Instrucciones:

1. Conteste cada una de las preguntas.
2. Tome una fotografía a cada uno de los enunciados que se le asignará.
3. La primera pregunta se activará a las 8:00 am y una foto de la respuesta debe ser entregada antes de las 9:00 am al WhatsApp.
4. La segunda pregunta se activará a las 9:00 am y una foto de la respuesta debe ser entregada antes de las 10:00 am.
5. Cada minuto tarde en relación con la entrega de la fotografía mencionada en los puntos 3 y 4 será penalizado con 5 puntos de 100 de la calificación de cada respuesta.
6. Luego de enviar las fotografías, debe enviar un **<u>único</u>** archivo pdf con sus respuestas las cuales deben ser idénticas a las fotografías enviadas. Cualquier alteración en relación con las fotografías lo harán perder la totalidad de los puntos.
7. Estructura del pdf. El archivo pdf debe estructurarse de la siguiente manera:
   - Enunciado pregunta 1 – respuesta pregunta 1.
   - Enunciado pregunta 2 – respuesta pregunta 2.
8. El nombre del archivo pdf debe ser: Carné - Primer apellido, Segundo apellido, Nombre, carné. Ejemplo: C01234 - Alfaro Bravo Carla

1. Oligopolio de Cournot y Stackelberg

N empresas distintas compiten entre sí y enfrentan una misma demanda inversa de mercado representada por $P = a - Q$, donde Q es la producción combinada de todas la empresas. Lo que hace diferente a cada una de las empresas es su costo marginal, el cuál es igual a i. O sea, el costo marginal de la primera empresa es 1, el de la empresa 2 es 2 y así sucesivamente hasta que sea n para la empresa n.

a. Si las empresas compiten al estilo Cournot, encuentre el precio y la cantidad de equilibrio de mercado; así como la cantidad que produce la empresa y su ganancia.

$$\pi_i = \left(a - \sum_{j=1}^{n} q_j\right) q_i - i q_i$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - q_i - \sum_{j=1}^{n} q_j - i = 0 \rightarrow a - q_i - Q = i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a - q_i - Q) = \sum_{i=1}^{n} i \rightarrow na - \sum_{i=1}^{n} q_i - nQ = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$na - nQ - Q = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow (n+1)Q = na - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Q = \frac{n}{(n+1)} a - \frac{n}{2}; P = a - \left(\frac{n}{(n+1)} a - \frac{n}{2}\right) = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{2}$$

$$q_i = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{2} - i;\ \pi_i = \left(\frac{a}{n+1} + \frac{n}{2} - i\right)^2$$

b. Si las empresas compiten al estilo Stackelberg y la empresa j es la única líder, encuentre la producción y los precios de mercado; así como la cantidad que produce cada empresa y su ganancia.

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0 \rightarrow a - q_i - q_j - \sum_{k \neq j}^{n} q_k = i$$

$$\sum_{i \neq j}^{n} \left(a - q_i - q_j - \sum_{k \neq j}^{n} q_k\right) = \sum_{i \neq j}^{n} i$$

$$(n-1)a - \sum_{i \neq j}^{n} q_i - (n-1)q_j - (n-1) \sum_{i \neq j}^{n} q_i = \frac{n(n+1)}{2} - j$$

$$\rightarrow n \sum_{i \neq j}^{n} q_i = (n-1)a - (n-1)q_j - \frac{n(n+1)}{2} + j$$

$$\rightarrow \sum_{i \neq j}^{n} q_i = \frac{(n-1)}{n} a - \frac{(n-1)}{n} q_j - \frac{(n+1)}{2} + \frac{j}{n}$$

$$\pi_j = \left(a - q_j - \sum_{i \neq j}^{n} q_i\right) q_j - j q_j = \left[a - q_j - \left(\frac{(n-1)}{n} a - \frac{(n-1)}{n} q_j - \frac{(n+1)}{2} + \frac{j}{n}\right) - j\right] q_j$$

$$\pi_j = \left[\frac{a}{n} - \frac{q_j}{n} + \frac{(n+1)}{2} - \left(\frac{n-1}{n}\right) j\right] q_j$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} = \frac{a}{n} - \frac{2q_j}{n} + \frac{(n+1)}{2} - \left(\frac{n-1}{n}\right) j = 0$$

$$q_j = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \left(\frac{n-1}{2}\right) j$$

$$\sum_{i \neq j}^{n} q_i = \frac{(n-1)}{n} a - \frac{(n-1)}{n} \left[\frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \left(\frac{n-1}{2}\right) j\right] - \frac{(n+1)}{2} + \frac{j}{n}$$

$$\sum_{i \neq j}^{n} q_i = \frac{(n-1)}{n} \frac{a}{2} - \frac{(n^2-1)}{4} - \frac{(n+1)}{2} + \frac{(n-1)^2}{2n} j + \frac{1}{n} j$$

