightarrow \frac{M}{2} = \frac{15}{16} M - \frac{5}{8} \alpha_2 M \Rightarrow \frac{5}{8} \alpha_2 = \frac{7}{16} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{7}{10} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{10}$$

b)

$$X_i = \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j m_j$$

Situación original: $(p_1, p_2) = (1, 1) \wedge (m_1, m_2) = \left(\frac{M}{2}, \frac{M}{2} \right)$

$$X_1 = \frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j m_j = \frac{M}{2} = X_2 = \frac{1}{p_2} \sum_{j=1}^{2} (1-\alpha_j) m_j$$

Situación final: $(p_1, p_2) = \left(\frac{8}{10}, \frac{12}{10} \right) \wedge (m_1, m_2) = \left(\frac{3M}{4}, \frac{M}{4} \right)$

$$X_1' = \frac{10}{8} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j m_j = \frac{10}{8} \left[\alpha_1 \cdot \frac{3}{4} M + (1-\alpha_1) \frac{1}{4} M \right] = \frac{10}{8} \left[\frac{1}{4} M + \frac{1}{2} \alpha_1 M \right] = \frac{5}{16} M + \frac{5}{8} \alpha_1 M$$

$$X_2' = \frac{10}{12} \sum_{j=1}^{2} (1-\alpha_j) m_j = \frac{10}{12} \left[(1-\alpha_1) \frac{3M}{4} + \alpha_1 \frac{M}{4} \right] = \frac{5}{8} M - \frac{5}{12} \alpha_1 M$$

Si $\alpha_1 = 0{,}2$

$$X_1' = \frac{7}{16} M \quad \wedge \quad X_2' = \frac{13}{24} M$$

Note que en $t=1$ ambas canastas eran alcanzables y preferí la primera por lo que esta se revela directamente preferida. En $t=2$ ambas canastas eran alcanzables y preferí la segunda por lo que se rompe el axioma débil de preferencia revelada.

8. Teoría del productor

8.1. Ejercicio

Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
2. Obtenga las demandas no condicionadas para cada factor de producción.
3. Obtenga la curva de oferta de la empresa.
4. Determine los costos marginales y costos medios que tiene la empresa.
5. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.
6. Determine las economías a escala que presenta la empresa.
7. Encuentre la elasticidad de sustitución de los factores de producción.

1)

$$\min_{z_i} \left\{\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right\} \quad \text{s.a} \quad q=\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{L}: \sum_{i=1}^{n} w_i z_i + \lambda\left[q-\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\mathcal{L}_{z_j}: w_j-\frac{1}{2}\lambda z_j^{-\frac{1}{2}}=0$$

$$\mathcal{L}_{z_K}: w_K-\frac{1}{2}\lambda z_K^{-\frac{1}{2}}=0$$

$$\mathcal{L}_{\lambda}: q-\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{z_K}{z_j}=\left(\frac{w_j}{w_K}\right)^2$$

$$q=\sum_{K=1}^{n}\left(\frac{w_j}{w_K}\right)z_j^{\frac{1}{2}}$$

$$q=w_j z_j^{\frac{1}{2}} \sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}$$

$$z_j^{c}=\frac{q^2}{w_j^2\left[\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}\right]^2}$$

$$\max_{z_i} \left\{pq(z_1,\dots,z_n)-\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right\}$$

2)

$$\max_{z_i} \left\{p\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}-\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right\}$$

$$\mathcal{L}_{z_j}: p\cdot\frac{1}{2}z_j^{-\frac{1}{2}}-w_j=0 \Rightarrow z_j^{NC}=\frac{p^2}{4w_j^2}$$

Curva de oferta

$$CT^*(q,\vec{w})=\sum_{j=1}^{n}\frac{q^2}{w_j\left[\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}\right]^2}$$

$$= \frac{q^2}{\left[\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}\right]^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}}$$

$$CT^*(q, \vec{\omega}) = \frac{q^2}{\left[\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}\right]}$$

$$CM = \frac{2q}{\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}}$$

3)

$$P = \frac{2q}{\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}}$$

Otra forma

$$q = q(z_1^{NC}, \ldots, z_n^{NC})$$

$$q = \sum_{j=1}^{n} \frac{p}{2w_j} \Rightarrow q = \frac{p}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j} \Rightarrow p = \frac{2q}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j}}$$

4)

$$CM = \frac{2q}{\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}} \quad \wedge \quad CMe = \frac{q}{\left[\sum_{K=1}^{n} w_K^{-1}\right]}$$

5)

$$q(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda z_j)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{\frac{1}{2}} z_j^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{n} z_j^{\frac{1}{2}}$$

$\therefore$ Rendimientos decrecientes a escala

Otra forma

$$\varepsilon_{q,z_i} = \frac{\partial Q}{\partial z_i} \cdot \frac{z_i}{Q} = \frac{1}{2} z_i^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z_i}{Q} = \frac{1}{2} z_i^{\frac{1}{2}} Q^{-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q,z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} z_i^{\frac{1}{2}} \cdot Q^{-1} = \frac{1}{2} Q^{-1} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}}_{Q} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \varepsilon_{PT} < 1 \Rightarrow$ rendimientos decrecientes a escala

6)

$$CMe = \frac{q}{\left[\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}\right]}$$

$\frac{\partial CMe}{\partial q} > 0 \Rightarrow$ deseconomías a escala

Otra forma

$\frac{CMg}{CMe} = 2 > 1 \Rightarrow$ deseconomías a escala

Dado que la función es homogénea entonces los rendimientos y las economías coinciden.

7)

$$TMS_{kj} = \frac{z_k^{\frac{1}{2}}}{z_j^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \ln(TMS) = \ln\left[\left(\frac{z_k}{z_j}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z_k}{z_j}\right)$$

$$\Rightarrow 2\ln TMS = \ln\left(\frac{z_k}{z_j}\right)$$

$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{z_k}{z_j}\right)}{\partial \ln TMS_{jk}} = 2$$

Otra forma

$$\sigma = \frac{\partial\left(\frac{z_k}{z_j}\right)}{\partial TMS} \cdot \frac{TMS}{\frac{z_k}{z_j}}$$

$$TMS_{kj} = \frac{z_k^{\frac{1}{2}}}{z_j^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow TMS^2 = \frac{z_k}{z_j}$$

$$\sigma = 2TMS \cdot \frac{TMS}{\frac{z_k}{z_j}} = \frac{2\,TMS^2}{\frac{z_k}{z_j}} = 2$$

8.2. Ejercicio

Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1, \cdots, z_n) = z_1^{\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^{n} (z_i - 1)^{\frac{1}{2}}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
2. Encuentre la elasticidad insumo-producto y elasticidad insumo total.
3. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.
4. Determine las economías a escala que presenta la empresa.

$$TM_{1j} = \frac{\frac{1}{2} z_1^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^{n} (z_i - 1)^{1/2}}{\frac{1}{2} z_1^{\frac{1}{2}} (z_j - 1)^{-1/2} \prod_{i \neq j}^{n} (z_i - 1)^{1/2}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} z_1^{-\frac{1}{2}} (z_j - 1)^{1/2} \cancel{\prod_{i \neq j}^{n} (z_i - 1)^{1/2}}}{\cancel{\frac{1}{2}} z_1^{\frac{1}{2}} (z_j - 1)^{-1/2} \cancel{\prod_{i \neq j}^{n} (z_i - 1)^{1/2}}} = \frac{z_j - 1}{z_1} = \frac{w_1}{w_j} \Rightarrow z_j - 1 = \frac{w_1}{w_j} z_1$$

$$q = z_1^{\frac{1}{2}} \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_1}{w_j} z_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q = z_1^{\frac{1}{2}} z_1^{\frac{n-1}{2}} \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_1}{w_j} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1} \right)^{\frac{1}{2}} = z_1^{\frac{n}{2}}$$

$$z_1 = q^{\frac{2}{n}} \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$z_j = q^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{w_1}{w_j} \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1} \right)^{\frac{1}{n}} + 1$$

$$\varepsilon_{PT} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q,z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial z_i} \cdot \frac{z_i}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{PM_i}{PMe_i}$$

$$\varepsilon_{PT} = \frac{PM_1}{PMe_1} + \sum_{j=2}^{n} \frac{PM_j}{PMe_j}$$

$$PM_1 = \frac{1}{2} z_1^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^{n} (z_i - 1)^{1/2}$$

$$PMe_1 = z_1^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^{n} (z_i - 1)^{1/2}$$

$$\varepsilon_{q,z_1} = \frac{1}{2}$$

$$PM_j = \frac{1}{2} z_1^{\frac{1}{2}} (z_j - 1)^{-1/2} \prod_{i \neq j}^{n} (z_i - 1)^{1/2}$$

$$PMe_j = z_j^{-1} \cdot z_1^{\frac{1}{2}} (z_j - 1)^{\frac{1}{2}} \prod_{i \neq j}^{n} (z_i - 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_{q,z_j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z_j}{z_j - 1}$$

$$\varepsilon_{PT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} \frac{z_j}{z_j - 1} > 1 \Rightarrow \text{rendimientos crecientes a escala}$$

5) $$CT(q, w_1, \dots, w_n) = q^{\frac{2}{n}} w_1 \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}} + (n-1) q^{\frac{2}{n}} \cdot w_1 \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}} + \sum_{j=2}^{n} w_j$$

$$CT(q, w_1, \dots, w_n) = n q^{\frac{2}{n}} w_1 \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}} + \sum_{j=2}^{n} w_j$$

$$CMg = 2 q^{\frac{2-n}{n}} \cdot w_1 \cdot \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$CMe = n q^{\frac{2}{n}-1} w_1 \prod_{j=2}^{n} \left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}} + q^{-1} \sum_{j=2}^{n} w_j$$

$$\text{Si} \begin{cases} n = 1 & \text{economías decrecientes a escala } (CMg > CMe) \\ n \geq 2 & \text{economías crecientes a escala } (CMe > CMg) \end{cases}$$

8.3. Ejercicio

Considere una empresa que presenta la siguiente función de producción:

$$q(z_1 \ldots, z_n) = min\{z_1, \ldots, z_n\}^{\frac{1}{\rho}} \qquad , \qquad \rho > 1$$

1. Obtenga las demandas condicionadas de todos los insumos.
2. Determine los rendimientos a escala y las economías de escala.
3. Obtenga la oferta de la empresa y la oferta de la industria considerando que hay m empresas idénticas.
4. Determine la elasticidad de sustitución entre todos los insumos.
5. Determine la elasticidad de sustitución cruzada y propia de las demandas condicionadas e interprete.

1)

$z_i = z_j$

$$\Rightarrow Q = z_i^{\frac{1}{\rho}} \Rightarrow z_i^c = q^{\rho}$$

2)

$$q = \lambda^{\frac{1}{\rho}} \cdot \min\{z_1, \dots, z_n\}^{\frac{1}{\rho}}$$

$\rho > 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\rho} < 1 \Rightarrow$ rendimientos decrecientes y deseconomías.

3)

$$CT = q^{\rho} \sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$CMg = \rho q^{\rho-1} \sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$P = \rho q^{\rho-1} \sum_{i=1}^{n} w_i \Rightarrow q = \left(\frac{P}{\rho \sum_{i=1}^{n} w_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

Oferta de la industria

$$Q = m\left(\frac{P}{\rho \sum_{i=1}^{n} w_i}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

4) En el óptimo $\frac{z_i}{z_j} = 1$

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial \ln\left(\frac{z_i}{z_j}\right)}{\partial \ln\left(\frac{w_j}{w_i}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{ji} = \eta_{ij} - \eta_{jj} = 0$$

5) $\eta_{ii}^c = 0 \quad \wedge \quad \eta_{ij}^c = 0$

Al ser una función de complementos la sensibilidad de la demanda ante cambios en los precios de los factores es nula.

8.4. Ejercicio

Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1,\cdots,z_n)=\left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}}\right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
2. Obtenga la función de costos mínimos de la empresa.
3. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.
4. Determine la elasticidad producto total.
5. Determine las economías a escala que presenta la empresa.
6. Encuentre la elasticidad de sustitución de los factores de producción.
7. Demuestre que la demanda condicionada es homogénea de grado 0.

$$PM_i = Q \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{-1} \cdot z_i^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

1)

$$TMS_{jk} = \frac{z_k^{\frac{1}{\varepsilon}}}{z_j^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{w_j}{w_k} \Rightarrow z_k = \left(\frac{w_j}{w_k}\right)^{\varepsilon} z_j$$

$$\Rightarrow Q = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{w_j}{w_k}\right)^{\varepsilon-1} \cdot z_j^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \Rightarrow Q = w_j^{\varepsilon} z_j \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

$$\Rightarrow z_j(Q,\vec{w}) = \frac{Q}{w_j^{\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}}$$

2)

$$CT(Q,\vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q\, w_i}{w_i^{\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \Rightarrow CT(Q,\vec{w}) = \frac{Q}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \sum_{i=1}^{n} w_i^{1-\varepsilon}$$

3)

$$Q(\lambda z_1,\dots,\lambda z_n) = \left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda z_i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \lambda\left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

La función es homogénea grado $1 \Rightarrow$ rendimientos constantes $\Rightarrow$ economías constantes a escala.

4)

$$\varepsilon_{PT} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q,z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q\cdot\left[\sum z_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{-1} \cdot z_i^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\frac{Q}{z_i}} = \cancel{\left[\sum z_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}} = 1 \Rightarrow$$ rendimientos constantes a escala

5)

$$CMe = CM = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i^{1-\varepsilon}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \Rightarrow \varepsilon_{CT,q} = 1 \Rightarrow$$ economías constantes a escala.

6)

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial \ln \frac{z_k}{z_j}}{\partial \ln TMS_{jk}} = \varepsilon$$

7)

$$z_j(Q,\lambda\vec{\omega}) = \frac{Q}{(\lambda\omega_j)^{\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} = \frac{Q}{(\lambda\omega_j)^{\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} = \frac{Q}{\cancel{\lambda^{\varepsilon}}\,\omega_j^{\varepsilon}\left[\cancel{\lambda^{-\varepsilon}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} = z(Q,\vec{\omega})$$

8.5. Ejercicio

La función de producción de una empresa está en función de n insumos según la siguiente ecuación:

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(z_i - 1) \qquad \text{con} \qquad z_1 > 0 \qquad \wedge \qquad z_i > 1 \qquad \forall i = 2, \ldots, n$$

1. Encuentre las demandas condicionadas y no condicionadas de todos los tipos de insumos.
2. Encuentre la elasticidad de sustitución entre todos los tipos de insumos.

$$TMS_{1j} = \frac{1}{\frac{1}{z_j - 1}} = \frac{\omega_1}{\omega_j} \Rightarrow z_j^c = \frac{\omega_1}{\omega_j} + 1$$

$$Q = z_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln \frac{\omega_1}{\omega_j} \Rightarrow z_1^c = Q - (n-1)\ln \omega_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln \omega_j$$

La demanda no condicionada para z_1 no existe.

$$P \cdot \frac{1}{z_j - 1} = \omega_j \Rightarrow z_j^{NC} = \frac{P}{\omega_j} + 1$$

2)

$$\sigma_{1j} = \frac{\partial\left(\frac{z_j}{z_1}\right)}{\partial TMS_{1j}} \cdot \frac{TMS_{1j}}{\left(\frac{z_j}{z_1}\right)} = \eta_{j1}^c - \eta_{11}^c$$

$$\sigma_{j1} = \frac{\partial\left(\frac{z_1}{z_j}\right)}{\partial TMS_{j1}} \cdot \frac{TMS_{j1}}{\left(\frac{z_1}{z_j}\right)} = \eta_{1j}^c - \eta_{jj}$$

$$\sigma_{Kj} = \frac{\partial\left(\frac{z_j}{z_K}\right)}{\partial TMS_{Kj}} \cdot \frac{TMS_{Kj}}{\left(\frac{z_j}{z_K}\right)} = \eta_{jK} - \eta_{KK}$$

$$z_j^c = \frac{\omega_1}{\omega_j} + 1 \quad \wedge \quad z_1^c = Q - (n-1)\ln \omega_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln \omega_j$$

$$\sigma_{1j} = \eta_{j1}^c - \eta_{11}^c = \frac{\omega_1}{\omega_j} \cdot z_j^{-1} + (n-1) z_1^{-1}$$

$$\sigma_{j1} = \eta_{1j} - \eta_{jj} = \frac{1}{z_1} + \frac{\omega_1}{\omega_j} z_j^{-1}$$

$$\sigma_{Kj} = \eta_{jK} - \eta_{KK} = \frac{\omega_1}{\omega_K} \cdot z_K^{-1}$$

8.6. Ejercicio

Considere una empresa que presenta la siguiente función de producción:

$$Q(z_1 \ldots, z_n) = min\{1z_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, nz_n^{\frac{1}{2}}\}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas de todos los insumos.
2. Determine los rendimientos a escala y las economías de escala.
3. Obtenga la oferta de la empresa y la oferta de la industria considerando que hay m empresas idénticas.
4. Determine la elasticidad de sustitución entre todos los insumos.

1) $j z_j^{\frac{1}{2}} = K z_K^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{z_j}{z_K} = \frac{K^2}{j^2}$

$q = j z_j^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow z_j^c = \frac{q^2}{j^2}$

2) $q(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \lambda^{\frac{1}{2}} q(z_1, \ldots, z_n) \Rightarrow h = \frac{1}{2} \Rightarrow$ rendimientos decrecientes y deseconomías.

3) $CT = q^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{j^2}$

$P = 2q \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{j^2}$

$$\underbrace{q = \frac{P}{2\sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{j^2}}}_{\text{oferta empresa}} \Longrightarrow \underbrace{Q = \frac{mP}{2\sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{j^2}}}_{\text{oferta industria}}$$

4)

$\sigma_{Kj} = \eta_{jK}^c - \eta_{KK}^c = 0$

Otra forma

$\frac{z_j}{z_K} = \frac{K^2}{j^2}$ (condición optimalidad)

$$\sigma_{Kj} = \frac{\partial \ln\left(\frac{z_j}{z_K}\right)}{\partial \ln\left(\frac{\omega_K}{\omega_j}\right)} = 0$$

8.7. Ejercicio

Una empresa posee la función de producción $Q(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i}$ con $0 < \alpha_i < 1$.

1. Encuentre los rendimientos a escala de la función de producción.
2. La curva de oferta de la empresa.
3. Las economías a escala de la empresa.
4. Si existen n empresas idénticas, obtenga la curva de oferta de la industria, asumiendo que no hay libre entrada de empresas a esa industria y que los costos de producción son constantes.

