Pauta Prueba 1
Teoría Microeconómica II

Primer Semestre 2022

1. Demanda, Bienestar y Agregación (22 puntos)

   La función de utilidad indirecta del individuo i es la siguiente:

$$v(p_1, p_2, m^i) = \kappa \frac{m^i(p_1 + p_2)}{p_1 p_2},$$

   donde p_1 y p_2 son los precios que enfrenta por los bienes 1 y 2 respectivamente, m^i es su ingreso y $\kappa > 0$ es un parámetro.

   (a) (3 puntos) Explique por qué al aumentar los precios de todos los bienes y el ingreso en la misma proporción no cambia la utilidad alcanzada por el individuo.

   Respuesta: Mismo argumento de homogeneidad de grado cero de demandas: no cambia conjunto de posibilidades, por lo que no cambia cantidad demandada [1.5 puntos], y por lo tanto no cambia utilidad [1.5 puntos].

   (b) (5 puntos) Asuma que inicialmente los precios son $p_1^0 = p_2^0 = 1$ y el ingreso es 100. Suponga que aumenta el precio del bien 1 en un 10%; ¿cuánto tendría que cambiar el ingreso del individuo para mantener también su utilidad constante como en (a)? ¿qué medida de cambio en bienestar sería esta?

   Respuesta: Dos maneras de responder, en ambas es necesario calcular el nivel de bienestar inicial u_0 a partir de la función de utilidad indirecta sustituyendo los precio e ingreso originales $v(1, 1, 100) = \kappa_0 \frac{100(1+1)}{1 \cdot 1} = 200\kappa_0$:

   - igualando la utilidad inicial $u_0 = 200\kappa_0$ con la utilidad que se obtendría con ingreso $(100 + \Delta)$ a los nuevos precios

$$200\kappa_0 = \kappa_0 \frac{(100 + \Delta)2.1}{1.1},$$

   se obtiene $\Delta = 4.76$, por lo que el ingreso tendría que aumentar en 4.76%. [3 puntos]

   - calculando la variación compensatoria (que es la medida de cambio en bienestar que corresponde a esta pregunta, pero en negativo puesto que el ingreso debe subir y no bajar [2 puntos]). Para eso se debe obtener la función de costos

$$c(p_1, p_2, u) = \frac{u p_1 p_2}{\kappa(p_1 + p_2)},$$

   y evaluar en u_0 y en el precio final para llegar a:

$$VC = 100 - \frac{200\kappa_0 * 1.1}{\kappa_0 2.1} = -4.76,$$

por lo que se obtiene el mismo aumento de 4.76%.[3 puntos]

(c) (4 puntos) Suponga en cambio que se mantienen los precios en $p_1^0 = p_2^0 = 1$ y el ingreso en 100, pero cae κ (por ejemplo, κ mide la calidad del aire, que ha empeorado). ¿Cuánto tendría que cambiar κ para que el cambio en bienestar fuera equivalente al cambio asociado al aumento de p_1 descrito en (b)?

Respuesta: En este caso la variación compensatoria sería:

$$VC = 100 - \frac{200\kappa_0}{2\kappa_1} = 100\left(1 - \frac{100\kappa_0}{\kappa_1}\right).$$

[2 puntos] Luego, igualando $100\left(1 - \frac{100\kappa_0}{\kappa_1}\right) = -4.76$ se obtiene $\kappa_1 = 0.954\kappa_0$; es decir, κ tendría que caer un 4.6%.[2 puntos]

(d) (5 puntos) Encuentre la demanda marshalliana por el bien 1 del individuo i (esto es, $x_1^i(p_1, p_2, m^i)$) y obtenga su elasticidad ingreso.

Respuesta: Aplicando identidad de Roy se obtiene

$$x_1^i(p_1, p_2, m^i) = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_1}}{\frac{\partial v}{\partial m}} = -\frac{-\frac{\kappa m^i}{{p_1}^2}}{\frac{\kappa(p_1+p_2)}{p_1 p_2}} = \frac{p_2}{p_1}\frac{m^i}{p_1 + p_2}$$

[3 puntos] Luego, la elasticidad ingreso es 1.[2 puntos]

Nota: si alguien explica bien cómo lo haría pero no recuerda la identidad de Roy, obtiene 2 puntos en total.

2. Oferta Laboral y Política Pública (22 puntos)

Los individuos en una economía tienen una función de utilidad dada por

$$u(c, o) = \ln(c) + \ln(o),$$

donde o representa las horas de ocio que pueden disfrutar y c, el consumo que obtienen. Cada individuo tiene 100 horas semanales a dividir entre ocio y trabajo. El sueldo por hora es de w y los individuos tienen un ingreso no-laboral de $A > 0$.