$$P = a - \frac{a}{2} - \frac{n(n+1)}{4} + \left(\frac{n-1}{2}\right) j - \frac{(n-1)}{n} \frac{a}{2} + \frac{(n^2-1)}{4} + \frac{(n+1)}{2} - \frac{(n-1)^2}{2n} j - \frac{1}{n} j$$

$$P = \frac{a}{2n} + \frac{(n+1)}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) j; Q = a\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \frac{(n+1)}{4} - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) j$$

$$q_i = a - Q - i = P - i = \frac{a}{2n} + \frac{(n+1)}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) j - i$$

$$\pi_i = \left(\frac{a}{2n} + \frac{(n+1)}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) j - i\right)^2$$

$$\pi_j = \left(\frac{a}{2n} + \frac{(n+1)}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) j - j\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \left(\frac{n-1}{2}\right) j\right)$$

2. Monopolista discriminador

Un monopolista suple a n consumidores, todos distintos, que presentan una demanda inversa igual a $P_i = ia - q_i$.

a. Si el monopolista tiene un costo marginal igual a c y decide discriminar precios utilizando una tarifa de dos tramos, ¿cuál es el precio que debe cobrarle a todos los consumidores para maximizar su ganancia? (Asuma $P < a$)

$$\pi = n\left(\frac{1}{2}\right)(a - P)q_1 + (P - c)\sum_{i=1}^{n} q_i$$

$$\pi = n\left(\frac{1}{2}\right)(a - P)(a - P) + (P - c)\sum_{i=1}^{n}(ia - P)$$

$$\pi = n\left(\frac{1}{2}\right)(a - P)(a - P) + (P - c)\left[\frac{n(n+1)}{2}a - nP\right]$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = n\left(\frac{1}{2}\right)(2P - 2a) + \left(\frac{n(n+1)}{2}a - 2nP + nc\right) = 0$$

$$nP = \frac{n(n+1) - 2}{2}a + nc \rightarrow P = \frac{n(n+1) - 2}{2n}a + c$$

b. Si el monopolista tiene un costo total igual a $CT = \frac{1}{2}Q^2$, donde Q es la producción total del monopolista, y decide discriminar precios en tercer grado, ¿cuál es el precio que debe cobrarle a cada uno de los consumidores y qué cantidad les vende?

$$\pi = \sum_{i=1}^{n}(ia - q_i)q_i - \frac{1}{2}Q^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_j} = ja - 2q_j - Q = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(ja - 2q_j - Q\right) = 0 \rightarrow \frac{n(n+1)}{2}a - 2Q - nQ = 0 \rightarrow Q = \frac{n(n+1)}{2(n+2)}a$$

$$IM_i \equiv ia - 2q_i = \frac{n(n+1)}{2(n+2)}a \equiv CM$$

$$q_i = \frac{1}{2}\left[i - \frac{n(n+1)}{2(n+2)}\right]a; \quad P_i = \left[1 - \frac{i}{2} + \frac{n(n+1)}{4(n+2)}\right]a$$

3. Óptimo del productor

En relación con la siguiente función de producción, encuentre:

$$Q = z_1^{1/2}\prod_{i=2}^{n}(z_i - 1)^{1/2}$$

a. Los rendimientos a escala.

$$\varepsilon_{PT} > 1, \forall z_i > 1.$$

b. La elasticidad insumo-producto y la elasticidad del producto total.

$$\varepsilon_{Q,z_i} = \frac{PM_i}{PP_i} = \frac{\frac{1}{2}\frac{Q}{(z_i-1)}}{\frac{Q}{z_i}} = \frac{1}{2}\frac{z_i}{(z_i-1)}, \forall i \neq 1$$

$$\varepsilon_{Q,z_1} = \frac{PM_1}{PP_1} = \frac{\frac{1}{2}\frac{Q}{z_1}}{\frac{Q}{z_1}} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon_{PT} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\frac{z_i}{(z_i-1)}$$

c. La elasticidad de sustitución para todos los pares de bienes posibles.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \ln(z_j)}{\partial \ln\left(\frac{w_i}{w_j}\right)} - \frac{\partial \ln(z_i)}{\partial \ln\left(\frac{w_i}{w_j}\right)} = \eta_{ji}^{C} - \eta_{ii}^{C}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n}\frac{(z_j-1)}{z_j} + \frac{1}{n}\frac{(z_i-1)}{z_i}$$

$$\sigma_{1i} = \frac{1}{n}\frac{(z_i-1)}{z_i} + \frac{1}{n}$$

$$TMST_{ij} = \frac{z_j-1}{z_i-1} = \frac{w_i}{w_j}$$

$$TMST_{1j} = \frac{z_j-1}{z_1} = \frac{w_1}{w_j}$$

d. Las demandas condicionadas y no condicionadas de los insumos.