1)

$Q(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \lambda^h Q$ con $0<h<1$ (si $\alpha_i \neq \alpha_j \ \forall i,j$ entonces no es homogénea pero sigue habiendo rendimientos decrecientes a escala)

Otra forma

$$\varepsilon_{q,z_i} = \frac{\alpha_i z_i^{\alpha_i - 1}}{\frac{Q}{z_i}} = \frac{\alpha_i z_i^{\alpha_i}}{Q}$$

$\varepsilon_{PT} = \frac{1}{Q} \sum \alpha_i z_i^{\alpha_i}$ (Note que $\sum \alpha_i z_i^{\alpha_i} < Q$ porque $0<\alpha_i<1$) $\Rightarrow \varepsilon_{PT} < 1$.

2)

$$TMS_{jK} = \frac{\alpha_j z_j^{\alpha_j - 1}}{\alpha_K z_K^{\alpha_K - 1}} = \frac{\omega_j}{\omega_K}$$

$$z_j = \left[\frac{\alpha_K \omega_j}{\alpha_j \omega_K} z_K^{\alpha_K - 1}\right]^{\frac{1}{\alpha_j - 1}}$$

$$Q = \underbrace{\sum \left[\frac{\alpha_K \omega_j}{\alpha_j \omega_K} z_K^{\alpha_K - 1}\right]^{\frac{\alpha_j}{\alpha_j - 1}}}_{\text{Aquí se complica}}$$

Otra forma

$$P \alpha_j z_j^{\alpha_j - 1} = \omega_j$$

$$\Rightarrow z_j = \left(\frac{\omega_j}{P\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j - 1}}$$

$Q = \sum \left(\frac{\omega_j}{P\alpha_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_j - 1}}$ (oferta directa)

3)

Dado que $Q(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \lambda^h Q$ con $0<h<1$ entonces $\varepsilon_{CT,Q} > 1$ por lo que hay economías decrecientes a escala.

4)

$$nQ = n\sum \left(\frac{\omega_j}{P\alpha_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_j - 1}}$$

8.8. Ejercicio

Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1, \cdots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{n+1}}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
2. Obtenga las demandas no condicionadas para cada factor de producción.
3. Obtenga la función de costos mínimos de la empresa.
4. Si la empresa está en un mercado competitivo del bien que produce, determine la oferta de la empresa de ese bien y la función de ganancias.
5. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.
6. Determine las economías a escala que presenta la empresa.
7. Encuentre la elasticidad de sustitución de los factores de producción.
8. Utilice el lema de Shepard para comprobar que $\frac{\partial C(w_1, \cdots, w_n, Q)}{\partial w_j} = z_j(w_1, \cdots, w_n, Q)$.
9. Compruebe que se cumple la simetría de Hicks para las demandas condicionadas.
10. Demuestre que la demanda condicionada es homogénea de grado 0.
11. Obtenga la elasticidad propia y cruazada del precio-demanda condicionada.
12. Demuestre que se cumple que $\eta_{ii}^C + \eta_{ij}^C = 0$ **(en caso de n=2)** e interprete dicho resultado. **Si hay n factores su forma equivalente sería:** $\eta_{ii}^C + \sum_{k\neq i}^{n} \eta_{ik}^C = 0$
13. Demuestre que la elasticidad de sustitución de los factores también se puede determinar como $\sigma = \eta_{ij}^C - \eta_{ii}^C$.

    Importante este resultado porque para algunas funciones en particular sólo se va a poder calcular de esta forma, ver II parcial IS-2021
14. Determine la ecuación de Slutsky en términos propios e interprete sus resultados.
15. Determine la ecuación de Slutsky en términos cruzados e interprete sus resultados. **Tarea moral**

1)

$$TMS_{z_j,z_k} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{n+1}\right)} z_j^{-1} \cancel{\prod_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{n+1}}}}{\cancel{\left(\frac{1}{n+1}\right)} z_k^{-1} \cancel{\prod_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{n+1}}}} = \frac{z_k}{z_j} = \frac{w_j}{w_k}$$

$$Q = \prod_{k=1}^{n} \left(w_j z_j\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$Q = \left(w_j z_j\right)^{\frac{n}{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$z_j(Q,\vec{w}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$

2)

Demanda no condicionada

$$P \cdot PM_j = w_j$$

$$\Rightarrow P \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) z_j^{-1} \prod_{k=1}^{n} z_k^{\frac{1}{n+1}} = w_j$$

$$\Rightarrow P \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) z_j^{-1} \prod_{k=1}^{n} \left(w_j z_j\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}} = w_j$$

$$P \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) z_j^{-1} \left(w_j z_j\right)^{\frac{n}{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}} = w_j$$

$$z_j^{\frac{n}{n+1}-1} = \frac{1}{P} (n+1) w_j^{1-\frac{n}{n+1}} \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \quad \wedge \quad 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$z_j(P,\vec{w}) = \left(\frac{P}{n+1}\right)^{n+1} w_j^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{-1}$$

3)

$$C^*(Q,\vec{w}) = \sum_{j=1}^{n} \cancel{w_j} \cdot \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{\cancel{w_j}} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$

$$C^*(Q,\vec{w}) = n \cdot Q^{\frac{n+1}{n}} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$

4)

Rendimientos a escala

homogénea de grado $\frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow$ rendimientos decrecientes a escala $\Rightarrow$ deseconomías

6)

$\sigma = 1$

7)

$$C^*(Q, \vec{\omega}) = n \cdot Q^{\frac{n+1}{n}} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial w_1} = z_1^c = \cancel{\frac{1}{n}} \cdot \cancel{n}\, w_K^{-1} Q^{\frac{n+1}{n}} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}}$$

8)

$$z_j(Q, \vec{\omega}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\partial z_j}{\partial w_K} = \frac{1}{n} w_K^{-1} \cdot \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{\partial z_K}{\partial w_j} = \frac{1}{n} w_j^{-1} \cdot \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_K} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}}$$

9)

$$z_j(Q, \lambda \vec{\omega}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{\lambda w_j} \cdot \prod_{K=1}^{n} (\lambda w_K)^{\frac{1}{n}} = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{\cancel{\lambda} w_j} \cdot \cancel{\lambda} \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}}$$

10)

$$z_j(Q, \vec{\omega}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}}$$

$$\eta_{jj}^c = \frac{\partial z_j}{\partial w_j} \cdot \frac{w_j}{z_j} = \frac{\partial \ln z_j}{\partial \ln w_j}$$

$$\ln z_j = \left(\frac{n+1}{n}\right) \ln Q - \ln w_j + \frac{1}{n} \sum_{K=1}^{n} \ln w_K$$

$$\eta_{jj}^c = -1 + \frac{1}{n}$$

$$\eta_{jK}^c = \frac{1}{n}$$

11)

Teorema Euler

$$z_i(\lambda w_1, \dots, \lambda w_n, Q) = \lambda^0 z_i(\vec{w}, Q)$$

Derivo con respecto a λ

$$\frac{\partial z_i}{\partial w_1} w_1 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial w_n} \cdot w_n = 0$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial w_i} \cdot w_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial w_k} w_k = 0$$

$$\eta_{jj} + \sum_{k \neq j}^{n} \eta_{jk} = 0$$

$$-1 + \frac{1}{n} + \sum_{k \neq j}^{n} \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = -1 + \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 0$$

12)

$$\sigma = \eta_{jk}^{c} - \eta_{jj}^{c}$$

$$\sigma = 1 - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} = 1$$

13) Ecuación Slutsky

$$z_j(P, \vec{w}) = z_j(\vec{w}, Q(\vec{w}, P))$$

$$\frac{\partial z_j^{NC}}{\partial w_l} = \frac{\partial z_j^{c}}{\partial w_l} + \frac{\partial z_j}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial w_l}$$

$$z_j(P, \vec{w}) = \left(\frac{P}{n+1}\right)^{n+1} w_j^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{-1}$$

$$Q = \prod_{j=1}^{n} z_j^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow Q = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{P}{n+1}\right) w_j^{\frac{-1}{n+1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{-1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow Q = \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{-1}{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow Q = \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{i=1}^{n} w_i^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{-1}{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow Q = w_K^{\frac{-n}{n+1}} \cdot w_K^{\frac{-1}{n+1}} \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{i\neq K}^{n} w_K^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\prod_{j\neq K}^{n} w_j^{\frac{-1}{n+1}}\right]$$

Una vez simplificado, escribimos las 3 ecuaciones que ocupamos

$$\begin{cases} Q = w_K^{-1} \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{i\neq K}^{n} w_K^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\prod_{j\neq K}^{n} w_j^{\frac{-1}{n+1}}\right] \\ z_j(Q,\vec{w}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{\frac{1}{n}} \\ Z_j(P,\vec{w}) = \left(\frac{P}{n+1}\right)^{n+1} w_j^{-1} \cdot \prod_{K=1}^{n} w_K^{-1} \end{cases}$$

Cruzado

$$-w_K^{-1} \cdot z_j = \frac{1}{n} w_K^{-1} z_j + \left(\frac{n+1}{n}\right) \cancel{Q}^{-1} z_j \cdot -1 \cdot w_K^{-1} \cdot \cancel{Q}$$

$$= w_K^{-1} z_j \underbrace{\left[\frac{1}{n} - \frac{n+1}{n}\right]}_{\frac{1-n-1}{n} = -1}$$

$$-w_K^{-1} \cdot z_j = -w_K^{-1} z_j$$

8.9. Ejercicio

Considere una empresa que tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i=1}^{n}(z_i - \alpha_i) \qquad z_i > \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

1. ¿Qué tipo de rendimientos a escala presenta la función de producción?

2. Obtenga las demandas condicionadas para cada uno de los bienes.

3. Obtenga la curva de costos totales de la empresa óptima.

4. ¿Qué tipo de economías a escala presenta la función de producción?

5. Suponga que la empresa ahora es un monopolista y se enfrenta a una demanda de mercado dada por: $P = Q$, obtenga el precio y la cantidad que escoge el monopolista.

6. Demuestre que la demanda condicionada para cada uno de los bienes es homogénea de grado 0 en precios e interpréte su resultado.

1)

$$PM_i = \frac{Q}{z_i - \alpha_i} \quad \wedge \quad PMe_i = \frac{Q}{z_i}$$

$$\varepsilon_{Q,z_i} = \frac{z_i}{z_i - \alpha_i} \quad \wedge \quad \varepsilon_{PT} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q,z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{z_i-\alpha_i} > 1 \Rightarrow \text{rendimientos crecientes}$$

2)

$$TMS_{Kj} = \frac{\frac{Q}{z_K - \alpha_K}}{\frac{Q}{z_j - \alpha_j}} \Rightarrow \frac{z_j - \alpha_j}{z_K - \alpha_K} = \frac{\omega_K}{\omega_j} \Rightarrow z_j - \alpha_j = \frac{\omega_K}{\omega_j}(z_K - \alpha_K)$$

$$Q = \prod_{j=1}^{n} \frac{\omega_K}{\omega_j}(z_K - \alpha_K) \Rightarrow Q\prod_{j=1}^{n}\omega_j = \omega_K^n (z_K - \alpha_K)^n \Rightarrow z_K(Q,\vec{\omega}) = \frac{Q^{\frac{1}{n}}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{n}}}{\omega_K} + \alpha_K$$

3)
$$CT(Q,\vec{\omega}) = \underbrace{nQ^{\frac{1}{n}}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{n}}}_{\text{costo variable}} + \underbrace{\sum_{K=1}^{n}\alpha_K\omega_K}_{\text{costo fijo}}$$

4)

$$CMe = nQ^{\frac{1}{n}-1}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{Q}\sum_{K=1}^{n}\alpha_K\omega_K$$

$$\frac{\partial CMe}{\partial Q} = (1-n)Q^{\frac{1}{n}-2}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{Q^2}\sum_{K=1}^{n}\alpha_K\omega_K < 0 \Rightarrow \text{economías a escala}$$

5)

Monopolista

$$\max_{Q} \left\{ Q^2 - nQ^{\frac{1}{n}}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{n}} - \sum_{K=1}^{n}\alpha_K\omega_K \right\}$$

$$2Q - Q^{\frac{1}{n}-1}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{n}} = 0$$

$$2Q = Q^{\frac{1}{n}-1}\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{1}{n}} = 0$$

$$Q^{\frac{1}{n}-2} = 2\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{-1}{n}}$$

$$P = Q = \left[2\prod_{j=1}^{n}\omega_j^{\frac{-1}{n}}\right]^{\frac{n}{1-2n}}$$

6)

$$z_K(Q,\lambda\vec{\omega}) = \frac{Q^{\frac{1}{n}}\prod_{j=1}^{n}(\lambda\omega_j)^{\frac{1}{n}}}{\lambda\omega_K} + \alpha_K = \lambda^0 z_K^c$$

Si todos los precios aumenta en la misma proporción, la cantidad no cambia.

9. Monopolio, monopsonio y discriminación de precios

9.1. Ejercicio

Una empresa es monopolio en un mercado en donde la demanda de cada uno de sus consumidores se representa abajo. El costo de producción de la empresa es igual a $CT = \frac{4}{3}Q^{\frac{3}{2}}$ con $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.

$$q_i = \left(\frac{a}{ip_i}\right)^2$$

1. Encuentre la producción de la empresa y el precio de equilibrio si no puede discriminar entre consumidores.
2. Encuentre la producción de la empresa si discrimina en primer grado.
3. Encuentre la producción y el precio que cobra a cada consumidor si realiza discriminación de tercer grado y no existe posibilidad de arbitraje.

$$q_i = \left(\frac{a}{i p_i}\right)^2$$

a)

$$p_i = P \quad \forall i$$

$$q_i = \left(\frac{a}{iP}\right)^2 \Longrightarrow Q = \frac{a^2}{P^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} \Longrightarrow P = \frac{a}{\sqrt{Q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_{Q}\left\{\frac{a}{\sqrt{Q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Q - \frac{4}{3}Q^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\text{CPO: } \frac{a}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Q^{-\frac{1}{2}} - 2\sqrt{Q} = 0$$

$$Q = \frac{a}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \wedge \quad P = 2a^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

b)

$$q_i = \left(\frac{a}{i p_i}\right)^2 \Longrightarrow p_i = \frac{a}{i\sqrt{q_i}}$$

$$\max_{q_i, \forall i}\left\{\sum_{i=1}^{n}\int_0^{q_i}\frac{a}{i\sqrt{q_i}}\,dq_i - \frac{4}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\max_{q_i, \forall i}\left\{\sum_{i=1}^{n}2\frac{a}{i}\sqrt{q_i}\Big|_0^{q_i} - \frac{4}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\max_{q_i, \forall i}\left\{\sum_{i=1}^{n}2\frac{a}{i}\sqrt{q_i} - \frac{4}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\frac{a}{i\sqrt{q_i}} - 2Q^{\frac{1}{2}} = 0 \Longrightarrow q_i = \frac{a^2}{4i^2 Q}$$

$$\vdots$$

$$+ \overline{\qquad Q = \frac{a^2}{4Q}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}}$$

$$Q = \frac{a}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow q_i = \frac{a}{2i^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

c)

$$p_i = \frac{a}{i\sqrt{q_i}}$$

$$\max_{q_i,\forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{i\sqrt{q_i}} q_i - \frac{4}{3}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\frac{a}{2i\sqrt{q_i}} - 2Q^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow q_i = \frac{a^2}{4^2 i^2 Q}$$

$$\vdots$$

$$+ \overline{\qquad Q = \frac{a^2}{4^2 Q} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{a}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow q_i = \frac{a}{4 i^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow p_i = 2a^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

9.2. Ejercicio

Una única empresa provee su producción a n tipos de consumidores cada uno con una demanda inversa igual a $P_i = \frac{i}{\sqrt{q_i}}$. La empresa tiene un costo total igual a $\frac{1}{3}Q^{\frac{3}{2}}$. Encuentre el equilibrio de la empresa si:

1. Existe posibilidad de arbitraje sin costo.
2. No existe posibilidad de arbitraje.
3. La empresa puede hacer discriminación perfecta.
4. Ahora asumo que a este mercado ingresan m tipos de empresas idénticas al monopolista. Encuentre el equilibrio para las empresas si compiten por precios simultáneamente y existe oportunidad de arbitraje.

a)

No puede discriminar $p_i = p;\ \forall i = 1, \dots, n$

$$P = \frac{i}{\sqrt{q_i}} \Rightarrow q_i = \frac{i^2}{P^2} \Rightarrow Q = P^{-2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{P^2} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{Q}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}$$

$$\max_{Q} \left\{ P \cdot Q - CT(Q) \right\} = \left\{ \sqrt{Q} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} - \frac{1}{3} Q^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\frac{1}{2} Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} - \frac{1}{2} Q^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}$$

$$\Rightarrow P = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow q_i = \frac{i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}$$

b)

Puede discriminar

$$P_i = \frac{i}{\sqrt{q_i}} \quad \wedge \quad CT = \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\max_{q_i,\, \forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sqrt{q_i}} \cdot q_i - \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \Rightarrow \max_{q_i,\, \forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} i\sqrt{q_i} - \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i \right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

Una forma:

CPO:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} : \frac{i}{2} q_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} Q^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad (IM_i = CM)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial q_K} : \frac{K}{2} q_K^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} Q^{\frac{1}{2}} = 0$$

Combinando $\frac{\partial}{\partial q_i}$ con $\frac{\partial}{\partial q_K}$:

$$i q_i^{-\frac{1}{2}} = K q_K^{-\frac{1}{2}} \qquad (IM_i = IM_K)$$

$$i^{-2} q_i = K^{-2} q_K$$

$$q_i = \frac{i^2}{K^2} q_K$$

Utilizando $IM_i = CM_i$

$$K q_K^{-\frac{1}{2}} = \frac{q_K^{\frac{1}{2}}}{K}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q_K = K^2 \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow Q = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{K=1}^{n} K^2\right) = \left(\sum_{K=1}^{n} K^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow P_K = \frac{\cancel{K}}{\cancel{K}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{-\frac{1}{4}}}$$

Otra forma:

CPO:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} : \frac{i}{2} q_i^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} Q^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow q_i = \frac{i^2}{Q}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial q_K} : \frac{K}{2} q_K^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} Q^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow q_K = \frac{K^2}{Q}$$

$$+$$

$$Q = Q^{-1} \sum_{i=1}^{n} i^2 \Rightarrow Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}} \Rightarrow P_i = \left[\sum_{i=1}^{n} i^2\right]^{\frac{1}{4}}$$

c)

$$\max_{q_i,\ \forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \int_0^{q_i} \frac{i}{\sqrt{x}}\, dx - \frac{1}{3}\left(\sum q_i\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\max_{q_i,\ \forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} 2i\sqrt{x} \Big|_0^{q_i} - \frac{1}{3}\left(\sum q_i\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\max_{q_i,\ \forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} 2i\sqrt{q_i} - \frac{1}{3}\left(\sum q_i\right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\frac{i}{\sqrt{q_i}} - \frac{1}{2}\sqrt{Q} = 0 \Rightarrow \frac{2i}{\sqrt{q_i}} = \sqrt{Q} \Rightarrow q_i = \frac{4i^2}{Q}$$

$$\vdots$$

$$+ \overline{\qquad\qquad}$$

$$Q = \frac{4}{Q} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$Q = 2\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow q_i = \frac{2i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

d)

Cournot

empresa i

$$\max_{q_i} \left\{ \frac{q_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} - \frac{1}{3} q_i^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i} + \frac{1}{2} q_i \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^{-\frac{1}{2}}}{Q} - \frac{1}{2} q_i^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i} + \frac{1}{2} q_i \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} q_i^{\frac{1}{2}} \cdot Q = 0$$

Uno forma

Dado que los empresas son idénticas $\Rightarrow q_i = q_j \quad \forall\, i \neq j \quad \Rightarrow Q = (m+1) q_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}\cdot\left[(m+1)q_i\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}q_i\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}\cdot\left[(m+1)q_i\right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}q_i^{\frac{1}{2}}\cdot(m+1)q_i = 0$$

$$q_i^{\frac{1}{2}}\left[(m+1)\sum_{i=1}^{n} i^2\right]^{\frac{1}{2}} + q_i^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{2\sqrt{m+1}} - \frac{1}{2}q_i^{\frac{1}{2}}(m+1)q_i = 0$$

$$q_i = \frac{2\left[(m+1)\sum_{i=1}^{n} i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{\sqrt{m+1}}}{m+1} \Rightarrow Q = 2\left[(m+1)\sum_{i=1}^{n} i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{\sqrt{m+1}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{\sqrt{2\left[(m+1)\sum_{i=1}^{n} i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{\sqrt{m+1}}}}$$

Otra forma

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i} + \frac{1}{2}q_i\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}\cdot\left(\sum^{n} q_i\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}q_i^{\frac{1}{2}}\cdot Q = 0\\
&\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i} + \frac{1}{2}q_K\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}\cdot\left(\sum^{n} q_i\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}q_K^{\frac{1}{2}}\cdot Q = 0
\end{aligned}\right\}$$

Combinando estas dos expresiones se tiene que $q_i = q_K$

$$\vdots$$

$$+$$

$$(m+1)\sqrt{Q}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} + \frac{1}{2}Q\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}\cdot Q^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}Q\cdot\sum q_i^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow 2(m+1)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} = \sqrt{Q}\cdot\sum q_i^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 2(m+1)\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} = (m+1)^{\frac{1}{2}}q_K^{\frac{1}{2}}\cdot(m+1)q_K^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow q_K = \frac{2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{(m+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow Q = 2(m+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2} + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}}{(m+1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow P = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)^{\frac{1}{4}}\left[2(m+1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

9.3. Ejercicio

Un monopolista que tiene un costo total de producción igual a:

$$CT(Q) = \frac{Q^2}{2}$$

posee dos tipos de consumidores con las siguientes curvas de demanda:

$$P_A = a - q_A \qquad \wedge \qquad P_B = \frac{1}{2}a - q_B$$

1. Encuentre la cantidad y el precio que cobraría el monopolista si no puede discriminar precios.

2. Encuentre la cantidad y el precio que cobraría el monopolista a cada consumidor si puede discriminar precios pero existe la posibilidad de que un consumidor le pueda vender al otro consumidor el bien y considerando que hay costos de transporte igual a T.

1)

$$D_T = P = \frac{3}{4}a - \frac{1}{2}Q$$

$$\max_{Q} \left\{ \frac{3}{4}aQ - \frac{Q^2}{2} - \frac{Q^2}{2} \right\}$$

$$\frac{3}{4}a - 2Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{3a}{8} \quad \wedge \quad P = \frac{9a}{16}$$

2)

$$\max_{q_A, q_B} \left\{ aq_A - q_A^2 + \frac{a}{2}q_B - q_B^2 - \frac{(q_A+q_B)^2}{2} \right\} \quad \text{s.a} \quad (P_A - P_B)^2 \leq t^2$$

$$\mathcal{L}: aq_A - q_A^2 + \frac{a}{2}q_B - q_B^2 - \frac{(q_A+q_B)^2}{2} + \lambda\left[t^2 - \left(a - q_A - \frac{1}{2}a + q_B\right)^2\right]$$

$$\mathcal{L}_{q_A}: a - 2q_A - q_A - q_B + 2\lambda\left(a - q_A - \frac{1}{2}a + q_B\right) = 0$$

$$\mathcal{L}_{q_B}: \frac{a}{2} - 2q_B - q_B - q_A - 2\lambda\left(a - q_A - \frac{1}{2}a + q_B\right) = 0$$

$$\mathcal{L}_{\lambda}: t^2 - \left(a - q_A - \frac{1}{2}a - q_B\right)^2 \geq 0$$

c.h.c

$$\lambda \geq 0 \quad \wedge \quad t^2 - \left(a - q_A - \frac{1}{2}a - q_B\right)^2 \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda\left[t^2 - \left(a - q_A - \frac{1}{2}a - q_B\right)^2\right] = 0$$

Caso $\left[t^2 - \left(a - q_A - \frac{1}{2}a + q_B\right)^2\right] > 0 \Rightarrow \lambda = 0$ } Solución como si no existiera oportunidad de arbitraje.

$$\begin{cases} a - 2q_A - q_A - q_B = 0 \\ \frac{a}{2} - 2q_B - q_B - q_A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-2q_A-q_A-q_B=\frac{a}{2}-2q_B-q_B-q_A \Rightarrow 2q_B=\frac{-a}{2}+2q_A \Rightarrow q_B=\frac{-a}{4}+q_A$$

$$a-2q_A-q_A+\frac{a}{4}-q_A=0 \Rightarrow \frac{5a}{4}=4q_A \Rightarrow q_A=\frac{5a}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_A=\frac{5a}{16} \quad \wedge \quad q_B=\frac{1}{16}a \quad \Rightarrow Q=\frac{3a}{8} \\ P_A=\frac{11a}{16} \quad \wedge \quad P_B=\frac{7a}{16} \end{cases}$$

Caso $\lambda>0 \Rightarrow t^2-\left(a-q_A-\frac{1}{2}a+q_B\right)^2=0 \Rightarrow t=\frac{a}{2}-q_A+q_B$

$$\begin{cases} a-2q_A-q_A-q_B=-2\lambda\left(a-q_A-\frac{1}{2}a+q_B\right) \\ \frac{a}{2}-2q_B-q_B-q_A=2\lambda\left(a-q_A-\frac{1}{2}a+q_B\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a-2q_A-q_A-q_B=-\frac{a}{2}+2q_B+q_B+q_A \Rightarrow -4q_A=\frac{-3a}{2}+4q_B \Rightarrow q_A=\frac{3a}{8}-q_B$$

$$t=\frac{a}{2}-\frac{3a}{8}+q_B+q_B \Rightarrow 2q_B=t-\frac{a}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_B=\frac{t}{2}-\frac{a}{16} \quad \wedge \quad q_A=\frac{7}{16}a-\frac{t}{2} \quad \Rightarrow Q=\frac{3a}{8} \\ P_B=\frac{9a}{16}-\frac{t}{2} \quad \wedge \quad P_A=\frac{9a}{16}+\frac{t}{2} \end{cases}$$

Note que $|P_A-P_B|=t$

9.4. Ejercicio

Un monopolista se enfrenta a n consumidores donde la demanda del consumidor i está dada por:

$$q_i = \frac{i}{P_i^2} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Además, se sabe que el monopolista tiene un costo marginal igual a Q.

1. Encuentre la cantidad y el precio que cobraría el monopolista si no puede discriminar precios.

2. Encuentre la cantidad y el precio que cobraría el monopolista a cada consumidor si puede discriminar precios y no existe oportunidad de arbitraje.

1)

$$q_i = \frac{1}{P_i^2}$$

$$Q = \frac{1}{P^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P = \frac{1}{Q^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_{Q} \left\{ \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{Q} - \frac{Q^2}{2} \right\}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} - Q = 0$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{3}} \quad \wedge \quad P = 2^{\frac{1}{3}}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

2)

$$q_i = \frac{i}{P_i^2}$$

$$P_i = \frac{1}{q_i^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{i}$$

$$\max_{q_i \ \forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i^{\frac{1}{2}} \sqrt{i} - \frac{(\sum q_i)^2}{2} \right\}$$

$$\frac{1}{2} q_i^{-\frac{1}{2}} \sqrt{i} - Q = 0 \Rightarrow q_i = \frac{i}{4Q^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2} q_j^{-\frac{1}{2}} \sqrt{j} - Q = 0 \Rightarrow q_j = \frac{j}{4Q^2}$$

$$+ \quad \overline{\quad Q = \frac{1}{4Q^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad}$$

$$\Rightarrow Q = \left[\frac{n(n+1)}{8}\right]^{\frac{1}{3}} \Rightarrow q_i = \frac{1}{4\left[\frac{n(n+1)}{8}\right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{1}{[n(n+1)]^{\frac{2}{3}}} \quad \wedge \quad P_i = n(n+1)^{\frac{1}{3}}$$

9.5. Ejercicio

Un monopolista enfrenta la función de demanda:

$$P = \frac{A}{Q^{\alpha}} \qquad , \qquad \alpha < 1$$

Este monopolista tiene n plantas para producir el bien que vende en este mercado y el costo marginal de cada planta viene dado por $CM_i = iq_i$.

1. Determine el precio que cobrará el monopolista.
2. Determine la cantidad que producirá en cada planta.

1)

$$CT_i = \frac{i q_i^2}{2}$$

$$\max_{q_i \ \forall i} \left\{ A\left(\sum q_i\right)^{1-\alpha} - \sum \frac{1}{2} \cdot i q_i^2 \right\}$$

$$A \cdot (1-\alpha) Q^{-\alpha} - i q_i = 0 \Rightarrow q_i = A \cdot (1-\alpha) Q^{-\alpha} \cdot \frac{1}{i}$$

$$\vdots$$

$$A \cdot (1-\alpha) Q^{-\alpha} - j q_j = 0 \Rightarrow q_j = A \cdot (1-\alpha) Q^{-\alpha} \cdot \frac{1}{j}$$

$$+$$

$$Q = A \cdot (1-\alpha) Q^{-\alpha} \sum \frac{1}{i}$$

$$\Rightarrow Q = \left[A(1-\alpha) \sum \frac{1}{i} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

2)

$$P = A \left[A(1-\alpha) \sum \frac{1}{i} \right]^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$$

9.6. Ejercicio

Un monopsonista discriminador de precios se enfrenta a n tipos de vendedores, los cuales tienen una función de oferta igual a $P_i = ic + dq_i$. El monopsonista tiene una función de ingreso promedio (lo que sería la función de demanda en competencia) igual a $P = a - bQ$. Si el deseo del monopsonista es comprar a todos los vendedores y discriminar precios en tercer grado, encuentre:

1. El precio que le pagaría a cada vendedor.
2. La cantidad que le compraría a cada vendedor.
3. La cantidad total que vende el monopsonista.
4. El precio al que vende el monopsonista.
5. Determine la cantidad óptima que le compra y el precio que le paga a cada vendedor si la empresa es monopolista y monopsonista.

Piense que el monopsonista es como un supermercado que le compra a varios distribuidores.

Vende el bien: $\bar{P}$

Compra el bien: $p_i = ic + dq_i$

$$\max_{q_i} \left\{ \bar{P}\left(\sum q_i\right) - \sum icq_i - \sum dq_i^2 \right\}$$

CPO: $\bar{P} - \underbrace{ic - 2dq_i}_{GM_i} = 0$

$$\Rightarrow a - bQ - ic - 2dq_i = 0$$

$$\Rightarrow na - nbQ - c \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2dQ = 0$$

$$Q(nb + 2d) = na - c \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Q = (nb+2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right] \Rightarrow P = a - b(nb+2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{a - 2bQ - ic}{2d}$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{a}{2d} - \frac{b}{d}(nb+2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right] - \frac{ic}{2d}$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{ic}{2} + \frac{a}{2} - b(nb+2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right]$$

5)

Vende el bien: $P = a - bQ$
Compra el bien: $p_i = ic + dq_i$
$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

$$\max_{q_i} \left\{ a\sum_{i=1}^{n} q_i - b\left(\sum q_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} icq_i - \sum_{i=1}^{n} dq_i^2 \right\}$$

CPO: $\underbrace{a - 2bQ}_{IM} - \underbrace{ic - 2dq_i}_{GM_i} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow na - 2nbQ - c \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2dQ = 0$$

$$Q(2nb + 2d) = na - c \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Q = (2nb + 2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right] \Rightarrow P = a - b(2nb + 2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{a - 2bQ - ic}{2d}$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{a}{2d} - \frac{b}{d}(2nb + 2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right] - \frac{ic}{2d}$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{ic}{2} + \frac{a}{2} - b(2nb + 2d)^{-1}\left[na - \frac{cn(n+1)}{2}\right]$$

9.7. Ejercicio

Una empresa es un monopolio en el mercado local y es competidor en el mercado internacional. En el mercado local, la empresa se enfrenta a una curva inversa de demanda igual a $P = a - q_L$. En el mercado internacional, la empresa puede vender la cantidad que desee a un precio de P_I. La empresa puede producir a un costo total igual a Q^2 con $Q = q_L + q_I$.

1. Si los costos de transporte son prohibitivos, encuentre la cantidad óptima que la empresa vendería en cada mercado y el precio que cobraría en el mercado local.

2. Si el costo de transporte es igual a t, encuentre la cantidad de equilibrio que la empresa vendería en cada mercado y los precios que cobraría.

1)

$$\max_{q_I \wedge q_L} \left\{ a q_L - q_L^2 + P_I q_I - (q_L + q_I)^2 \right\}$$

$$a - 2q_L - 2Q = 0$$

$$P_I - 2Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{P_I}{2} \Rightarrow q_L = \frac{a}{2} - \frac{P_I}{2} \Rightarrow P_L = \frac{a}{2} + \frac{P_I}{2}$$

$$\Rightarrow q_I = P_I - \frac{a}{2}$$

2)

$$\mathcal{L} : a q_L - q_L^2 + P_I q_I - (q_L + q_I)^2 + \lambda\left[t^2 - (a - q_L - P_I)^2\right]$$

CHC

$$\lambda \geq 0 \quad , \quad t^2 - (a - q_L - P_I)^2 \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda\left[t^2 - (a - q_L - P_I)^2\right] = 0$$

$$\text{CPO} \begin{cases} a - 2q_L - 2Q + 2\lambda\,(a - q_L - P_I) = 0 \\ P_I - 2Q = 0 \\ t - (a - q_L - P_I) = 0 \end{cases}$$

Si $t^2 - (a - q_L - P_I)^2 > 0 \Rightarrow \lambda = 0$

La solución coincidiría con la solución si los costos son prohibitivos.

Si $\lambda > 0 \Rightarrow t^2 - (a - q_L - P_I)^2 = 0$

$$q_L = a - P_I - t \Rightarrow P_L = t + P_I$$

$$Q = \frac{P_I}{2} \Rightarrow q_I = \frac{3P_I}{2} + t - a$$

Si $t^2 - (a + q_L - P_I)^2 = 0 \wedge \lambda = 0$ la solución coincidiría con la solución si los costos son prohibitivos nada más que también se satisface que $|P_L - P_I| = t$

9.8. Ejercicio

Un monopolista suple a n consumidores que presentan una demanda inversa igual a $P_i = ia - q_i$.

1. Si el monopolista tiene un costo marginal igual a c y decide discriminar precios utilizando una tarifa de dos tramos, ¿cuál es el precio que debe cobrarle a todos los consumidores para maximizar su ganancia asumiendo que $P < a$?
2. Si el monopolista tiene un costo total igual a $\frac{1}{2}Q^2$, donde Q es la producción total del monopolista, y decide discriminar precios en tercer grado, ¿cuál es el precio que debe cobrarle a cada uno de los consumidores y qué cantidad les vende?

1)

$$\max_{P}\left\{n\cdot T(P)+P\cdot Q(P)-c\cdot Q(P)\right\}$$

$$P_1=a-q_1 \quad \wedge \quad P_i=ia-q_i$$

$$\pi=\underbrace{\frac{n}{2}(a-P)(a-P)}_{\text{tarifa}}+P\cdot\sum_{i=1}^{n}q_i-c\sum_{i=1}^{n}q_i$$

$$\pi=\frac{n}{2}(a-P)^2+P\cdot\sum_{i=1}^{n}(ia-P)-c\sum_{i=1}^{n}(ia-P)$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial P}:-n(a-P)+a\sum_{i=1}^{n}i\;-2nP+cn=0$$

$$(P-a)+\frac{a(n+1)}{2}-2P+c=0$$

$$P=a\left(\frac{n+1}{2}-1\right)+c$$

2)

$$IM_i=CM_T \qquad\qquad \wedge \qquad IM_i=IM_j$$

$$ia-2q_i=Q \qquad\qquad ia-2q_i=ja-2q_j$$

$$ia-2q_i=nq_i-\frac{n\,ia}{2}+a\sum_{j=1}^{n}j \qquad\qquad q_j=\frac{ja-ia}{2}+q_i$$

$$\Rightarrow q_i=\frac{1}{n+2}\left(ia\left(1+\frac{n}{2}\right)-a\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{a}{n+2}\left(\frac{i(2+n)}{2}-\frac{(n+1)n}{2}\right)$$

$$P_i=ia-\frac{a}{n+2}\left(\frac{i(2+n)}{2}-\frac{(n+1)n}{2}\right) \qquad \wedge \qquad Q=ia-\frac{a}{n+2}\left(i(2+n)-(n+1)n\right)=n^2+n$$

9.9. Ejercicio

Un monopolista opera en un mercado con una demanda inversa igual a $P = a - by$. Los costos de producción del monopolio depeneden de la cantidad de plantas que tenga en operación. Cada una de las plantas tiene una función de producción igual a $y_i = L_i^{\frac{1}{2}}$ con $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$, donde L_i son las unidades de trabajo contratadas. La empresa enfrenta un costo por unidad de trabajo igual a 1, con independencia en las unidades contratadas.

1. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio del monopolista.

2. Encuentre el valor óptimo de n.

$P = a - by \Rightarrow P = a - b\sum_{i=1}^{n} y_i$

$y_i = L_i^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ planta i

$\Rightarrow L_i = y_i^2 \Rightarrow CT_i = \omega L_i = \omega y_i^2$

$$\max_{y_i,\ \forall i} \left\{ a\sum_{i=1}^{n} q_i - b\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \omega y_i^2 \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}: a - 2by - 2\omega y_i = 0 \Rightarrow y_i = \frac{a}{2\omega} - \frac{by}{\omega}$$

$$+$$

$$y = \frac{na}{2\omega} - \frac{nb}{\omega}y \Rightarrow y = \frac{na}{2\omega + 2nb}$$

$$\Rightarrow y_i = \frac{a}{2\omega} - \frac{1}{\omega}\cdot\frac{bna}{2\omega + 2nb}$$

Dado que $\omega = 1$

$$y = \frac{na}{2+2nb} \quad \wedge \quad y_i = \underbrace{\frac{a}{2} - \frac{bna}{2+2nb}}_{\frac{a}{2}\left(1 - \frac{bn}{1+nb}\right) = \frac{a}{2+2nb}} \quad \wedge \quad P = \underbrace{a - \frac{bna}{2+2nb}}_{a\left(1 - \frac{bn}{2+2nb}\right) = \frac{a(2+nb)}{2+2nb}}$$

$$\pi = \frac{na^2(2+nb)}{(2+2nb)^2} - \frac{na^2}{(2+2nb)^2} = \frac{na^2(2+nb-1)}{(2+2nb)^2}$$

$$\pi = \frac{na^2}{4(1+nb)}$$

Conforme $\uparrow n \Rightarrow \uparrow \pi$ por lo que el monopolista querrá $n \rightarrow \infty$.

9.10. Ejercicio

Un monopolista se enfrenta a n consumidores donde la demanda del consumidor i está dada por:

$$P_i = i - \sqrt{q_i} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

El monopolista tiene un costo total igual a 0.

1. Encuentre la cantidad y el precio que cobraría en este mercado si existe posibilidad de arbitraje sin costo.
2. Encuentre la cantidad y el precio que vendería a cada consumidor si puede discriminar entre ellos y no existe posibilidad de arbitraje.

9.11. Ejercicio

Considere una economía de n consumidores y una empresa monopolística que no tiene costos fijos y que el costo de producir una unidad adicional es contante e igual a θ. Cada consumidor tiene una demanda por el bien que produce la empresa monopolística dada por:

$$P_i = \frac{m_i}{\sqrt{q_i}}$$

Donde m_i representa el ingreso del consumidor i.

1. Determine la cantidad y el precio que escoge la empresa si no puede discriminar precios. También, determine la producción total de la empresa.
2. Determine la cantidad y precios que cobra la empresa a cada consumidor si puede cobrar precios distintos y no existe oportunidad de arbitraje. También, determine la producción total de la empresa.
3. Determine cuál panorama, de los anteriores, sería el más preferido por la empresa y justifique su respuesta.

$$P_i = \frac{m_i}{\sqrt{q_i}} \Rightarrow q_i = \frac{m_i^2}{P_i^2}$$

1)

$$Q = \frac{1}{P^2}\sum m_i^2 \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{Q}}\left[\sum m_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_{Q}\left\{\sqrt{Q}\left[\sum m_i^2\right]^{\frac{1}{2}} - \theta Q\right\}$$

CPO: $\frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{2}}\left[\sum m_i^2\right]^{\frac{1}{2}} - \theta = 0$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \frac{4\theta^2}{\sum m_i^2} \Rightarrow Q = \frac{\sum m_i^2}{4\theta^2} \wedge P = 2\theta \wedge q_i = \frac{m_i^2}{4\theta^2}$$

2)

$$P_i = \frac{m_i}{\sqrt{q_i}}$$

$$\max_{q_i}\left\{\sum\left[m_i\sqrt{q_i} - \theta q_i\right]\right\}$$

CPO: $\frac{1}{2}m_i \cdot q_i^{-\frac{1}{2}} - \theta = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

$$\Downarrow$$

$$q_i = \frac{m_i^2}{4\theta^2} \Rightarrow P_i = 2\theta$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \frac{1}{4\theta^2}\sum m_i^2$$

3) Observe que $\pi_1 = \pi_2$ entonces es indiferente entre discriminación de precios o no.

Al final, todos tienen demandas similares por lo que no tiene a quién "discriminar".

10. Oligopolio

10.1. Ejercicio

Considere que n empresas distintas compiten entre sí y enfrentan una misma demanda inversa de mercado representada por $P = a - Q$, donde Q es la producción combinada de todas la empresas. Lo que hace diferente a cada una de las empresas es su costo marginal, el cuál es igual a i. O sea, el costo marginal de la primera empresa es 1, el de la empresa 2 es 2 y así sucesivamente hasta la empresa n.

1. Si las empresas compiten al estilo Cournot, encuentre el precio y la cantidad de equilibrio de mercado; así como la cantidad que produce la empresa.

2. Si las empresas compiten al estilo Stackelberg y la empresa j es la única líder, encuentre la producción y los precios de mercado; así como la cantidad que produce cada empresa.

1) Cournot

Forma 1:

Empresa j

$$\pi_j = \left(a - \sum_{i=1}^{N} q_i\right) q_j - j q_j$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} : a - \sum_{i \neq j}^{N} q_i - 2q_j - j = 0$$

$$\Rightarrow \quad q_j = \frac{a - \sum_{i \neq j}^{N} q_i - j}{2} \quad (MR_j)$$

$$\Rightarrow \quad q_j = \frac{a}{2} - \frac{\sum_{i \neq j} q_i}{2} - \frac{j}{2}$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$Q = \frac{na}{2} - \frac{(n-1)Q}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$$

$$Q\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{na}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$$

$$Q = \frac{na}{n+1} - \frac{n}{2} \quad \Rightarrow P = a - \frac{na}{n+1} - \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad q_j - \frac{1}{2} q_j = \frac{a - \sum_{i \neq j}^{N} q_i - j}{2} - \frac{q_j}{2}$$

$$q_j = a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2} - j$$

Forma 2:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j}: a-\sum_{i=1}^{N} q_i - q_j - j = 0$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$na - nQ - Q - \sum_{j=1}^{n} j = 0$$

$$Q = \frac{na - \sum_{j=1}^{n} j}{n+1} \Rightarrow Q = \frac{na}{n+1} - \frac{n}{2} \Rightarrow P = a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow q_j = a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2} - j$$

Forma 3:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \pi_j}{\partial q_j}: a-\sum_{i=1}^{N} q_i - q_j - j = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \pi_K}{\partial q_K}: a-\sum_{i=1}^{N} q_i - q_K - K = 0 \end{array}\right\} q_j + j = q_K + K \Rightarrow q_K = q_j + j - K$$

$$\Rightarrow a - \sum_{K=1}^{N}\left(q_j + j - K\right) - q_j - j = 0$$

$$\Rightarrow a - nq_j - nj + \sum_{K=1}^{n} K - q_j - j = 0 \Rightarrow a - (n+1)j + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)q_j$$

$$q_j = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{2} - j$$

$$\sum q_j = \frac{a \cdot n}{n+1} + \frac{n^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} j = \frac{a \cdot n}{n+1} + \frac{n^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a \cdot n}{n+1} - \frac{n}{2} \Rightarrow P = a - \frac{a \cdot n}{n+1} + \frac{n}{2}$$

2) Stackelberg

Forma 1:

Seguidora $\forall K \neq L$

$$\pi_K = \left(a - \sum_{i=1}^{N} q_i\right) q_K - K q_K$$

$$\Rightarrow \pi_K = \left(a - q_L - q_K - \sum_{i \neq L,K} q_i\right) q_K - K q_K$$

$$\frac{\partial \pi_K}{\partial q_K}: a - q_L - 2q_K - \sum_{i \neq L,K} q_i - K = 0 \Rightarrow a - q_L - q_K - \sum_{i \neq L}^{n} q_i - K = 0$$

$$+ \quad \vdots$$

$$(n-1)a - (n-1)q_L - \sum_{i \neq L}^{n} q_i - (n-1)\sum_{i \neq L}^{n} q_i - \sum_{K \neq L}^{n} K = 0$$

$$\Rightarrow (n-1)a - (n-1)q_L - \frac{n(n+1)}{2} + L = n\sum_{i \neq L}^{n} q_i \quad \Rightarrow \sum_{i \neq L}^{n} q_i = \frac{(n-1)a}{n} - \frac{(n-1)q_L}{n} - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}$$

Líder

$$\pi_L = \left[a - \cancel{q_L} - \frac{(\cancel{n}-1)a}{n} + \frac{(\cancel{n}-1)q_L}{n} + \frac{(n+1)}{2} - \frac{L}{n}\right] q_L - L q_L$$

$$\Rightarrow \pi_L = \left[\frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{(n+1)}{2} - \frac{L}{n}\right] q_L - L q_L$$

$$\frac{a}{n} - \frac{2q_L}{n} + \frac{(n+1)}{2} - \frac{L}{n} - L = 0 \Rightarrow q_L = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{L}{2} - \frac{nL}{2}$$

$$\Rightarrow q_L = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{L}{2}(n+1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i \neq L} q_i = \frac{(n-1)a}{n} - q_L + \frac{1}{n} q_L - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{(n-1)a}{n} + \frac{1}{n} q_L - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{(n-1)a}{n} + \frac{a}{2n} + \frac{(n+1)}{4} - \frac{L}{2n}(n+1) - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}$$

$$\Rightarrow P = a - \frac{(n-1)a}{n} - \frac{a}{2n} - \frac{(n+1)}{4} + \frac{L}{2n}(n+1) + \frac{(n+1)}{2} - \frac{L}{n}$$

Forma 2:

Seguidora $\forall K \neq L$

$$\pi_K = \left(a - \sum_{i=1}^{N} q_i\right) q_K - K q_K$$

$$\Rightarrow \pi_K = \left(a - q_L - q_K - \sum_{i \neq L,K} q_i\right) q_K - K q_K$$

$$\frac{\partial \pi_K}{\partial q_K}: a - q_L - 2q_K - \sum_{i \neq L,K} q_i - K = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - q_L - q_K - \sum_{i \neq L}^{n} q_i - K = 0 \\ a - q_L - q_i - \sum_{i \neq L}^{n} q_i - i = 0 \end{array}\right\} q_i = q_K + K - i$$

$$a - q_L - q_K - \sum_{i \neq L}^{n} (q_K + K - i) - K = 0 \Rightarrow a - q_L - n q_K - (n-1)K + \sum_{i \neq L}^{n} i - K \Rightarrow n q_K = a - q_L - nK + \sum_{i \neq L}^{n} i$$

$$\Rightarrow q_K = \frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{\sum_{i \neq L}^{n} i}{n} - K$$

Líder

$$\pi_L = \left(a - q_L - \sum_{i \neq L}^{n} q_i\right) q_L - L q_L$$

$$\Rightarrow \pi_L = \left[a - q_L - \sum_{i \neq L}^{n} \left(\frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{\sum_{i \neq L}^{n} i}{n} - i\right)\right] q_L - L q_L = \left(a - q_L - \frac{(n-1)a}{n} + \frac{(n-1)q_L}{n} - \frac{(n-1)\sum_{i \neq L}^{n} i}{n} + \sum_{i \neq L}^{n} i\right) q_L - L q_L$$

$$\Rightarrow \pi_L = \left(\frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{\sum_{i \neq L}^{n} i}{n}\right) q_L - L q_L$$

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L}: \frac{a}{n} - \frac{2q_L}{n} + \frac{\sum_{i \neq L}^{n} i}{n} - L = 0$$

$$q_L = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{L}{n} - \frac{nL}{2}$$

$$q_K = \frac{a}{n} - \frac{a}{2n} - \frac{(n+1)}{4} + \frac{L}{n^2} + \frac{L}{2} + \frac{\sum_{i \neq L}^{n} i}{n} - K$$

$$Q = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{L}{n} - \frac{nL}{2} + \sum_{K \neq L}^{n} \left(\frac{a}{n} - \frac{a}{2n} - \frac{(n+1)}{4} + \frac{L}{n^2} + \frac{L}{2} + \frac{\sum_{i \neq L}^{n} i}{n} - K \right)$$

10.2. Ejercicio

En un mercado, n empresas compiten por precio y tienen un producto diferenciado. Cada una de las empresas se enfrenta a la siguiente curva directa de demanda:

$$q_i = A - bP_i + d\sum_{j\neq i}^{n} P_j$$

Existe una empresa que es líder y $n-1$ empresas seguidoras. La empresa líder tiene un costo marginal constante e igual a c y las empresas seguidoras tienen un costo marginal nulo (cero).

1. Encuentre el equilibrio en precios y cantidades si todas las empresas compiten simultáneamente por precios.

2. Encuentre el equilibrio en precios y cantidades si compiten secuencialmente por precios.

1)

$$\max_{P_j}\left\{P_j\left(A-bP_j+d\sum_{i\neq j}^{n}P_i\right)-c\left(A-bP_j+d\sum_{i\neq j}^{n}P_i\right)\right\}$$

$$A-2bP_j+d\sum_{i\neq j}^{n}P_i \quad +c\cdot b=0$$

$$\max_{P_K}\left\{P_K\left(A-bP_K+d\sum_{i\neq K}^{n}P_i\right)\right\} \qquad \forall K\neq j$$

$$\left.\begin{array}{l} A-2bP_K+d\sum_{1\neq K}^{n}P_1=0 \\ A-2bP_i+d\sum_{1\neq i}^{n}P_1=0 \end{array}\right\} -2bP_K+dP_i=-2bP_i+dP_K \Rightarrow P_i=P_K \quad \forall i,K\neq j$$

Por lo que $A-2bP_K+d\cdot(n-2)P_K+dP_j=0$

Y se tenía $A-2bP_j+d\cdot(n-1)P_K+c\cdot b=0$

$$\left.\right\} -2bP_K+d\cdot(n-2)P_K+dP_j=-2bP_j+d\cdot(n-1)P_K+c\cdot b$$

$$\Rightarrow -2bP_K-d\,P_K+dP_j=-2bP_j+c\cdot b \Rightarrow -P_K(2b+d)=-P_j(2b+d)+cb$$

$$\Rightarrow P_K=P_j-\frac{cb}{2b+d}$$

$$\Rightarrow A-2bP_j+d\cdot(n-1)P_K+c\cdot b=0 \Rightarrow A-2bP_j+d\cdot(n-1)\left(P_j-\frac{cb}{2b+d}\right)+c\cdot b=0$$

$$\Rightarrow A+P_j\left[-2b+d(n-1)\right]-d(n-1)\frac{cb}{2b+d}+cb=0$$

$$A-d(n-1)\frac{cb}{2b+d}+cb=P_j\left[2b-d(n-1)\right]$$

$$P_j=\left[2b-d(n-1)\right]^{-1}\left[A-d(n-1)\frac{cb}{2b+d}+cb\right]$$

$$P_K=\left[2b-d(n-1)\right]^{-1}\left[A-d(n-1)\frac{cb}{2b+d}+cb\right]-\frac{cb}{2b+d}$$

2)

Seguidoras $\forall i \neq j$ (j va a ser la líder)

$$\pi_i = P_i\left(A - bP_i + dP_j + d\sum_{K\neq i,j} P_K\right) - 0\cdot q_j$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial P_i}: A + dP_j + d\sum_{K\neq i,j} P_K - 2bP_i = 0$$

$$\frac{\partial \pi_K}{\partial P_K}: A + dP_j + d\sum_{K\neq K,j} P_K - 2bP_K = 0$$

$$\Rightarrow d\sum_{K\neq j} P_K - 2bP_i + dP_i = d\sum_{K\neq j} P_K - 2bP_K + dP_K$$

$$\Rightarrow P_i(d-2b) = P_K(d-2b) \Rightarrow P_i = P_K \quad \forall (i,K \neq j \ \wedge \ i \neq K)$$

$$\Rightarrow A + dP_j + d(n-2)P_i - 2bP_i = 0$$

$$\Rightarrow P_i\left(2b - d(n-2)\right) = A + dP_j$$

$$\Rightarrow P_i = \frac{A + dP_j}{2b - d(n-2)}$$

Líder

$$\pi_j = P_j\left(A - bP_j + d(n-1)\left[\frac{A+dP_j}{2b-d(n-2)}\right]\right) - C\left(A - bP_j + d(n-1)\left[\frac{A+dP_j}{2b-d(n-2)}\right]\right)$$

$$\Rightarrow \pi_j = AP_j - bP_j^2 + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j + \frac{d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j^2 - CA + CbP_j - \frac{Adc(n-1)}{2b-d(n-2)} - \frac{d^2c(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial P_j}: A - 2bP_j + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)} + \frac{2d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j + cb - \frac{d^2c(n-1)}{2b-d(n-2)} = 0$$

$$2P_j\left(b - \frac{d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}\right) = \left[A + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)} + cb - \frac{d^2c(n-1)}{2b-d(n-2)}\right]$$

$$\Rightarrow P_j = \frac{1}{2}\left(b - \frac{d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}\right)^{-1}\left[A + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)} + cb - \frac{d^2c(n-1)}{2b-d(n-2)}\right]$$

$$\Rightarrow P_i = \frac{A}{2b-d(n-2)} + \frac{d}{2b-d(n-2)} \cdot \frac{1}{2}\left(b - \frac{d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}\right)^{-1}\left[A + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)} + cb - \frac{d^2c(n-1)}{2b-d(n-2)}\right]$$

Para encontrar las cantidades sólo se inyecta los precios encontrados en la demanda respectiva.

10.3. Ejercicio

Considere un mercado con n empresas que enfrentan una demanda igual a $P = A - bQ$ con $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ y donde cada empresa tiene un costo marginal igual a c.

