Pauta examen 2

[Última versión compilada: 13 de julio de 2022]

1. Preferencias reveladas

Usted tiene la siguiente información parcial sobre las compras de un consumidor (el consume solo 2 bienes):

	Año 1		Año 2	
	Cantidad	Precio	Cantidad	Precio
Bien 1	100	100	120	100
Bien 2	100	100	α	80

¿Qué rango de valores puede adquirir α para que usted puede concluir que:

(a) este comportamiento contradice el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas (ADRP)?
Se analizan dos casos:
Caso 1:

$$100 \times 100 + 100 \times 100 > 120 \times 100 + 100\alpha$$

$$20000 > 12000 + 100\alpha \implies \alpha < 80$$

Para el otro índice debe de cumplirse

$$100 \times 80 + 100 \times 100 > 100 \times 120 + 80\alpha$$

$$\implies 18000 > 12000 + 80\alpha \implies 75 > \alpha$$

Por lo tanto se contradice el Axioma Débil $75 \leq \alpha \leq 80$
Caso 2:
En este caso

$$20000 < 12000 + 100\alpha \implies \alpha > 80$$

En este caso, se cumple el Axioma Débil siembre que $\alpha > 80$.

(b) la canasta del año 1 es revelada como preferida sobre la canasta del año 2?
Esto se cumple para $\alpha < 75$.

(c) la canasta del año 2 es revelada como preferida sobre la canasta del año 1?
Esto se cumple para $\alpha > 80$.

(d) existe insuficiente información para justificar a., b. y/o c?
No, existe la suficiente información para justificar los tres incisos.

(e) el bien 1 en un bien inferior a algún precio para este consumidor (asuma que se cumple con el ADPF)?
En este caso es inferior para $\alpha < 100$.

(f) el bien 2 en un bien inferior a algún precio para este consumidor (asuma que se cumple con el ADPF)?
Si se cumpliera el ADPF se tendría que para $80 < y < 100$

$$100 \cdot 100 + 80 \cdot 100 \leq 100 \cdot 120 + 80\alpha$$

$$100 \cdot 120 + 100\alpha > 100 \cdot 100 + 100 \cdot 100$$

La riqueza aumenta de y_1 a y_2 y el precio relativo de 2 baja junto con el consumo porque $\alpha < 100$. El efecto riqueza es negativo y por lo tanto es un bien inferior.

2. Teoría de la producción:

Una empresa presenta la siguiente función de producción, en términos de z_i insumos:

$$q = z_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(z_i - 1) \quad z_i > i > 0 \ \forall i$$

(a) a. ¿Qué tipo de rendimientos a escala presenta esta función? Debe probar su respuesta.
La función de producción no es homogénea por lo tanto se emplea la elasticidad del producto total.
Para ello calculamos la elasticidad para cada insumo.

$$\epsilon_{q,z_i} = \frac{1}{\frac{z_1 + \sum ln(z_i - i)}{z_1}} = \frac{z_1}{q}$$

$$\epsilon_{q,z_j} = \frac{\frac{1}{z_j - j}}{\frac{z_1 + \sum ln(z_i - i)}{z_j}} = \frac{z_1}{(z_j - j)q}$$

Inyectándo en la fórmula para elasticidad producto total se tiene

$$\epsilon_{PT} = \frac{\left(z_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{z_i}{z_i - i}\right)}{q}$$

Por lo tanto note que la función de producción posee rendimientos a escala variables que dependen del uso de los factores. Esto se puede caracterizar aún más.

(b) Encuentre la función de costo para esta empresa.
Igualando la tasa marginal de transformación a los costos

$$z_i - i = \frac{w_1}{w_i} \implies q = z_1 + \sum_{i=2}^{n} ln\left(\frac{w_1}{w_i}\right)$$

Inyectándo en la función de costos se tiene

$$CT^* = w_1 \left(q - \sum_{i=2}^{n} ln\left(\frac{w_1}{w_i}\right) + \right) + \sum_{i=2}^{n} w_i \left(\frac{w_1}{w_i} - i\right)$$

(c) ¿Qué tipo de economías a escala presenta la función de costos?
Resta con dividir los costos totales por q

$$CP = w_1 + \frac{(n-1)w_1 + \sum_{i=2}^{n} i \cdot w_i - w_1 \sum_{i=2}^{n} ln(w_1) + w_1 \sum_{i=2}^{n} ln(w_i)}{q}$$

$$CP = w_1 + \frac{(n-1)w_1 + \sum_{i=2}^{n} i \cdot w_i - w_1(n-1)ln(w_1) + w_1 \sum_{i=2}^{n} ln(w_i)}{q}$$

$$CP = w_1 + \frac{(n-1)w_1(1 - ln(w_1)) + \sum_{i=2}^{n} i \cdot w_i + w_1 \sum_{i=2}^{n} ln(w_i)}{q}$$

Luego al sacar derivada va a depender del elemento en el numerador si se es menor o mayor a 0.