(a) (4 puntos) Presente el problema de maximización de los individuos, siendo cuidadoso con las condiciones de primer orden.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\pounds &= \ln c + \ln o + \lambda_1(A + w(100 - o) - c) + \lambda_2(100 - o)\\
\frac{\partial \pounds}{\partial c} &= \frac{1}{c} - \lambda_1 = 0\\
\frac{\partial \pounds}{\partial o} &= \frac{1}{o} - \lambda_1 w - \lambda_2 = 0\\
\frac{\partial \pounds}{\partial \lambda_1} &= A + w(100 - o) - c = 0\\
\frac{\partial \pounds}{\partial \lambda_2} &= 100 - o \geq= 0 \text{ y } \lambda_2 * \frac{\partial \pounds}{\partial \lambda_2} = 0
\end{aligned}$$

1 punto por el Lagrangiano (0.5 si se olviden de poner la segunda restricción). 0.5 para cada condición de primer orden.

Se puede excluir la posibilidad de $c = 0$ y $o = 0$ por el hecho que la utilidad marginal es infinita en estos puntos. Entonces, las 2 primeras condiciones de primer orden son igualdades. La tercera se cumple porque la utilidad marginal es positiva lo que hace que por no-saciedad, todo el ingreso se va a consumir. La cuarta puede o no cumplirse con igualdad.

1 punto para la justificación de si se cumplen o no con igualdad-0.25 puntos por condición.

(b) (4 puntos) ¿Es la función de utilidad cóncava y/o cuasi-cóncava? ¿Qué significa eso para la solución que podemos encontrar en (a)?

Respuesta: La matriz hesiana de la función de utilidad es

$$\begin{pmatrix} -1/c^2 & 0 \\ 0 & -1/o^2 \end{pmatrix}$$

A calcular el determinante, se ve que es positivo y que el menor principal líder de orden 1 es negativo. Entonces, la matriz es negativa definida y la función es cóncava. A ser cóncava, es también cuasi-cóncava, lo que significa que la solución que vamos a encontrar en (a) es un máximo.

1 punto por la hesiana, 1 punto para argumentar que es cóncava, 1 punto para decir que si es cóncava, es cuasi-cóncava y 1 punto para lo que eso significa. Si no usan la matriz hesiana y demuestran concavidad, dar 2 puntos en total. Si no logran decir si es o no cóncava pero si logran argumentar que si es cóncava es cuasi-cóncava, 0.5 puntos.

Alternativamente, podrían argumentar que como la curva de indiferencia es convexa, sabemos que es cuasi cóncava (y se satisface CSO), pero no sabemos si es cóncava o no. 3 puntos.

(c) (3 puntos) Encuentre el salario de reserva.

Respuesta: El salario de reserva corresponde al salario donde estamos entre el caso $\lambda_2 = 0$ y el caso donde es positivo. Tomamos el caso donde $\lambda_2 > 0$, obtenemos que $o = 100$ y $c = A$. Para que se cumpla la primera condición de primer orden, sabemos que $\lambda_1 = 1/A$. La segunda condición de primer orden implica $1/100 - w/A = \lambda_2$. Para que $\lambda_2 > 0$, $w < A/100$. Solución alternativa, se encuentra el ocio en la solución interior como $o = 50 + A/2w$. Dado que en este caso $o < 100$, se encuentra el salario de reserva.

2 puntos por el desarollo de la respuesta, 1 punto para encontrar el valor.

(d) (6 puntos) Imagine que el gobierno decide ofrecer un subsidio de valor constante T a todos los individuos en la economía. ¿Cuál será el impacto de esta política? Explique usando conceptos de efecto sustitución e ingreso.

Respuesta: El subsidio significa que $A' = A + T$. Si trabajan, $o = 50 + A'/2w$ y $h = 50 - A'/2w$. Entonces, T sube la oferta laboral. Si no trabajan, la oferta laboral es 0 y no cambia con T. Pero el salario de reserva sube con T. Entonces, la oferta laboral cae por eso también. Eso se explica por el efecto ingreso porque los precios relativos no cambian: dado que el ocio es un bien normal, a subir el ingreso, sube su demanda.

Un punto para entender que T es como A. 2 puntos para encontrar la solución interior y 1 punto para encontrar el impacto de T sobre esta. 1 punto para encontrar el impacto sobre el salario de reserva. 1 punto para argumentar que es efecto ingreso.

(e) (5 puntos) Ahora, el gobierno decide de enfocar el subsidio solamente a los individuos que tienen un ingreso inferior a X (es decir, para quienes tienen $A + w(100 - o) < X$). Muestre en un gráfico cuál sería el nuevo salario de reserva y discuta el impacto de la política sobre la oferta laboral, comparando la consecuencia de una política como esta con el de una política no focalizada como la descrita en el punto (d).