1. Determine el equilibrio si las empresas compiten por cantidades simultáneamente.

2. Determine el equilibrio si se compiten por cantidades y existe una empresa líder y todas las demás son seguidoras.

1)

Forma 1:

$$\max_{q_i} \left\{\left(A-bq_i-b\sum_{j\neq i}^{n} q_j\right)q_i - cq_i\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}: A-2bq_i-b\sum_{j\neq i}^{n} q_j - C = 0 \Rightarrow A-bq_i-bQ-c=0$$

$$\begin{array}{l} + \quad \vdots \\ \hline nA-bQ-bnQ-nc=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{nA-nc}{b(1+n)} \wedge P = A - \frac{nA-nc}{(1+n)} \quad \Rightarrow q_i = \frac{A}{b} - \frac{nA-nc}{b(1+n)} - \frac{c}{b}$$

Forma 2:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_i}: A-2bq_i-b\sum_{j\neq i}^{n} q_j - C = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_K}: A-2bq_K-b\sum_{j\neq K}^{n} q_j - C = 0 \end{array}\right\} q_i = q_K$$

$$\Rightarrow A-2bq_i-b(n-1)q_i - C = 0 \Rightarrow A-bq_i-bnq_i-C=0$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{A-C}{b(n+1)} \Rightarrow Q = \frac{An-cn}{b(n+1)} \Rightarrow P = A - \frac{An-cn}{(n+1)}$$

Note que si $n \to \infty \Rightarrow P = C \wedge Q = \frac{A-C}{b}$ (resultado de competencia perfecta por ser bien homogéneo y que todas las empresas tienen el mismo costo marginal).

2)

$$\max_{q_S} \left\{\left(A-bq_S-bq_L-b\sum_{j\neq S,L}^{n} q_j\right)q_i - cq_i\right\}$$

Forma 1:

$$\frac{\partial}{\partial q_S}: A-2bq_S-bq_L-b\sum_{j\neq S,L}^{n} q_j - C = 0 \Rightarrow A-bq_S-bq_L-b\sum_{i\neq L}^{n} q_i - c = 0$$

$$\begin{array}{l} + \quad \vdots \\ \hline (n-1)A-b\sum_{i\neq L}^{n} q_i-(n-1)bq_L-(n-1)b\sum_{i\neq L}^{n} q_i-(n-1)c=0 \end{array}$$

$$A-\frac{b}{n-1}\sum_{i\neq L}^{n} q_i - bq_L - b\sum_{i\neq L}^{n} q_i - c = 0 \Rightarrow \frac{nb}{n-1}\sum_{i\neq L}^{n} q_i = A - bq_L - c$$

$$\Rightarrow \sum_{i\neq L}^{n} q_i = \frac{(n-1)A}{nb} - \frac{(n-1)}{n}q_L - \frac{c(n-1)}{nb}$$

Líder

$$\max_{q_L} \left\{ \left(A - bq_L - \frac{(n-1)A - b(n-1)q_L - (n-1)c}{n} \right) q_L - cq_L \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_L} : \cancel{A} - 2\cancel{b}q_L - \frac{(\cancel{n}-1)A}{n} + \frac{2b(\cancel{n}-1)}{n} q_L + \frac{(\cancel{n}-1)c}{n} - \cancel{c} = 0 \Rightarrow \frac{A}{n} - \frac{2b}{n} q_L - \frac{c}{n} = 0 \Rightarrow \frac{A-c}{2b} = q_L$$

Combinando C.P.O de empresas seguidoras se tiene que $q_i = q_j \quad \forall i,j \neq L$

$$q_S = \frac{A}{nb} - \frac{1}{n} \cdot q_L - \frac{c}{nb} \Rightarrow q_S = \frac{A}{nb} - \frac{A-c}{2nb} - \frac{c}{nb} \Rightarrow q_S = \frac{A}{2nb} - \frac{c}{2nb}$$

$$P = A - b\left(\frac{A-c}{2b} + \frac{A(n-1)}{2nb} - \frac{c(n-1)}{2nb} \right)$$

Forma 2:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_S} &: A - 2bq_S - bq_L - b\sum_{j \neq S,L}^{n} q_j - c = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_K} &: A - 2bq_K - bq_L - b\sum_{j \neq K,L}^{n} q_j - c = 0 \end{aligned}\right\} q_S = q_K \quad \forall S,K \neq L$$

$$\Rightarrow A - 2\cancel{b}q_S - bq_L - (n-\cancel{2})bq_S - c = 0$$

$$\Rightarrow q_S = \frac{A - bq_L - c}{nb}$$

$$\max_{q_L} \left\{ \left[A - bq_L - (n-1) \cdot \frac{A - bq_L - c}{n} \right] q_L - cq_L \right\}$$

$$\Rightarrow \cancel{A} - 2\cancel{b}q_L - \frac{(\cancel{n}-1)A}{n} + \frac{2b(\cancel{n}-1)}{n} q_L + \frac{c(\cancel{n}-1)}{n} - \cancel{c} = 0 \Rightarrow \frac{A}{n} - \frac{2b}{n} q_L - \frac{c}{n} = 0$$

$$\Rightarrow q_L = \frac{A-c}{2b}$$

$$q_S = \frac{A - \frac{A-c}{2} - c}{n} \Rightarrow q_S = \frac{A}{2n} - \frac{c}{2n}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{A-c}{2b} + (n-1)\frac{A}{2n} - (n-1)\frac{c}{2n} \Rightarrow P = A - b\left[\frac{A-c}{2b} + (n-1)\frac{A}{2n} - (n-1)\frac{c}{2n} \right]$$

Si $n \to \infty \Rightarrow q_L = \frac{A-c}{2b} \wedge q_S = 0 \Rightarrow Q = \frac{A-c}{2b} \wedge P = \frac{A}{2} + \frac{c}{2}$ (resultado de monopolio).

10.4. Ejercicio

N empresas que tienen un costo marginal igual a c compiten en un mercado oligopólico donde la función de demanda es igual a:

$$P = \frac{A}{Q} \qquad ; \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Si las empresas compiten por cantidades simultáneamente, determine el precio y la cantidad de equilibrio.

1)

$$\max_{q_i} \left\{ \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} q_i} \cdot q_i - cq_i \right\}$$

$$\frac{-A}{Q^2} \cdot q_i + \frac{A}{Q} - C = 0$$

$$\vdots$$

$$+$$

$$\frac{-A}{Q^2} \cdot Q + \frac{nA}{Q} - nC = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q}(nA - A) = nC \Rightarrow Q = \frac{A}{C} - \frac{A}{nC} = \frac{A}{C} \cdot \frac{n-1}{n} \Rightarrow P = A \cdot \frac{nC}{A(n-1)} = \frac{nC}{n-1}$$

$$q_i = Q - \frac{Q^2 C}{A} \Rightarrow q_i = Q\left(1 - Q \cdot \frac{C}{A}\right) = \frac{A}{C} \cdot \frac{n-1}{n}\left(\underbrace{1 - \frac{(n-1)}{n}}_{\frac{n-n+1}{n}}\right) \Rightarrow q_i = \frac{(n-1)}{n^2} \cdot \frac{A}{C}$$

10.5. Ejercicio

En un mercado existen n empresas oligopólicas con un costo marginal igual a c y la función de demanda del mercado es igual a:

$$P = a - b\sqrt{Q} \qquad ; \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Si las empresas compiten por cantidades simultáneamente, determine el precio y la cantidad de equilibrio.

1)

$$\max_{q_i} \left\{\left(a-b\sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i}\right) q_i - cq_i\right\}$$

$$a-\frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}} \cdot q_i - b\sqrt{Q} - c = 0$$

Forma 1:

$$\left.\begin{array}{c} a-\frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}} \cdot q_i - b\sqrt{Q} - c = 0 \\ \vdots \\ a-\frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}} \cdot q_K - b\sqrt{Q} - c = 0 \end{array}\right\} \text{Combinando se tiene que } q_i = q_K$$

$$a-\frac{b}{2}(nq_i)^{-\frac{1}{2}} \cdot q_i - b\sqrt{nq_i} - c = 0 \Rightarrow a-\frac{b}{2\sqrt{n}} \cdot \sqrt{q_i} - b\sqrt{nq_i} - c = 0$$

$$\Rightarrow a-c = b\sqrt{q_i}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right) \Rightarrow q_i = \left(\frac{a-c}{b}\right)^2 \frac{4n}{(1+2n)^2}$$

$$Q = \left(\frac{a-c}{b}\right)^2 \frac{4n^2}{(1+2n)^2} \Rightarrow P = a-(a-c)\cdot\frac{2n}{(1+2n)}$$

Forma 2:

$$\begin{array}{l} a-\frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}} \cdot q_i - b\sqrt{Q} - c = 0 \\ \vdots \\ + \\ \hline na-\frac{b}{2}\sqrt{Q} - bn\sqrt{Q} - nc = 0 \end{array}$$

$$a-c = b\sqrt{Q}\underbrace{\left(\frac{1}{2n}+1\right)}$$

$$\left(\frac{a-c}{b}\right)^2\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^2 = Q \Rightarrow P = a-b\left(\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{2n}{1+2n}\right)$$

11. Equilibrio General de una economía de dotación

11.1. Ejercicio

Una economía está representada por n individuos de dos tipos. La mitad de los individuos son de tipo A y poseen la siguiente función de utilidad $U(x_A, y_A) = min\{x_A, y_A\}$. La otra mitad de individuos son de tipo B y tienen una función de utilidad $U(x_B, y_B) = x_B + \ln y_B$. La dotación global de x y de y son idénticas y todos los individuos son dotados con la misma cantidad de x y de y.

1. Encuentre los precios de equilibrio general para esta economía y demuestre cuál será el consumo de equilibrio para cada tipo de individuo.

2. A partir de la dotación inicial y utilizando el equilibrio encontrado en el inciso anterior, muestre cómo sería el punto inicial, punto final, la zona de comercio, y la curva de contrato entre un individuo tipo A y un individuo tipo B.

1)

$$\bar{X} = \bar{Y} = \omega$$

Agente representativo A

$$\omega_x^{A_1} = \frac{\omega}{n} = \omega_y^{A_1}$$

$$u_A = \text{mín}\{x_A, y_A\}$$

$$x_A = y_A$$

$$P_x x_A + P_y y_A = \frac{\omega}{n}(P_x + P_y)$$

$$x_A(P_x + P_y) = \frac{\omega}{n}(P_x + P_y)$$

$$x_A = \frac{\omega}{n} = y_A$$

Agente representativo B

$$\omega_x^{B_1} = \frac{\omega}{n} = \omega_y^{B_1}$$

$$u = x_B + \ln y_B$$

$$\frac{1}{\frac{1}{y_B}} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow y_B = \frac{P_x}{P_y}$$

$$P_x \cdot x_B + P_x = \frac{\omega}{n}(P_x + P_y)$$

$$x_B = \frac{\omega}{nP_x}(P_x + P_y) - 1 = \frac{\omega}{n} + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{P_y}{P_x} - 1$$

Precios de equilibrio tienen que ser tales que:

$$\omega = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} x_A + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} x_B \quad \wedge \quad \omega = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} y_A + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} y_B$$

$$W = \frac{n}{2}\cdot\frac{w}{n} + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\left(\frac{w}{nP_x}(P_x+P_y)-1\right) \qquad \wedge \qquad w = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{w}{n} + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\frac{P_x}{P_y}$$

$$\cancel{W} = \cancel{\frac{w}{2}+}\frac{w}{2} + \frac{w}{2}\cdot\frac{P_y}{P_x} - \frac{n}{2} \qquad \wedge \qquad w = \frac{w}{2} + \frac{n}{2}\cdot\frac{P_x}{P_y}$$

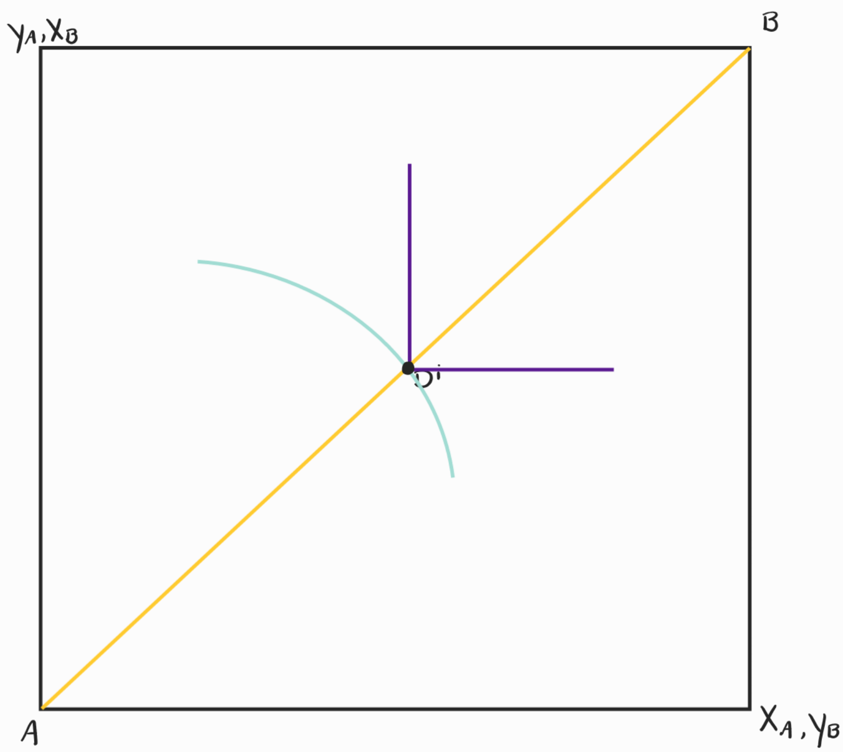
$$\Rightarrow \frac{P_y}{P_x} = \frac{n}{w} \qquad\qquad \Rightarrow \frac{P_x}{P_y} = \frac{w}{n}$$

Así,

$$\begin{cases} x_A = y_A = \frac{w}{n} \\ y_B = x_B = \frac{w}{n} \end{cases}$$

2)

Caja Edgeworth



11.2. Ejercicio

N individuos posee cada uno la función de utilidad $U_i = \frac{x_i}{2i} + y_i^{0,5}$.

1. Los precios de equilibrio de esta economía.

2. La curva de contrato para dos individuos representativos.

1)

$$TMS_i = \frac{\frac{1}{2i}}{\frac{1}{2\sqrt{y_i}}} = \frac{\sqrt{y_i}}{i} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_i = \left(\frac{p_x \cdot i}{p_y}\right)^2$$

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_x \cdot i}{p_y}\right)^2 \Longrightarrow \overline{Y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i^2 \Longrightarrow \frac{p_x}{p_y} = \left(\frac{6\overline{Y}}{n(n+1)(2n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2)

$$TMS_i = TMS_k$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{y_i}}{i} = \frac{\sqrt{y_k}}{k}$$

$$\Longrightarrow y_i = \frac{i^2}{k^2} y_k \Longrightarrow y_i = \frac{i^2}{k^2}\left(\overline{Y} - y_i\right) \Longrightarrow y_i = \frac{\frac{i^2}{k^2}\cdot \overline{Y}}{\underbrace{1+\frac{i^2}{k^2}}_{\frac{k^2+i^2}{k^2}}} = \frac{i^2 \overline{Y}}{k^2+i^2}$$

11.3. Ejercicio

Considere una economía con n individuos, cada uno con una funión de utilidad dada por $U_i = x_i^{\alpha_i} y_i^{1-\alpha_i}$. Cada uno tiene una dotación igual a $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.

1. Encuentre los precios de equilibrio para esta economía.

2. Encuentre la curva de contrato.

1)

$$TMS^{i}_{xy} = \frac{\alpha_i x_i^{\cancel{\alpha_i}-1} y_i^{1-\cancel{\alpha_i}}}{(1-\alpha_i)\cancel{x_i^{\alpha_i}}\,\cancel{y_i^{-\alpha_i}}} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow y_i = \frac{(1-\alpha_i)P_x}{\alpha_i P_y}\cdot x_i$$

$$P_x \bar{x}_i + P_y \bar{y}_i = P_x x_i + \frac{(1-\alpha_i)P_x}{\alpha_i}\cdot x_i$$

$$x_i = \frac{\alpha_i}{P_x}\left(P_x \bar{x}_i + P_y \bar{y}_i\right)$$

Utilizando la ley de Walras, no hay necesidad de encontrar y_i.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{P_x}\left(P_x \bar{x}_i + P_y \bar{y}_i\right)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \frac{P_y}{P_x}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i \Rightarrow \frac{P_y}{P_x} = \frac{\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i}$$

2)

$$y_i = \frac{(1-\alpha_i)P_x}{\alpha_i P_y}\cdot x_i$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_i y_i}{(1-\alpha_i)x_i} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{\alpha_i y_i}{(1-\alpha_i)x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i}{\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i} \Rightarrow y_i = \frac{(1-\alpha_i)}{\alpha}\cdot x_i \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i}{\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i}\right]$$

11.4. Ejercicio

Considere una economía con n individuos, cada uno con una funión de utilidad dada por $U_i = x_i + \ln y_i$. Cada uno tiene una dotación igual a $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.

1. Encuentre los precios de equilibrio para esta economía.
2. Encuentre la curva de contrato.

1)

$$TMS_{xy}^{i} = \frac{1}{\frac{1}{y_i}} = \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow y_i = \frac{P_x}{P_y}$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i = n\frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{P_x}{P_y} = \frac{\bar{y}}{n}$$

Por ley de Walras, $\frac{P_x}{P_y} = \frac{\bar{y}}{n}$ satisface $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^m$

2)

$$y_i = \frac{\bar{y}}{n}$$

11.5. Ejercicio

Una economía está compuesta por 2 individuos quienes tienen la siguiente función de utilidad en n bienes:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i^i$$

1. Encuentre los precios de equilibrio para cualquier dotación arbitraria.

1)

$$TMS_{1i}^{j} = \frac{1}{\frac{1}{x_i}} = \frac{p_1}{p_i} \Rightarrow x_i = \frac{{}^{i}p_1}{p_i}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \bar{x}_i^j \equiv \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{{}^{i}p_1}{p_i} \Rightarrow \frac{p_1}{p_i} = \frac{\bar{x}_i}{n i}$$

11.6. Ejercicio

Una economía está compuesta por n individuos quienes consumen $m+1$ bienes. Todos tienen la siguiente función de utilidad:

$$U_i(x, y_1, \ldots, y_n) = ix_i + \sum_{j=1}^{m} \ln y_{ji}^2$$

1. Encuentre los precios de equilibrio para cualquier dotación arbitraria asumiendo que el consumo para todos los bienes es positivo.

i)

$$TMS^{i}_{xy_j} = \frac{i}{\frac{2}{y_{ji}}} = \frac{p_x}{p_{y_j}} \Rightarrow y_{ji} = \frac{2p_x}{i\,p_{y_j}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{ji} \equiv \bar{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{2p_x}{i\,p_{y_j}} \Rightarrow \frac{p_x}{p_{y_j}} = \frac{\bar{y}_j}{2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$$

12. Equilibrio General con producción

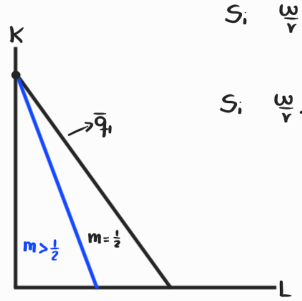
12.1. Ejercicio

Un país produce dos bienes con las siguientes funciones de producción $q_1 = L_1 + 2K_1$ y $q_2 = 2L_2 + K_2$. Los precios de estos bienes se encuentran entre 0,5 y 2.