(d) Encuentre la elasticidad de sustitución entre los insumos i y j, cuando $i = 1$ y cuando $i \neq 1$.

$$z_i^c = \frac{w_1}{w_i} + i \implies \eta_{i1}^c = \frac{1}{w_i}\frac{w_1}{\frac{w_1}{w_i} + i} = \frac{w_1}{w_1 + iw_i}$$

$$\eta_{ij} = 0$$

$$\eta_{ii} = -\frac{w_1}{w_i^2}\frac{w_i}{\frac{w_1}{w_i} + i} = -\frac{w_1}{w_1 + iw_i}$$

$$\eta_{11} = \frac{-(n-1)}{w_1}\frac{w_1}{z_1}$$

Entonces con la fórmula $\sigma_{ij} = \eta_{ji} - \eta_{ii}$. Para $i \neq j \neq 1$ y para $i \neq 1$ respectivamente.

$$\sigma_{ij} = 0 - -\frac{w_1}{w_1 + iw_i} = \frac{w_1}{w_1 + iw_i}$$

$$\sigma_{1i} = \frac{w_1}{w_1 + iw_i} + \frac{(n-1)}{z_1}$$

(e) e. Para $i \neq 1$, encuentre la elasticidad cruzada de la Demanda Condicionada de cada insumo. En este caso

$$\eta_{ij} = 0 \quad i \neq j \neq 1$$

3. Monopolio

Un monopolista a n consumidores donde la demanda del consumidor i está dada por:

$$q_i = \frac{1}{p_i^2} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La función de costos totales viene dada por

$$CT = \frac{Q^2}{Q}$$

(a) Encuentre la cantidad y el precio que cobraría en este mercado si el monopolista no puede discriminar entre consumidores.
Si no existe discriminación

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_n$$

Por lo tanto

$$\sum_i q_i = \sum_i \frac{i}{P_i^2}$$

Es decir

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n i}{P^2} = \frac{n(n+1)}{2P^2}$$

$$P^2 = \frac{n(n+1)}{2Q} \implies P = \left[\frac{n(n+1)}{2Q}\right]^{\frac{1}{2}}$$

El ingreso marginal igual al costo marginal viene dado por

$$IM = \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2Q}\right]^{\frac{1}{2}} = Q$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = Q^3 \implies Q = \frac{[n(n+1)]^{\frac{1}{3}}}{2}$$

Finalmente

$$P = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(b) b. Encuentre la cantidad y el precio que vendería a cada consumidor si puede discriminar entre ellos y no existe posibilidad de arbitraje.

En este caso se cobra un precio distinto a cada consumidor.Por lo tanto se procede a calcular el ingreso total

$$IT = q_i P_i = \left(\frac{i}{q_i}\right)^{\frac{1}{2}} q_i = (iq_i)^{\frac{1}{2}}$$

Derivando respecto a q_i se obtiene el ingreso marginal y se iguala al costo marginal.

$$IM_i = \frac{1}{2}\frac{i^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}} = Q \implies \frac{i}{q_i} = 4Q^2 \implies q_i = \frac{i}{4Q^2}$$

Sumando sin pérdida de generalidad a través de las i

$$\sum_i q_i = \sum_i \frac{i}{4Q^2} \implies \frac{1}{4Q^2}\frac{n(n+1)}{2} = Q$$

$$Q = \frac{[n(n+1)]^{\frac{1}{3}}}{2}$$

Finalmente, la cantidad individual para cada consumidor es

$$q_i = \frac{i}{4\frac{[n(n+1)]^{\frac{2}{3}}}{4}} = \frac{i}{[n(n+1)]^{\frac{2}{3}}}$$

Con esta se obtiene el precio específico

$$P_i = \left(\frac{i}{\frac{i}{[n(n+1)]^{\frac{2}{3}}}}\right)^{\frac{1}{2}} = P_i[n(n+1)]^{\frac{1}{3}}$$