Respuesta: Se tiene que mostrar un gráfico donde en $o = 100$, c pasa de A a $A + T$. Se tiene que mostrar el salario de reserva como el salario que permite una tangencia con las curvas de indiferencia justamente en el punto $o = 100$. El resto del gráfico tiene que mostrar que c es incrementado por T hasta un punto donde cae de vuelta a la situación sin subsidio. En la (d), todos los individuos enfrentaban solamente un efecto ingreso. Eso se replica aquí *por los que eligen o muy alto. Pero una vez que se llega al punto donde $A+w(100-o)=X$, obtenemos que los que eligerían un o menor a este punto sin la pólitica de subsidio podrían preferir achicar su oferta laboral para obtener la trasferencia. Entonces, el desincentivo a trabajar es mucho más marcado en la (e) que en la (d).*

2 puntos para hacer el gráfico de manera correcta. 1 punto para argumentar que el salario de reserva sube comparado a sin subsidio o que no cambia comparado a (d). 2 puntos para explicar el impacto que tiene la focalización sobre la oferta laboral "en el medio".

3. PROPIEDADES DE LAS UTILIDADES (41 puntos) Un consumidor tiene sus preferencias representadas por la función de utilidad:

$$U(\mathbf{x}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - i) \ , \ x_i > i > 0 \ \ \forall i$$

(a) (14 puntos) Encuentre las funciones de demandas Hicksianas y Marshallianas para todos los bienes, así como la función de costos y la función de utilidad indirecta.

Respuesta:

Demandas ordinarias: *Al descartar solución de esquina se parte de la condición de tangencia:*

$$TMSS_{1j} = \frac{p_1}{p_j}$$

$$\implies \frac{1}{\frac{1}{x_j - j}} = \frac{p_1}{p_j} \implies x_j^M(\mathbb{P}) = \frac{p_1}{p_j} + j$$

Inyectándo en restricción presupuestaria

$$p_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j \left(\frac{p_1}{p_j} + j \right) = m$$

Despejando

$$p_1 x_1 + (n-1)p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot j = m \implies p_1 x_1 = m + (1-n)p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot j$$

$$x_1^M(\mathbb{P}, m) = \frac{m + (1-n)p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot j}{p_1}$$

2 puntos por la obtención correcta de cada demanda.

Utilidad Indirecta: *Se inyectan las demandas ordinarias en la función de utilidad*

$$V(\mathbb{P}, m) = \frac{m + (1-n)p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot j}{p_1} + \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right)$$

3 puntos por la utilidad indirecta.

Función de Costos: *Se emplea relación entre utilidad indirecta y función de costos*

$$V \circ C^* = u \implies V^{-1} = C^*$$

Por lo tanto

$$\overline{u} = \frac{C^* + (1-n)p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot j}{p_1} + \sum_{j=2}^{n} \ln(p_1/p_j)$$

$$\implies C^* = \left[\overline{u} - \sum_{j=2}^{n} \ln(p_1/p_j)\right] p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot j + (n-1)p_1$$

$$= \overline{u}p_1 + (1-n)\ln(p_1)p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln(p_j)p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot j + (n-1)p_1$$

3 puntos por la función de costos.

Demandas Hicksianas: *Partiendo del Lema de Shepard:*

$$\frac{\partial C^*}{\partial p_1} = x_1^H$$
$$\frac{\partial C^*}{\partial p_j} = x_j^H$$

Por lo tanto

$$x_1^H(\overline{u}, \mathbb{P}) = \overline{u} + (1-n)\left[1 + \ln(p_1)\right] + \sum_{j=2}^{n} \ln(p_j) + (n-1) = \overline{u} + (1-n)\ln(p_1) - \sum_{j=2}^{n} \ln(p_j)$$

$$x_j^H(\overline{u}, \mathbb{P}) = \frac{p_1}{p_j} + j$$

En particular

$$x_j^M = x_j^H$$

2 puntos por cada demanda hicksiana.

(b) (14 puntos) Encuentre el efecto ingreso y sustitución para cada bien causado por un cambio en el precio del bien $j \neq i$.
Respuesta:
Se deben analizar los efectos para ambos bienes.
Bien Lineal:

$$EI = \frac{\partial x_1^M}{\partial m} x_j^H = \frac{1}{p_1} \cdot x_j^H$$

$$ES = \frac{\partial x_1^H}{\partial p_j} = -\frac{1}{p_j}$$

3.5 puntos por cada efecto. **Bien no lineal:**

$$EI = \frac{\partial x_i^M}{\partial m} x_j^H = 0$$

Pues la demanda marshaliana no depende del ingreso.

$$ES = \frac{\partial x_i^H}{\partial p_1} = \frac{1}{p_j}$$

No tiene sentido derivarlo respecto a un precio cruzado k distinto de uno pues su valor es 0
3.5 puntos por cada efecto. Si el estudiante no indica que no tiene sentido derivar respecto a precios cruzados $k \neq 1$ se rebajan 1.5 puntos.