1. Demuestre el teorema Stolper-Samuelson.
2. Demuestre el teorema de Rybczynski.
3. ¿Cuál sería el nivel óptimo de producción de esta economía si los precios internacionales no estuvieran en el rango indicado?

Para esta función en particular, dado que $\frac{1}{2} < \frac{P_1}{P_2} < 2 \implies \frac{1}{2} < \frac{w}{r} < 2$

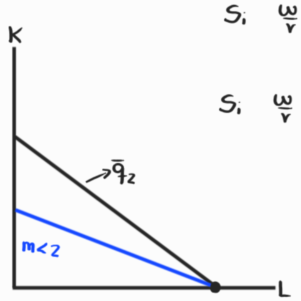
$q_1 = L_1 + 2K_1$



Si $\frac{w}{r} > \frac{1}{2} \implies L_1 = 0 \wedge K_1 = \frac{q_1}{2}$

Si $\frac{w}{r} < \frac{1}{2} \implies K_1 = 0 \wedge L_1 = q_1$

$q_2 = 2L_2 + K_2$



Si $\frac{w}{r} < 2 \implies K_2 = 0 \wedge L_2 = \frac{q_2}{2}$

Si $\frac{w}{r} > 2 \implies L_2 = 0 \wedge K_2 = q_2$

Dado que $\frac{1}{2} < \frac{w}{r} < 2$ entonces

$\implies L_1 = 0 \wedge K_1 = \frac{q_1}{2} \quad \wedge \quad K_2 = 0 \wedge L_2 = \frac{q_2}{2}$

$\implies q_1$ intensivo en K y q_2 en L

$\bar{K} = K_1 = \frac{q_1}{2} \implies q_1 = 2\bar{K} \quad \wedge \quad \bar{L} = L_2 = \frac{q_2}{2} \implies q_2 = 2\bar{L}$

$CT_1 = r \cdot \frac{q_1}{2} \quad \wedge \quad CT_2 = w \cdot \frac{q_2}{2}$

$\implies CM_1 = \frac{r}{2} \quad \wedge \quad CM_2 = \frac{w}{2} \implies \frac{P_1}{P_2} = \frac{r}{w}$

Teorema Stolper-Samuelson

$\frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{1}{w} \cdot P_2 > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial P_1}{\partial w} = \frac{-r}{w^2} \cdot P_2 < 0$

Teorema Rybczynski

$\frac{\partial K}{\partial q_1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial K}{\partial q_1} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial q_2} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$

12.2. Ejercicio

Un país produce dos bienes con las siguientes funciones de producción $q_1 = min\{L_1, 2K_1\}$ y $q_2 = min\{2L_2, K_2\}$. La dotación global de los insumos son de 100 unidades de capital y 100 unidades de trabajo.

1. Demuestre el teorema Stolper-Samuelson.
2. Demuestre el teorema de Rybczynski.

$L_1 = 2K_1$

$$\left.\Rightarrow q_1 = L_1 \wedge q_1 = 2K_1 \Rightarrow K_1 = \frac{q_1}{2}\right\} \frac{K_1^c}{L_1^c} = \frac{1}{2} \quad (\text{intensivo en } L)$$

$2L_2 = K_2$

$$\left.\Rightarrow L_2 = \frac{q_2}{2} \wedge K_2 = q_2\right\} \frac{K_2^c}{L_2^c} = 2 \quad (\text{intensivo en } K)$$

$$\bar{L} = \underbrace{q_1 + \frac{q_2}{2} \quad \wedge \quad \bar{K} = \frac{q_1}{2}}_{} + q_2$$

$$\bar{L} - \frac{q_2}{2} = 2\bar{K} - 2q_2 \Rightarrow \frac{3}{2}q_2 = 2\bar{K} - \bar{L} \Rightarrow q_2 = \frac{4\bar{K} - 2\bar{L}}{3} \quad \wedge \quad q_1 = \frac{4\bar{L}}{3} - \frac{2\bar{K}}{3}$$

$$CT_1 = wq_1 + r \cdot \frac{q_1}{2} \Rightarrow P_1 = CM_1 = w + \frac{r}{2}$$

$$CT_2 = w\frac{q_2}{2} + r \cdot q_2 \Rightarrow P_2 = CM_2 = \frac{w}{2} + r$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{2w+r}{2}}{\frac{w+2r}{2}} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{2w+r}{w+2r}$$

Stolper-Samuelson

$$\frac{\partial p_1}{\partial w} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial p_1}{\partial r} < 0$$

Rybczynski

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} < 0$$

12.3. Ejercicio

Considere una economía con dos sectores de producción que producen x e y respectivamente, utilizando los factores K y L, cuyas dotaciones son idénticas. Las empresas son tomadoras de precios. Los precios de los bienes se determinan en el mercado internacional. Las funciones de producción de los sectores x e y son de la siguiente forma:

$$x = L^{\alpha}K^{1-\alpha} \qquad ; \qquad y = L^{1-\alpha}K^{\alpha}$$

1. Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$ derive el costo unitario de producción de cada sector.
2. Si el precio internacional de y es el doble del precio internacional de x, ¿qué relación existe entre W_L y W_k?
3. Si $\alpha \neq \frac{1}{2}$ encuentre la curva de transformación e indique cuánto se produciría de x y cuánto de y en función de los precios relativos internaciones.
4. Si $\alpha > \frac{1}{2}$ demuestre el teorema de Stolper-Samuelson.
5. Si $\alpha > \frac{1}{2}$ demuestre el teorema de Rybcszynski.

Sector i , $i=x \vee i=y$

$q_i = L_i^{\beta_i} K_i^{c_i}$ donde $\beta_i + c_i = 1$

$$TMST_i = \frac{\beta_i L_i^{\beta_i - 1} K_i^{c_i}}{c_i L_i^{\beta_i} K_i^{c_i - 1}} = \frac{\beta_i K_i}{c_i L_i}$$

El óptimo de producción $TMST_i = \frac{w_L}{w_K}$

$$\frac{\beta_i K_i}{c_i L_i} = \frac{w_L}{w_K} \Longrightarrow K_i = \frac{w_L}{w_K} \cdot \frac{c_i}{\beta_i} L_i$$

$$q_i = L_i^{\beta_i} \left[\frac{w_L}{w_K} \cdot \frac{c_i}{\beta_i} L_i\right]^{c_i}$$

Como $\beta_i + c_i = 1$

$$q_i = L_i \left[\frac{w_L}{w_K} \cdot \frac{c_i}{\beta_i}\right]^{c_i} \Longrightarrow L_i = q_i \left[\frac{w_K}{w_L} \cdot \frac{\beta_i}{c_i}\right]^{c_i}$$

$$L_i = q_i \left[\frac{w_K}{w_L} \cdot \frac{\beta_i}{c_i}\right]^{c_i}$$

$$K_i = q_i \left[\frac{w_K}{w_L} \cdot \frac{\beta_i}{c_i}\right]^{c_i - 1}$$

$$CT_i = w_L L_i + w_K K_i$$

$$\Longrightarrow CT_i = w_L L_i + w_L L_i \frac{c_i}{\beta_i} \Longrightarrow CT_i = w_L L_i \left(1 + \frac{c_i}{\beta_i}\right) \Longrightarrow CT_i = w_L L_i \left(\frac{\beta_i + c_i}{\beta_i}\right)$$

Como $\beta_i + c_i = 1$

$$CT_i = \frac{w_L}{\beta_i} q_i \left[\frac{w_K}{w_L} \cdot \frac{\beta_i}{c_i}\right]^{c_i}$$

$$\Longrightarrow CT_i = \left(\frac{w_L}{\beta_i}\right)^{1-c_i} \left(\frac{w_K}{c_i}\right)^{c_i} q_i$$

$$\Longrightarrow CM_i = \left(\frac{w_L}{\beta_i}\right)^{1-c_i} \left(\frac{w_K}{c_i}\right)^{c_i}$$

Sector x

$B_i = \alpha \wedge C_i = 1-\alpha$

$$TMST_x = \frac{\alpha K_x}{(1-\alpha)L_x} = \frac{W_L}{W_K}$$

$$L_x = q_x\left[\frac{W_K}{W_L}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^{1-\alpha}$$

$$K_x = q_x\left[\frac{W_L}{W_K}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]^{\alpha}$$

$$CM_x = \left(\frac{W_L}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{W_K}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$$

Sector y

$B_i = 1-\alpha \wedge C_i = \alpha$

$$TMST_y = \frac{(1-\alpha)K_y}{\alpha L_y} = \frac{W_L}{W_K}$$

$$L_y = q_y\left[\frac{W_K}{W_L}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]^{\alpha}$$

$$K_y = q_y\left[\frac{W_L}{W_K}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^{1-\alpha}$$

$$CM_y = \left(\frac{W_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{W_K}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

2)

En el óptimo: $TMT = \frac{CM_x}{CM_y} = \frac{P_x}{P_y}$

$P_y = 2P_x \Rightarrow \frac{P_x}{P_y} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{W_L}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{W_K}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}}{\left(\frac{W_L}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{W_K}{\alpha}\right)^{\alpha}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{W_L^{\alpha}\cancel{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}}W_K^{1-\alpha}\cancel{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}}}{W_L^{1-\alpha}\cancel{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}}W_K^{\alpha}\cancel{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}}} = \frac{1}{2}$$

$$W_L^{2\alpha-1}\cdot W_K^{1-2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{W_L}{W_K}\right)^{2\alpha-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{W_L}{W_K} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}}$$

3)

$$\left[\frac{W_L}{W_K}\right]^{2\alpha-1} = \frac{P_x}{P_y}$$

resolviendo este sistema se encuentra $q_1 \wedge q_2$ en términos de los dotaciones y precios de los factores de producción

$$\begin{cases} \bar{L} = q_x\left[\frac{W_K}{W_L}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^{1-\alpha} + q_y\left[\frac{W_K}{W_L}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]^{\alpha} \\ \bar{K} = q_x\left[\frac{W_L}{W_K}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha}\right]^{\alpha} + q_y\left[\frac{W_L}{W_K}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\right]^{1-\alpha} \end{cases}$$

Resumen teorema Stolper - Samuelson

*Para esta explicación se supone que X es intensivo en trabajo y "y" es intensivo en capital.

$\uparrow P_x \rightarrow$ incentivos para aumentar X porque ahora $CM_x < P_x \rightarrow$ se demande más L $\rightarrow \uparrow W_L$. Además $\downarrow W_K$ porque el sector "y", que es intensivo en K, ya no demanda tanto K (porque ya no usa tanto L).

En resumen, si $\uparrow P_x \Rightarrow \uparrow W_L \wedge \downarrow W_K$ (suponiendo que X es intensivo en L).

en términos relativos sería $\uparrow \frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \frac{W_L}{W_K}\uparrow$

4)

Se sabe que "X" es intensivo en L $\wedge$ "y" en K debido a que:

$$TMS_X = \frac{\alpha K_X}{(1-\alpha)L_X} = \frac{W_L}{W_K} \qquad \wedge \qquad TMST_Y = \frac{(1-\alpha)K_Y}{\alpha L_Y} = \frac{W_L}{W_K}$$

Si suponemos $\frac{W_L}{W_K}$ cualquier valor, por ejemplo $\frac{W_L}{W_K} = 1$

$$\Rightarrow \frac{K_X}{L_X} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \qquad \wedge \qquad \frac{K_Y}{L_Y} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Note que $\frac{\alpha}{1-\alpha} > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ya que $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{K_Y}{L_Y} > \frac{K_X}{L_X}$$

Y se encontró que $\left[\frac{W_L}{W_K}\right]^{2\alpha-1} = \frac{P_x}{P_y}$

$$\frac{\partial P_x}{\partial w_L} = (2\alpha-1)\left[\frac{W_L}{W_K}\right]^{2\alpha-2} \cdot w_K^{-1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial P_x}{\partial W_K} = (2\alpha-1)\left[\frac{W_L}{W_K}\right]^{2\alpha-2} \cdot \left(\frac{-W_L}{w_K^2}\right) < 0$$

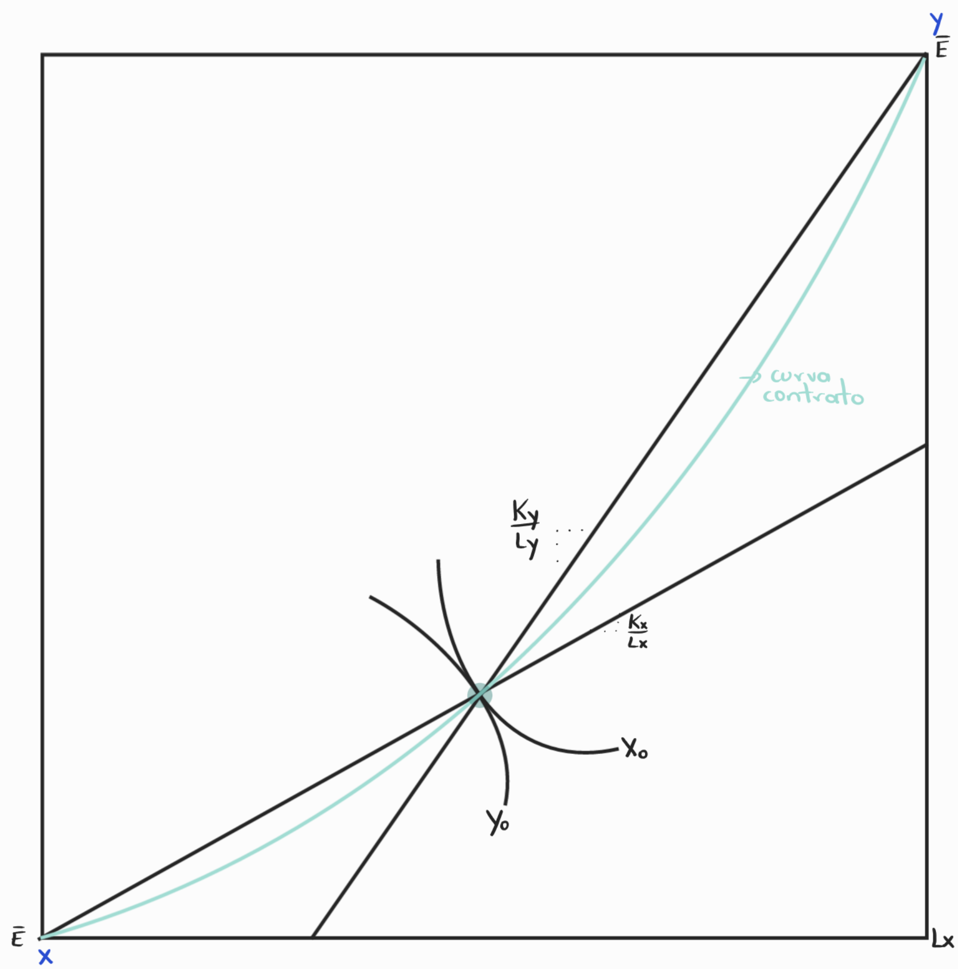
5)

Teorema Rybcszynski:

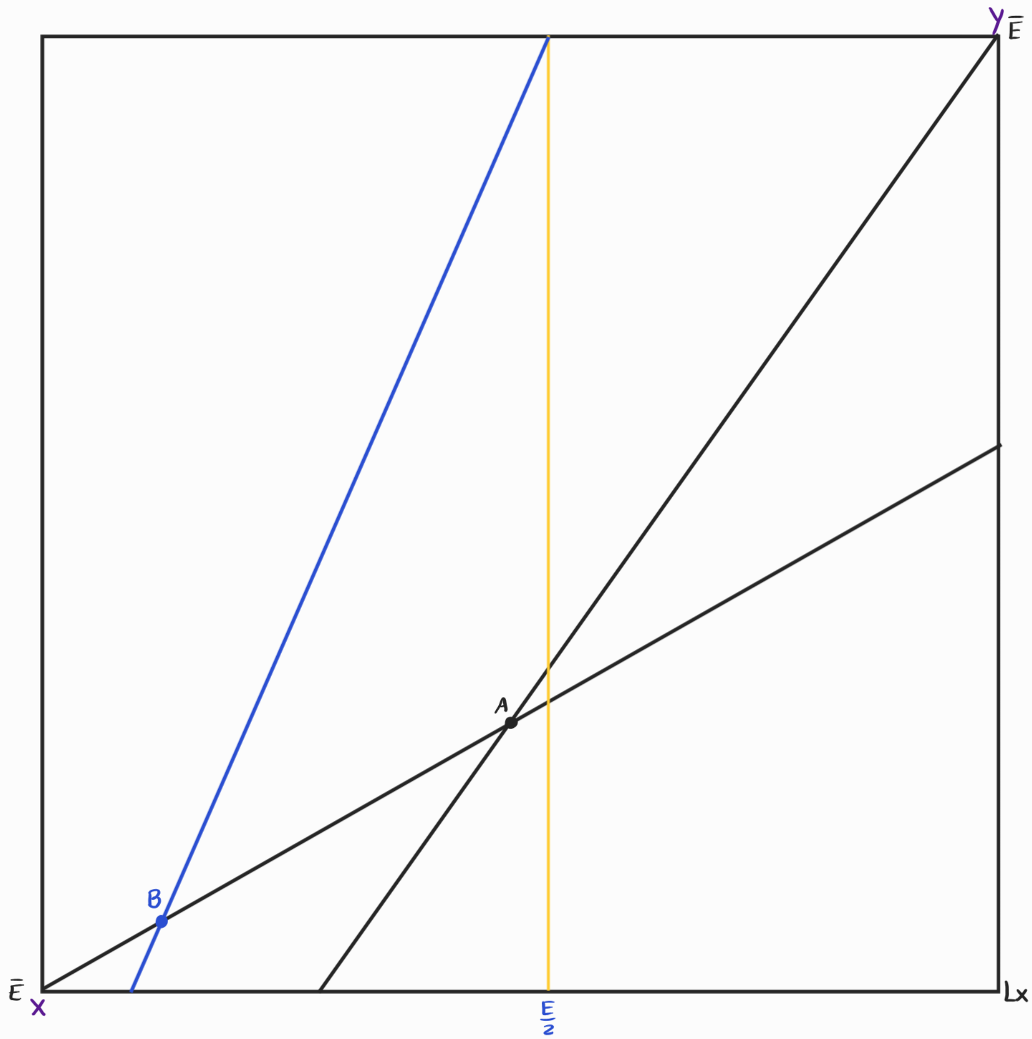
Si aumenta $\bar{L}$ (y suponiendo que el sector x es intensivo en trabajo y el sector "y" en capital) va a suceder que $\uparrow x \wedge \downarrow y$.