<u>Demandas condicionadas</u>

$$Q = z_1^{1/2}\prod_{i=2}^{n}\left[\frac{w_j}{w_i}(z_j-1)\right]^{1/2} = z_1^{1/2}\prod_{i=2}^{n}\left[\frac{w_j}{w_i}\left(z_1\frac{w_1}{w_j}\right)\right]^{1/2}$$

$$= z_1^{1/2}(z_1 w_1)^{(n-1)/2}\prod_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{w_i}\right]^{1/2}$$

$$z_1^{n/2} = Q\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{w_i}{w_1}\right]^{1/2} \rightarrow z_1^C = Q^{2/n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{w_i}{w_1}\right]^{1/n}$$

$$z_j^C = Q^{2/n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{w_i}{w_j}\right]^{1/n} + 1$$

<u>Demandas no condicionadas</u>

$$P\frac{z_1^{1/2}\prod_{i=2}^{n}(z_i-1)^{1/2}}{2z_1} = w_1 \rightarrow z_1^{1/2} = \frac{P}{2w_1}\prod_{i=2}^{n}(z_i-1)^{1/2} \rightarrow z_1 = \frac{P^2}{4w_1^2}\prod_{i=2}^{n}(z_i-1)$$

$$z_1 = \frac{P^2}{4w_1^2}\prod_{i=2}^{n}\frac{w_1 z_1}{w_i} \rightarrow z_1^{2-n} = \frac{P^2}{4w_1^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{w_1}{w_i} \rightarrow z_1^{NC} = \left(\frac{4w_1^2}{P^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_1}\right)^{1/(n-2)}$$

$$z_j^{NC} = \frac{w_1}{w_j}\left(\frac{4w_1^2}{P^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_1}\right)^{1/(n-2)} + 1$$

e. Las economías a escala.

$$CT = Q^{\frac{2}{n}}\prod_{i=1}^{n}w_i^{\frac{1}{n}} + \sum_{j=2}^{n}\left(Q^{\frac{2}{n}}\prod_{i=1}^{n}w_i^{\frac{1}{n}} + w_j\right) = nQ^{\frac{2}{n}}\prod_{i=1}^{n}w_i^{\frac{1}{n}} + \sum_{j=2}^{n}w_j$$

$$CM = 2nQ^{\frac{2}{n}-1}\prod_{i=1}^{n}{w_i}^{1/n} = P$$

$$CP = nQ^{\frac{2}{n}-1}\prod_{i=1}^{n}{w_i}^{1/n} + \frac{\sum_{j=2}^{n}w_j}{Q}$$

$$\frac{dCP}{dQ} = n\left(\frac{2}{n}-1\right)Q^{\frac{2}{n}-2}\prod_{i=1}^{n}{w_i}^{1/n} - \frac{\sum_{j=2}^{n}w_j}{Q^2} < 0, pues\frac{2}{n} < 1$$

$$\rightarrow Economías\ a\ escala$$

4. Demandas de insumos

En relación con la siguiente función de producción, encuentre:

$$Q = z_1^{1/2}(z_2 - 1)^{1/2}$$

a. La elasticidad propia y cruzada de cada una de las demandas condicionadas.

$$TMST_{12} = \frac{z_2 - 1}{z_1} = \frac{w_1}{w_2}$$

$$Q = z_1^{\frac{1}{2}}\left(\frac{w_1 z_1}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow z_1^C = Q\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2};\ \eta_{11}^C = -\frac{1}{2};\ \eta_{12}^C = \frac{1}{2}$$

$$z_2^C = Q\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2} + 1;\ \eta_{22}^C = -\frac{1}{2}\frac{(z_2 - 1)}{z_2};\ \eta_{21}^C = \frac{1}{2}\frac{(z_2 - 1)}{z_2}$$

b. La elasticidad de sustitución.

$$\sigma_{12} = \eta_{21}^C - \eta_{11}^C = \frac{1}{2}\frac{(z_2 - 1)}{z_2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2z_2}$$

c. La elasticidad de la demanda condicionada de cada bien, en relación con el cambio en el nivel de producción del bien.

$$\eta_{1Q}^C = 1;\ \ \eta_{2Q}^C = \frac{1}{2}\frac{z_2^C - 1}{z_2^C}$$

d. La elasticidad propia y cruzada de cada una de las demandas no condicionadas.

$$La\ demandas\ no\ condicionadas\ se\ indefinen$$

e. El tamaño del efecto sustitución y el efecto escala sobre el consumo del insumo 1, en proporción al efecto total, provocado por un cambio en el costo del insumo 1.

$$CT = 2Q(w_1 w_2)^{\frac{1}{2}} + w_2$$

$$CM = 2(w_1 w_2)^{1/2}$$

$$ES = \frac{\partial z_1^C}{\partial w_1} = -\frac{1}{2}Q\frac{w_2^{\frac{1}{2}}}{w_1^{\frac{3}{2}}}$$

$$El\ efecto\ escala\ está\ indefinido\ porque\ CM\ es\ constante$$

f. La elasticidad de la demanda no condicionada de cada bien, en relación con el cambio en el precio del bien.

$$La\ demandas\ no\ condicionadas\ se\ indefinen$$