(c) (13 puntos) Compruebe que para las demandas hicksianas:

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}^{H} = 0$$

Respuesta:
Se reescribe la fórmula como:

$$\eta_{11}^{H} + \eta_{1j}^{H} + \sum_{1<j,\ j\neq 1}^{n} \eta_{ij}^{H} = 0$$

Calculando distintas combinaciones:

$$\eta_{11}^{H} = \frac{\partial x_1^H}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1^H} = \frac{1-n}{p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1^H} = \frac{1-n}{x_1^H}$$

$$\eta_{1j}^{H} = \frac{\partial x_1^H}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_1^H} \frac{1}{p_j} \cdot \frac{p_j}{x_1^H} = \frac{1}{x_1^H}$$

$$\eta_{ij}^{H} = \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_i^H} = 0 \quad \forall j \neq i$$

$$\eta_{ij}^{H} = -\frac{p_1}{p_j^2} \cdot \frac{p_j}{x_i^H} = -\frac{p_1}{p_j} \cdot \frac{1}{x_i^H} \quad \forall j = i$$

$$\eta_{i1}^{H} = \frac{1}{p_j} \cdot \frac{p_1}{x_i^H}$$

Por lo tanto

$$= -\frac{n-1}{x_1^H} - \frac{p_1}{p_j} \cdot \frac{1}{x_i^H} + \frac{p_1}{p_j} \cdot \frac{1}{x_i^H} + \sum_{1<j,j\neq 1} \frac{1}{x_1^H}$$

$$= -\frac{n-1}{x_1^H} + \frac{n-1}{x_1^H} = 0$$

■
0.5 puntos por cada elasticidad. 1.5 puntos por aplicar correctamente la fórmula y llegar a lo que debe mostrar.

Para las marshalianas

$$\eta_{im}^{M} + \eta_{j=1}^{n} \eta_{ij}^{M} = 0\ ,\ \forall i$$

Respuesta:
Se deben de analizar dos casos.
Bien lineal:

$$\eta_{1m}^{M} + \sum_{j=1} \eta_{1j}^{M} = 0$$

Calculando elasticidades

$$\eta_{1m}^{M} = \frac{\partial x_1^M}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_1^M} = \frac{1}{p_1} \cdot \frac{m}{x_1^M}$$

$$\eta_{11}^{M} = \frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1^M} = \left[\frac{-m}{p_1^2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{jP_j}{p_1^2} \right] \frac{p_1}{x_1^M}$$

$$\eta_{1j}^{M} = \frac{\partial x_1^M}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_1^M} = -\frac{j}{p_1} \cdot \frac{p_j}{x_1^M}$$

Por lo tanto

$$\frac{m}{p_1 x_1^M} - \sum_{j=2}^{n} \frac{jp_j}{p_1 x_1^M} + \left[\frac{-m}{p_1^2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{jP_j}{p_1^2} \right] \frac{p_1}{x_1^M}$$

$$\frac{m}{p_1 x_1^M} - \frac{m}{p_1 x_1^M} - \sum_{j=2}^{n} \frac{jp_j}{p_1 x_1^M} + \sum_{j=2}^{n} \frac{jp_j}{p_1 x_1^M} = 0$$

1 punto por cada elasticidad. 1 punto por aplicar correctamente la fórmula y llegar a lo que se debe mostrar.

Para un bien $k \neq 1$:

$$\eta_{km}^M + \sum_{j=1} \eta_{kj}^M = 0$$

Calculando elasticidades:

$$\eta_{km}^M = \frac{\partial x_k^M}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_k^M} = 0$$

$$\eta_{kk}^M = \frac{\partial x_k^M}{\partial p_k} \cdot \frac{p_k}{x_k^M} = -\frac{p_1}{p_k^2} \cdot \frac{p_k}{x_k^M}$$

$$\eta_{kj}^M = \frac{\partial x_k^M}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{x_k^M} = 0 \quad k \neq j$$

$$\eta_{k1}^M = \frac{1}{p_k} \cdot \frac{p_1}{x_k^m}$$

Por lo tanto

$$\frac{p_1}{p_k} \frac{1}{x_k^m} - \frac{p_1}{p_k} \frac{1}{x_k^m} = 0$$

■

1 punto por cada elasticidad. 1 punto por aplicar correctamente la fórmula y llegar a lo que se debe mostrar.