En nuestro ejemplo: (situación original)

Sea $\bar{E} = \bar{L} = \bar{K}$



Si $\bar{L}' = \frac{\bar{L}}{2}$ por ejemplo: (disminuye L)



Note que en B $\downarrow L_x \wedge \downarrow K_x$ por lo que $\downarrow X \wedge \uparrow L_y \wedge \uparrow K_y$ por lo que $\uparrow Y$.

Además, considerando que $P_x \wedge P_y$ se determina internacionalmente (son dados) entonces no hay cambios en $\frac{K_i}{L_i}$ $(i = x, y)$ ni en $\frac{W_L}{W_K}$. Los trabajadores están peor y los dueños del capital están igual.

12.4. Ejercicio

Un país consume 2 bienes, los cuales produce con n insumos de acuerdo con las siguientes teconologías:

$$x_i = \left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}\right]^2$$

La dotación de cada insumo viene dada por $\bar{Z}_i$.

1. Encuentre la producción en términos de las dotaciones.
2. Encuentre la curva de contrato

12.5. Ejercicio

Un país consume los bienes x, y, z, los cuales produce con los insumos trabajo (L), capital (K) y tierra (T) de acuerdo con las siguientes teconologías:

$$x = L_x^{\frac{1}{2}} K_x^{\frac{1}{4}} T_x^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad y = L_y^{\frac{1}{6}} K_y^{\frac{2}{3}} T_y^{\frac{1}{6}} \quad ; \quad z = L_z^{\frac{1}{8}} K_z^{\frac{1}{8}} T_z^{\frac{3}{4}}$$

El país está abierto al comercio internacional y los precios son $P_x = 1$, $P_y = 2$ y $P_z = 3$.

1. Si la cantidad de cada uno de los insumos es igual a 100, determine cuánto produciría esta economía de cada bien en el equilibrio general y cuáles serían los costos relativos de los insumos.
2. Si la cantidad de trabajo se duplica a 200, determine cuánto produciría de cada bien en el equilibrio general.

12.6. Ejercicio

Considere una economía que tiene las siguientes funciones de producción:

$$q_1 = L_1 + K_1 \qquad \wedge \qquad q_2 = 2L_2 + K_2$$

Se sabe que esta economía tiene una dotación de ambos factores de producción igual a 10 y se cumple que:

$$r < w < 2r$$

1. Determine la cantidad de producción de ambos bienes.
2. Demuestre que se cumple el teorema de Rybczynski.
3. Demuestre que se cumple el teorema Stolper-Samuelson.
4. Determine la veracidad de la siguiente proposición y justifique su respuesta.

   > Una política para incentivar la producción de q_2 es disminuir el salario *(ceteris paribus)*.

1)

Se sabe que $1 < \frac{w}{r} < 2$

$\Rightarrow q_1 = K_1 \quad \wedge \quad q_2 = 2L_2 \Rightarrow L_2 = \frac{q_2}{2}$

$\Rightarrow q_1 = 10 \quad \wedge \quad q_2 = 20$

2)
$\frac{\partial q_1}{\partial K} > 0 \quad , \quad \frac{\partial q_1}{\partial L} = 0 \quad , \quad \frac{\partial q_1}{\partial K} = 0 \quad , \quad \frac{\partial q_1}{\partial L} > 0$

Si $\uparrow K \Rightarrow \uparrow \frac{q_1}{q_2} \quad \wedge \quad$ si $\uparrow L \Rightarrow \uparrow \frac{q_2}{q_1}$

3)
$\frac{CM_1}{CM_2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{r q_1}{w q_2} = \frac{p_1}{p_2}$

$\frac{\partial \left(\frac{r}{w}\right)}{\partial \left(\frac{p_1}{p_2}\right)} = \frac{q_2}{q_1} > 0$

4) Falso, si w' cumple que $1 < \frac{w'}{r} < 2$ entonces no hay cambios y si $\frac{w'}{r} < 1$ entonces más bien podría llegar a disminuir porque q_1 ahora produciría con L y la dotación está dada.

12.7. Ejercicio

Un país produce dos bienes con las siguientes funciones de producción

$$q_1 = \left[L_1^{\frac{1}{2}} + K_1^{\frac{1}{2}}\right]^2 \qquad \wedge \qquad q_2 = \left[L_2^{\frac{1}{3}} + K_2^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

La dotación global de los insumos son $\bar{L}$ y $\bar{K}$ de trabajo y capital respectivamente.

1. Demuestre el teorema Stolper-Samuelson.

2. Demuestre el teorema de Rybczynski.

13. Costo en bienestar en Equilibrio General

13.1. Ejercicio

El individuo representativo de una economía tiene una función de utilidad representada por

$$U = \prod_{i=1}^{n} x_i^i$$

El costo marginal de producción de cada bien es constante e igual a 1 y el individuo tiene un ingreso igual a 100. Si el gobierno establece un impuesto unitario igual a i (o sea, 1 para el bien 1, 2 para el bien 2, 3 para el bien 3, etc.).

1. Determine el costo en bienestar en un modelo de equilibrio general para esta economía si la economía consisten de 3 bienes.
2. Determine el costo en bienestar en un modelo de equilibrio general para esta economía si la economía consisten de n bienes.

2)

$$TMS_{jk} = \frac{jX_K}{KX_j} = \frac{P_j}{P_K}$$

$$\Longrightarrow X_K = \frac{P_j \cdot K}{P_K \cdot j} \cdot X_j$$

$$U = \prod_{K=1}^{n} \left(\frac{P_j \cdot K}{P_K \cdot j} \cdot X_j \right)^K$$

$$U = \left(\frac{P_j}{j} X_j \right)^{\sum_{K=1}^{n} K} \prod_{K=1}^{n} \left(\frac{K}{P_K} \right)^K$$

$$X_j = \frac{j}{P_j} \left[U \cdot \prod_{K=1}^{n} \left(\frac{P_K}{K} \right)^K \right]^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

$$X_j = \frac{j}{P_j} \left[U^{\frac{2}{n(n+1)}} \cdot \prod_{K=1}^{n} \left(\frac{P_K}{K} \right)^{\frac{2K}{n(n+1)}} \right]$$

$$X_j = \frac{j}{P_j} \left[U^{\frac{2}{n(n+1)}} \left(\frac{P_j}{j} \right)^{\frac{2j}{n(n+1)}} \left(\frac{P_i}{i} \right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{K \neq j,i}^{n} \left(\frac{P_K}{K} \right)^{\frac{2K}{n(n+1)}} \right]$$

$$X_j = \left(\frac{P_j}{j} \right)^{\frac{2j}{n(n+1)} - 1} U^{\frac{2}{n(n+1)}} \left(\frac{P_i}{i} \right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{K \neq j,i}^{n} \left(\frac{P_K}{K} \right)^{\frac{2K}{n(n+1)}}$$

$$CB = \frac{-1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij} \gamma_i \gamma_j \right)$$

$$= \frac{-1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} S_{jj} \gamma_j^2 + \sum_{i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \gamma_i \gamma_j \right]$$

$$S_{jj} = \left(\frac{2j}{n(n+1)} - 1 \right) \left(\frac{P_j}{j} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{j} \left(\frac{P_j}{j} \right)^{\frac{2j}{n(n+1)} - 1} U^{\frac{2}{n(n+1)}} \cdot \left(\frac{P_i}{i} \right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{K \neq j,i}^{n} \left(\frac{P_K}{K} \right)^{\frac{2K}{n(n+1)}}$$

$$S_{jj} = \left(\frac{2j}{n(n+1)} - 1\right) p_j^{-1} X_j^H$$

$$X_j = \left(\frac{p_j}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)} - 1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \cdot \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i}^{n} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}}$$

$$S_{ji} = \frac{2i}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)} - 1} \left(\frac{p_j}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)} - 1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i}^{n} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}}$$

$$S_{ji} = \frac{2i}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{p_i}{i}\right)^{-1} \frac{1}{i} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \left(\frac{p_j}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)} - 1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i}^{n} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}}$$

$$S_{ji} = \frac{2i}{n(n+1)} \cdot p_i^{-1} \cdot X_j^H$$

$$S_{ij} = \frac{2j}{n(n+1)} \cdot p_j^{-1} \cdot X_i^H$$

$$CB = \frac{-1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2j}{n(n+1)} - 1\right) p_j^{-1} X_j^H \, j^2 + \sum_{i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{2j}{n(n+1)} \cdot p_j^{-1} \cdot X_i^H \cdot i j \right]$$

13.2. Ejercicio

El individuo representativo de una economía tiene una función de utilidad representada por

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - \frac{1}{\prod_{i=2}^{n} x_i}$$

El costo marginal de producción de cada bien es constante e igual a 1. Si el gobierno establece un impuesto unitario igual a i (o sea, 1 para el bien 1, 2 para el bien 2, 3 para el bien 3, etc.).

1. Determine el costo en bienestar en un modelo de equilibrio general para esta economía si la economía consisten de 3 bienes.
2. Determine el costo en bienestar en un modelo de equilibrio general para esta economía si la economía consisten de n bienes.

$$TMS_{1j}=\frac{1}{\prod_{i=2}^{n}x_i^{-2}\cdot\prod_{\substack{i=2\\i\neq j}}^{n}x_i}=\frac{1}{x_j^{-2}\cdot\frac{1}{\prod_{\substack{i=2\\i\neq j}}x_i^{2}}\cdot\prod_{\substack{i=2\\i\neq j}}^{n}x_i}=x_j\prod_{i=2}^{n}x_i=\frac{p_1}{p_j}$$

$$TMS_{jk}=\frac{x_k\prod_{i=2}^{n}x_i}{x_j\prod_{i=2}^{n}x_i}=\frac{p_j}{p_k}\Rightarrow x_k=\frac{p_j x_j}{p_k}$$

Combinando

$$x_j\prod_{i=2}^{n}\frac{p_j x_j}{p_i}=\frac{p_1}{p_j}$$

$$\Rightarrow p_j^{n-1}x_j^{n}\prod_{i=2}^{n}p_i^{-1}=\frac{p_1}{p_j}\Rightarrow p_j^{n}x_j^{n}=p_1\prod_{i=2}^{n}p_i$$

$$\Rightarrow x_j=\frac{p_1^{\frac{1}{n}}\prod_{i=2}^{n}p_i^{\frac{1}{n}}}{p_j}\Rightarrow x_j=\frac{\prod_{i=1}^{n}p_i^{\frac{1}{n}}}{p_j}$$

$$U=x_1-\frac{1}{\prod_{j=2}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}p_i^{\frac{1}{n}}}{p_j}}\Rightarrow u=x_1-\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}p_i^{\frac{n-1}{n}}\cdot\prod_{j=2}^{n}p_j^{-1}}\Rightarrow u=x_1-\frac{1}{p_1^{1-\frac{1}{n}}\cdot\prod_{i=2}^{n}p_i^{1-\frac{1}{n}}\cdot\prod_{j=2}^{n}p_j^{-1}}$$

$$\Rightarrow u=x_1-\frac{1}{p_1^{1-\frac{1}{n}}\cdot\prod_{i=2}^{n}p_i^{-\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow x_1=u+\frac{\prod_{i=2}^{n}p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow x_1=u+\frac{\prod_{i=1}^{n}p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1}$$

$$X_1 = U + \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1} \quad \wedge \quad X_j = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_j}$$

$$CB = \frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\,\gamma_i\,\gamma_j$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} S_{1j}\,\gamma_1\,\gamma_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\,\gamma_i\,\gamma_j\right]$$

$$= \frac{-1}{2}\left[S_{11}\,\gamma_1^{2} + \sum_{j=2}^{n} S_{1j}\,\gamma_1\,\gamma_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\,\gamma_i\,\gamma_j\right]$$

$$= \frac{-1}{2}\left[S_{11}\,\gamma_1^{2} + \sum_{j=2}^{n} S_{1j}\,\gamma_1\,\gamma_j + \sum_{i=2}^{n} S_{ii}\,\gamma_i^{2} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j\neq i}^{n} S_{ij}\,\gamma_i\,\gamma_j\right]$$

$$X_1 = U + \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1} \quad \wedge \quad X_j = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_j}$$

$$S_{11} = \left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1^{2}} \qquad S_{jj} = \left(\frac{1}{n}-1\right)\cdot\frac{X_j}{p_j}$$

$$S_{1j} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1 p_j} \qquad S_{ji} = \frac{1}{n}\,\frac{X_j}{p_i}$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1^{2}} + \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\frac{1}{n}}}{p_1 p_j}\cdot j + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdot\frac{X_i}{p_i}\cdot 1^{2} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{1}{n}\,\frac{X_i}{p_j}\cdot 1\cdot j\right]$$

14. Apéndice

14.1. Propiedades de la sumatoria

Las siguientes son algunas propiedades básicas de la sumatoria:

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

2. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{con} \qquad c \in \mathbb{R}$

3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

4. $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_i$

5. $\sum_{i=1}^{n} k = nk \qquad \text{con} \qquad k \in \mathbb{R}$

6. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$

7. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

8. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

9. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

10. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \neq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

11. $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$

14.2. Propiedades de la multiplicatoria

Las siguientes son algunas propiedades básicas de la multiplicatoria:

1. $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$

2. $\prod_{i=1}^{n} ca_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{con} \qquad c \in \mathbb{R}$

3. $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_j \cdot \prod_{i=1, i\neq j}^{n} a_i$

4. $\prod_{i=1}^{n} k = k^n$ con $k \in \mathbb{R}$

5. $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_k$

6. $\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$

7. $\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i}$

8. $\prod_{i=1}^{n} z^{a_i} = z^{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

9. $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

10. $\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} b_i}{\prod_{i=1}^{n} a_i}$

14.3. Método Karush-Kuhn-Tuker

14.3.1. Ejercicio

Un consumidor le encanta la comida, le gusta la comida sana (x_1), pero también la comida rápida (x_2). Es tal el caso, que el consumidor tiene preferencias por comida sana y rápida dadas por:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \qquad \text{con} \qquad \alpha \in]0,1[$$

Sin embargo, el doctor le prohíbe consumir más de una cuarta parte de su ingreso en comida rápida.

1. Plantee el problema del consumidor.
   Para la solución de este ejercicio se simplificará el ingreso a 1, la interpretación de esto corresponderá a que todo el ingreso refleja un 100 % (esto es $m = 1$). La restricción vendría dada porque el gasto en comida rápida sea menor a un 25 % (esto es que $p_2 x_2 \leq \frac{1}{4}$).
   El problema del consumidor correspondería a:

$$\max_{x_1,\, x_2} \left\{ x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \right\} \quad \text{s.a} \quad 1 = p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad \wedge \qquad p_2 x_2 \leq \frac{1}{4}$$

   La segunda restricción se puede escribir como $\frac{1}{4} - p_2 x_2 \geq 0$.

2. Plantee el lagrangeano asociado al problema.
   El lagrangeano asociado al problema es:

$$\mathcal{L} = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda \left(1 - p_1 x_1 - p_2 x_2\right) + \mu \left(0,25 - p_2 x_2\right)$$

3. Encuentre las condiciones de primer orden (CPO) y las condiciones de holgura complementaria (CHC).
   Las condiciones de primer orden corresponden a:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{x_1} : \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \\
&\mathcal{L}_{x_2} : (1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 - \mu p_2 = 0 \\
&\mathcal{L}_{\lambda} : 1 - p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0 \\
&\mathcal{L}_{\mu} : \frac{1}{4} - p_2 x_2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

   La Condición de Holgura Complementaria (c.h.c) es:

$$\mu \left(\frac{1}{4} - p_2 x_2 \right) = 0$$

4. Analice cada uno de los casos y encuentre su solución.
   Primero, se analizará el problema geométricamente para tener mayor intuición.

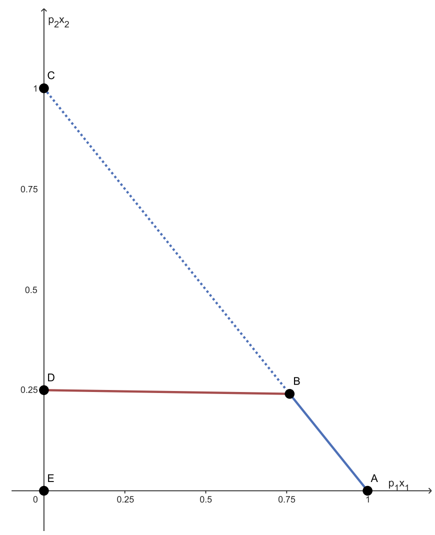


Figura 1: Restricción presupuestaria del problema

El segmento AC corresponde a la restricción presupuestaria, pero dado que tiene la restricción de consumo de comida rápida entonces la restricción final (combinando la restricción presupuestaria y la restricción de comida rápida) es el segmento ABD, todos los puntos que pertenecen al área ABDE son alcanzables para el consumidor. El área BCD son puntos que el consumidor no puede consumir dada la restricción de comida rápida pero que sí puede pagar dado su ingreso.
Geométricamente pueden existir tres puntos "óptimos" de consumo dada la restricción presupuestaria que corresponde a:

a) Cualquier punto en el segmento AB sin incluir el punto B.

b) El punto B.

c) Cualquier punto en el segmento BC sin incluir el punto B, pero dado que tiene la restricción de comida rápida entonces consumiría en el punto más cercano alcanzable que es el punto B.

La condición de holgura complementaria es $\mu\left(\frac{1}{4}-p_2x_2\right)=0$, para que se cumple debe ser que $\left(\frac{1}{4}-p_2x_2\right)>0 \quad \wedge \quad \mu=0$ (que es el primer caso analizado geométricamente) o que $\left(\frac{1}{4}-p_2x_2\right)=0 \quad \wedge \quad \mu=0$ (que es el segundo caso) o que $\left(\frac{1}{4}-p_2x_2\right)=0 \quad \wedge \quad \mu>0$ (que corresponde al tercer caso).
A los multiplicadores de lagrange, en muchos casos, se le puede dar la

interpretación del efecto que tiene "alivianar" la restricción sobre la función que se quiere optimizar. Por el ejemplo, λ en este caso representaría el efecto que tiene darle un "poco" más de ingreso a la utilidad del individuo. Para los dos primeros casos observe que μ es igual a 0 lo que indica que el efecto que tiene "suavizar" la restricción de la comida rápida es nulo, esto porque el individuo escogería un consumo óptimo de comida rápida menor a la que se le prohíbe por lo que la restricción le resulta indiferente, para el último caso el μ es positivo indicando que si se le "suaviza" la restricción de comida rápida el individuo estaría mejor.

Caso $\left(\frac{1}{4} - p_2x_2\right) > 0 \quad \wedge \quad \mu = 0$:

Las CPO asociadas a este caso corresponden a:

$$\mathcal{L}_{x_1} : \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0$$
$$\mathcal{L}_{x_2} : (1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 = 0$$
$$\mathcal{L}_{\lambda} : 1 - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

Combinando las primeras dos ecuaciones se obtiene la condición de optimalidad (CO):

$$x_2 = \frac{(1-\alpha)p_1}{\alpha p_2}x_1$$

Inyéctando la CO en la restricción se obtiene:

$$x_1 = \frac{\alpha}{p_1} \qquad \wedge \qquad x_2 = \frac{1-\alpha}{p_2}$$

Observe que para que se dé este caso se debe cumplir que:

$$\frac{1}{4} > p_2x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} > 1-\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha > \frac{3}{4}$$

Caso $\left(\frac{1}{4} - p_2x_2\right) = 0 \quad \wedge \quad \mu = 0$:

$$p_2x_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 = p_1x_1 + \frac{1}{4}$$
$$x_1 = \frac{3}{4p_1} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{1}{4p_2}$$

Este caso corresponde a cualquier caso en donde $1-\alpha > \frac{1}{4}$.

Caso $\left(\frac{1}{4} - p_2x_2\right) = 0 \quad \wedge \quad \mu > 0$:

Misma solución algebraica del caso anterior; sin embargo, se sabe que la interpretación económica es distinta.

14.3.2. Ejercicio

Un consumidor tiene las siguientes preferencias por los bienes x_1 y x_2:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_1^{\frac{1}{2}} x_2$$

Este consumidor toma sus decisiones considerando que gasta todo su ingreso y que el consumo de los bienes no es negativo (condición de no negatividad en el consumo de los bienes) pero podría ser 0.

1. Plantee el problema del consumidor.
2. Plantee el lagrangeano asociado al problema.
3. Encuentre las condiciones de primer orden (CPO) y las condiciones de holgura complementaria (CHC).
4. Analice cada uno de los casos y encuentre su solución.

1) $\max\limits_{x_1,x_2}\left\{\sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_1}\right\}$ s.a $m=p_1x_1+p_2x_2 \quad \wedge \quad x_1\geq 0 \quad \wedge \quad x_2\geq 0$

2) $\mathcal{L}: \sqrt{x_1}+x_2\sqrt{x_1}+\lambda\left(m-p_1x_1-p_2x_2\right)+\mu_1x_1+\mu_2x_2$

3)

$$\text{CPO}\begin{cases}\mathcal{L}_{x_1}: \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}\left(1+x_2\right)-\lambda p_1+\mu_1=0\\ \mathcal{L}_{x_2}: \sqrt{x_1}-\lambda p_2+\mu_2=0\\ \mathcal{L}_{\lambda}: m-p_1x_1-p_2x_2=0\\ \mathcal{L}_{\mu_1}: x_1\geq 0\\ \mathcal{L}_{\mu_2}: x_2\geq 0\end{cases}$$

CHC $\left\{\mu_1x_1=0 \quad \wedge \quad \mu_2x_2=0\right.$ (técnicamente hay 3^2 casos)

Note que si $x_1=0 \Rightarrow \mathcal{L}_{x_1}\rightarrow\infty$ (y no se cumple la condición de primer orden de que sea igual a cero). Por lo tanto $\mu_1=0$.

Sólo nos quedarían 3 posibles casos.

4)

Caso $\mu_1=0 \quad \wedge \quad \left(x_2>0\Rightarrow\mu_2=0\right)$

Las CPO quedarían

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_{x_1}: \frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}\left(1+x_2\right)-\lambda p_1=0\\ \mathcal{L}_{x_2}: \sqrt{x_1}-\lambda p_2=0\end{array}\right\}\frac{\frac{1}{2}x_1^{-\frac{1}{2}}\left(1+x_2\right)}{\sqrt{x_1}}=\frac{p_1}{p_2}\Rightarrow\frac{1}{2}\left(1+x_2\right)p_2=p_1x_1$$

$$\mathcal{L}_{\lambda}: m-p_1x_1-p_2x_2=0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}(1+x_2)p_2 + p_2x_2$$

$$m - \frac{1}{2}p_2 = \frac{3}{2}p_2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{2m}{3p_2} - \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{p_2+m}{3p_1}$$

¿Cuándo estaríamos en ese caso?

Si $x_2 > 0 \Rightarrow \frac{2m}{3p_2} - \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow m > \frac{p_2}{2}$

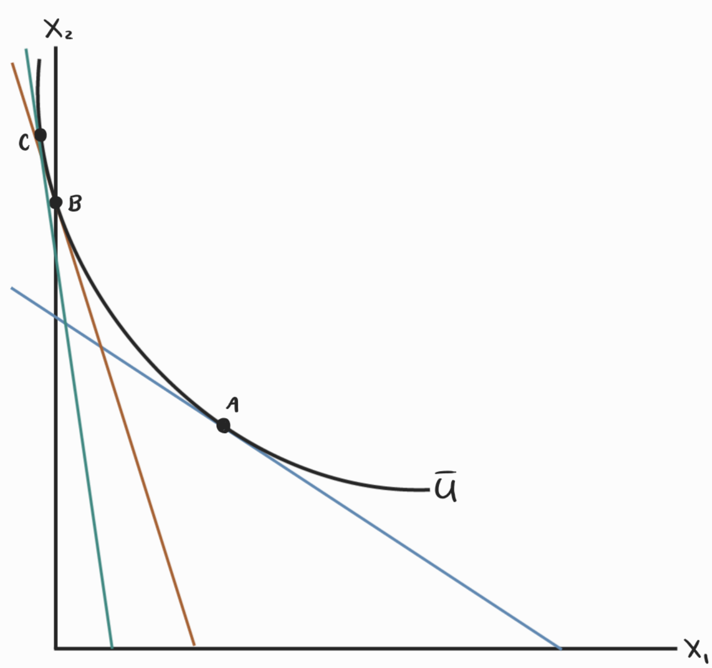
Caso $\mu_1 = 0 \wedge (\mu_2 = 0 \wedge x_2 = 0)$

$x_1 = \frac{m}{p_1} \wedge x_2 = 0$ (caso $m = \frac{p_2}{2}$)

Caso $\mu_1 = 0 \wedge (\mu_2 > 0 \Rightarrow x_2 = 0)$

$x_1 = \frac{m}{p_1} \wedge x_2 = 0$ (caso $m < \frac{p_2}{2}$)

Gráficamente, los casos serían:



14.3.3. Ejercicio

Un consumidor tiene las siguientes preferencias por los bienes x_1 y x_2:

$$U(x_1, x_2) = x_1 + ln(x_2)$$

1. Encuentre las cantidades óptimas de consumo para cada uno de los posibles casos dada la restricción presupuestaria.

Truco para resolver fácil:

Si $\lim\limits_{x_i \to 0} UM_i \to \infty$ entonces $x_i > 0$

Si $UM_i > 0$ para algún x_i entonces se gasta todo su ingreso.

Si $UM_i = c$ con $c \in \mathbb{R}^+$ entonces puede haber solución de esquina en x_i.

$UM_1 = 1 \quad \wedge \quad UM_2 = \frac{1}{x_2}$

Note que $\lim\limits_{x_2 \to 0} \frac{1}{x_2} \to \infty$ por lo que $x_2 > 0$.

Además, $UM_1 = 1$ por lo que puede ser que $x_1 = 0$.

$$TMS_{12} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x_2}} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_1 = \frac{m - p_1}{p_1}$$

¿Cuándo $x_1 > 0$? Cuándo $\frac{m - p_1}{p_1} > 0 \Rightarrow \frac{m}{p_1} > 1 \Rightarrow m > p_1$

Caso $m \leq p_1$:

$x_2 = \frac{m}{p_2} \quad \wedge \quad x_1 = 0$

14.3.4. Ejercicio

Un consumidor tiene las siguientes preferencias por los bienes:

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} ln(x_i)$$

Este consumidor toma sus decisiones considerando su restricción presupuestaria y que el consumo de los bienes no es negativo (condición de no negatividad en el consumo de los bienes) pero podría ser 0.

1. Plantee el problema del consumidor.
2. Plantee el lagrangeano asociado al problema.
3. Encuentre las condiciones de primer orden (CPO) y las condiciones de holgura complementaria (CHC).
4. Analice cada uno de los casos y encuentre su solución.

1)

Dado que $UM_1 = 1$ se sabe que $m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ (no que $m > \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$)

$$\max_{x_j, \forall j} \left\{ x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i \right\} \quad \text{s.a} \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \wedge \quad \mu_j x_j = 0 \ , \ \forall j$$

2)

$$\mathcal{L}: x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i + \lambda\left(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

3)

$$\text{CPO} \begin{cases} \mathcal{L}_1 : 1 - \lambda p_1 + \mu_1 = 0 \\ \mathcal{L}_i : \frac{1}{x_i} - \lambda p_i + \mu_i = 0 \quad \forall i > 1 \\ \mathcal{L}_\lambda : m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \\ \mathcal{L}_{\mu_j} : x_j \geq 0 \ , \ \forall j \end{cases}$$

$$\text{CHC} \{ \mu_j x_j = 0 \ , \ \forall j$$

Note que si $x_i = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_i \to \infty$ (lo que equivale a $\lim_{x_i \to 0} UM_i \to \infty$) por lo que $x_i > 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \ , \ \forall i > 1$

Caso $(x_1 > 0 \Rightarrow \mu_1 = 0) \wedge \mu_i = 0 \quad \forall i > 1$

$$\Rightarrow \text{CPO} \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_1 : 1 - \lambda p_1 = 0 \\ \mathcal{L}_i : \frac{1}{x_i} - \lambda p_i = 0 \end{array}\right\} \frac{1}{\frac{1}{x_i}} = \frac{p_1}{p_i} \Rightarrow x_i = \frac{p_1}{p_i} \\ \mathcal{L}_\lambda : m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i \frac{p_1}{p_i} \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1} - (n-1) \quad \left(x_1 > 0 \ \text{si} \ \frac{m}{p_1} > n-1 \right)$$

Caso $(\mu_1 = 0$ y/o $x_1 = 0) \wedge \mu_i = 0 \quad \forall i > 1$

Este caso sería si $\frac{m}{p_1} \leq n-1$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_i : \frac{1}{x_i} - \lambda p_i = 0 \\ \mathcal{L}_j : \frac{1}{x_j} - \lambda p_j = 0 \end{array}\right\} \frac{x_j}{x_i} = \frac{p_i}{p_j}$$

$$\Rightarrow m = \sum_{i=2}^{n} p_j x_j \Rightarrow m = (n-1) x_i p_i \Rightarrow x_i = \frac{m}{(n-1) p_i}$$

14.4. Hessiano Orlado

La importancia de esta herramienta es que permite determinar si la solución a un problema de maximización sujeto a restricciones que se cumplen con igualdad son efectivamente máximos o mínimos locales. [1]

Sea n el número de variables y m el número de restricciones en el problema de maximización, se tiene que las condiciones de primer orden corresponden a:

$$\nabla f\left(x^{*}\right)+\sum_{i=1}^{m} \lambda_{i}^{*} \nabla g_{i}\left(x^{*}\right)=\overline{0}$$

Se define el Hessiano Orlado como:

$$\bar{H}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} \overline{0}_{m\times m} & \nabla g(x)^{T}_{m\times n} \\ \nabla g(x)_{n\times m} & H_{\mathcal{L}}(x)_{n\times n} \end{pmatrix}$$

Su forma extendida para n variables y m restricciones viene dada por:

$$H_{\mathcal{L}}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial {g^m}^m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g^1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Luego, se define el menor principal líder de orden j, denotado por $\bar{D}_j$, como el determinante de la submatriz $H_{\mathcal{L}}$ eliminando las últimas $m+n-j$ filas y columnas.

Condiciones suficientes

Si $\bar{x}^*$ cumple con las condiciones de primer orden y llamamos $\bar{D}_j$ con $j=1,\dots,m+n$ los menores principales de $H_{\mathcal{L}}$ entonces:

- Si los menores principales $\bar{D}_j$ para $j=2m+1,\dots,m+n$ de $H_{\mathcal{L}}$ tienen todos el mismo signo que $(-1)^m$ entonces se cumple que x^* es mínimo local estricto.
- Si los menores principales $\bar{D}_j$ para $j=2m+1,\dots,m+n$ de $H_{\mathcal{L}}$ tienen signos alternos siendo el primero $\bar{D}_{2m+1}$ el de $(-1)^{m+1}$ entonces se cumple que x^* es máximo local estricto.

[1] En el siguiente video puede encontrar una explicación más detallada del tema: presione aquí

14.4.1. Ejemplo con n=3 y m=1

El Hessiano Orlado para el caso de 3 variables y 1 restricción corresponde a:

$$\bar{H}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3 & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{pmatrix}$$

Donde g_i corresponde a $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ y $\mathcal{L}_{jk}$ corresponde a $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_j \partial x_k}$.
Los menores principales líderes son:

$$\bar{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} \end{vmatrix}, \quad \bar{D}_3 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ g_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{vmatrix}, \quad \bar{D}_4 = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} \\ g_2 & \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} \\ g_3 & \mathcal{L}_{31} & \mathcal{L}_{32} & \mathcal{L}_{33} \end{vmatrix}$$

Para verificar que la solución al problema de maximización sujeto a las restricción con igualdad:

- Es un máximo local estricto se debe cumplir que $\bar{D}_3 > 0$ y $\bar{D}_4 < 0$.
- Es un mínimo local estricto se debe cumplir que $\bar{D}_3 < 0 \quad \wedge \quad \bar{D}_4 < 0$.

14.4.2. Ejercicio

Considere que se quiere optimizar $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sujeto a $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$.

Solución:

El lagrangeano asociado corresponde a:

$$\mathcal{L} = x_1 x_2 + \lambda \left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$$

Las condiciones de primer orden (CPO) son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= 0 \Rightarrow x_2 + 2\lambda x_1 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 0 \Rightarrow x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Despejando para λ de las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\lambda = \frac{-x_2}{2x_1} \qquad \wedge \qquad \lambda = \frac{-x_1}{2x_2} \\
&\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \\
&\Rightarrow 2x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = x_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Por lo que existen 4 puntos que satisfacen las condiciones de primer orden, los cuales son: $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ y $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$.

Ahora, se va a verificar las condiciones de segundo orden (CSO) para el punto $(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ por lo que se utilizará el Hessiano Orlado.

$$m = 1 \quad \wedge \quad n = 2$$

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= x_2 + 2\lambda x_1 \\
\mathcal{L}_2 &= x_1 + 2\lambda x_2 \\
\mathcal{L}_{11} &= 2\lambda \\
\mathcal{L}_{12} &= 1 \\
\mathcal{L}_{21} &= 1 \\
\mathcal{L}_{22} &= 2\lambda
\end{aligned}$$

El Hessiano Orlado es:

$$\bar{H}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2\lambda & 1 \\ 2x_2 & 1 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\bar{H}_{\mathcal{L}}\left(\lambda = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & 1 & 1 \\ \frac{-2}{\sqrt{2}} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que hay se tiene una restricción, dos variables y que $\bar{D}_3 = -8$ entonces el punto $(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ es mínimo local estricto.

14.4.3. Ejercicio

Considere un individuo que tiene una utilidad dada por $U(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\ln x_1 + \ln x_2$, este individuo tiene un ingreso de 100 unidades monetarias y se sabe que los precios de ambos bienes son igual a 1.

El problema de maximización es:

$$\max_{x_1, x_2} \left\{ \frac{1}{4}\ln x_1 + \ln x_2 \right\} \quad \text{s.a} \quad 100 = x_1 + x_2$$

El lagrangeano asociado es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\ln x_1 + \ln x_2 + \lambda\left[100 - x_1 - x_2\right]$$

CPO :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &\equiv \mathcal{L}_1 = \frac{1}{4x_1} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &\equiv \mathcal{L}_2 = \frac{1}{x_2} - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &\equiv \mathcal{L}_\lambda = 100 - x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}$$

Despejando λ de las dos primeras ecuaciones, combinando ambas ecuaciones e inyectando en la restricción se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lambda = \frac{1}{4x_1} \quad \wedge \quad \lambda = \frac{1}{x_2} \Rightarrow 4x_1 = x_2 \\
&\Rightarrow 100 = 5x_1 \Rightarrow x_1 = 20 \quad \wedge \quad x_2 = 80 \quad \wedge \quad \lambda = \frac{1}{80}
\end{aligned}$$

Verificando que la solución encontrada es efectivamente un máximo local:

$$m = 1 \quad \wedge \quad n = 2$$

$$\bar{H}_{\mathcal{L}}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{4x_1^2} & 0 \\ 1 & \frac{-1}{x_2^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Evalúando el Hessiano Orlado en el óptimo encontrado se obtiene:

$$\Rightarrow \bar{H}_{\mathcal{L}}(\vec{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{4 \cdot 20^2} & 0 \\ 1 & \frac{-1}{80^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Para que sea máximo local, dado que $m = 1$ y $n = 2$, se debe de cumplir que $\bar{D}_3 > 0$.

$$\bar{D}_3 = \frac{3}{6400} > 0.$$

Lo que implica que efectivamente el consumo de 20 unidades de x_1 y 80 unidades de x_2 maximiza la utilidad del individuo sujeto a la restricción presupuestaria.