Microeconomía

Dariel Amador

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias Económicas
Escuela de Economía

Agradecimientos

Este material no se podría haber hecho sin el apoyo de mis amigos Marco Monge y María José Chaves. Gracias por su tiempo y apoyo!

A Marco por ser mi inspiración en economía y ser un ejemplo de que ser un gran economista y una buena persona no son excluyentes!
Una gran parte de los ejemplos de estos apuntes provienen del material de laboratorio que Marco preparó para nosotros cuando fue nuestro asistente en Microeconomía II en II-2020.
A María José por literalmente haberme ayudado a terminar la carrera con sus incontables ayudas y consejos!
María José me compartió su libro de ejercicios de cuando ella fue asistente de Microeconomía I en 2022. En particular, el material 'Libro de Ejercicios de Laboratorio Teoría Microeconómica I' fue desarrollado por las siguientes personas: Bianca **A**guilar, María José **C**haves, Sebastián **C**on y Alejandro **G**uevara *(ACCG)*. La enorme mayoría de los ejercicios de estos apuntes provienen de este material, así que cualquier duda específica puede ser referenciada a partir de estos apuntes.
Actualmente, el material de referencia por excelencia para el segundo curso de microeconomía en la Universidad de Costa Rica es *'Microeconomía II'* (2024) de José Miguel Mora **Casasola**, quien en dicho documento desarrolla casi 100 ejercicios de un nivel de dificultad bastante representativo del curso. José Miguel accedió a incorporar dichos ejercicios en este documento, haciendo que este compendio sea aún más amplio. Muchas gracias a él por su trabajo y aporte a este documento.

El Massachusets Institute of Technology (MIT) tiene una plataforma llamada *MIT Open Courseware* en donde se encuentran a disposición cientos de cursos de todas las ramas del conocimiento. En particular, aquí se puede encontrar el curso *Principles of Microeconomics* del profesor Jonathan Gruber, impartido en el otoño de 2023. Este curso dispone de lecciones, ejercicios y hasta exámenes resueltos que son incluidos en estos apuntes. Sin embargo, el consejo es revisar esta fuente directamente, pues el curso guarda muchas similitudes con la forma en que es impartido en nuestra universidad.

Hecho en LaTeX

Parte de digitar un material tan amplio como este es que, naturalmente, habrán muchos errores. Así que agradecería cualquier ayuda pertinente que permita hacer de este material uno más completo y provechoso. Por favor hacer llegar cualquier observación, corrección o reomendación al correo dariel.amador@ucr.ac.cr y tan pronto como pueda lo revsaré y haré la respectiva corrección.
Esta versión es de **11 de agosto de 2025**

Aviso legal
Este documento es **una compilación** de algunas de las ideas y conceptos fundamentales para la teoría microeconómica y ordenadas según el curso impartido en la Escuela de Economía de la Universidad de Costa Rica. Al final de este documento se encuentra un apartado de **bibliografía en el cual se citan todas las fuentes que fueron consultadas para la realización de este documento. Se le insta a consultar las fuentes originales para un mejor aprendizaje** y consultas con respecto al material que no queden del todo claras.
Las ideas aquí designadas no son creación original del autor.
Ley N° 6683 Ley sobre Derechos de Autor y Derechos Conexos
Artículo 1°.- Las producciones intelectuales originales confieren a sus autores los derechos referidos en esta Ley. La protección del derecho de autor abarcará las expresiones, pero no las ideas, los procedimientos, los métodos de operación ni los conceptos matemáticos en sí. Los autores son los titulares de los derechos patrimoniales y morales sobre sus obras literarias o artísticas.
Artículo 9°.- Los derechos de autor en compilaciones de obras pertenecen a su compilador.
(Así reformado por el artículo 1° de la ley N° 8686 del 21 de noviembre de 2008)
Artículo 70°.- Es permitido citar a un autor, transcribiendo los pasajes pertinentes de una obra que lícitamente haya sido puesta a disposición del público, siempre que estos no sean tantos y seguidos, que puedan considerarse como una reproducción simulada y sustancial, que redunde en un perjuicio del autor de la obra original, y su extensión no exceda la medida justificada por el fin que se persiga.
(Así reformado por el artículo 1° de la ley N° 8686 del 21 de noviembre de 2008)
Este documento está creado con fines estrictamente educativos y no se permite su comercialización. Es libre de circular y compartir este documento de manera gratuita.

Índice general

Índice de ejemplos

Índice de ejercicios

Parte I

Teoría del Consumidor

La teoría del consumidor está asentada sobre dos grandes bloques teóricos: la teoría de las preferencias y la teoría de la utilidad.

Capítulo 1

Preferencias

1.1. Preferencias y elección

El punto inicial para estudiar el problema de la decisión de los individuos es considerar una conjunto de posibilidades (mutuamente exluyentes entre sí) alternativas a partir de las cuales el individuo puede escoger[1]. Llámesele a este conjunto X. Actualmente, existen dos principales aproximaciones para estudiar el problema de la decisión de los individuos:

- Un abordaje mediante la imposición de axiomas en las preferencias de la persona y partir de dichos axiomas considerar cuáles son las consecuencias que se derivan a partir de ese conjunto axiomas para la toma de decisiones de las personas. Este primer acercamiento al tema de la decisión individual es la manera más tradicional de estudiar el problema.

- El segundo abordaje consiste en tratar el comportamiento de las decisiones del individuo como un elemento primitivo y a partir de dicha primitiva se proceden a hacer asunciones. Dichas asunciones o supuestos se conocen bajo el nombre de: axioma débil de las preferencias reveladas y axioma fuerte de las preferencias reveladas.

1.1.1. Primer abordaje: Relación de preferencias

En este primer enfoque, los objetivos de la persona se resumen en una relación de preferencias, la cual se denota por $\succsim$. Una relación de preferencias $\succsim$ es una <u>relación binaria</u> en el conjunto de alternativas X, permitiendo la comparación de alternativas $x, y \in X$. La expresión $x \succsim y$ se lee "*x es al menos tan preferido como y*". A partir de $\succsim$, se pueden extraer otras dos importantes relaciones sobre X:

1. La relación de preferencia estricta $\succ$, definida por:

$$x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y \quad \textit{pero} \quad \textit{no} \quad y \succsim x$$

   y se lee "*x es preferido a y*".

2. La relación de indiferencia $\succsim$, definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \succsim y \quad \textit{además} \quad y \succsim x$$

Uno de los supuestos más importantes en la teoría microeconómica es que las preferencias de las personas son <u>*racionales*</u>. La hipótesis de la racionalidad está representada en dos supuestos básicos acerca de la relación de preferencia $\succsim$: completitud y transitividad.

Definición 1 [Racionalidad de las preferencias]. Una relación de preferencias $\succsim$ se dice racional si posee las siguientes propiedades:

- Completitud: $\forall x, y \in X$, se tiene que $x \succsim y$ o $y \succsim x$ o ambas.

- Transitividad: $\forall x, y \in X$, se tiene que, si $x \succsim y$ y $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$.

[1]Véase Mas Colell et al., 1995y Jehle y Remy, 2000

Asumir que la relación de preferencias es completa indica que la persona tiene bien definida su preferencia entre dos posibles alternativas. Este axioma indica que la persona ya ha llevado a cabo un proceso de definir claramente sus preferencias de manera ordenada, de tal manera que siempre ante un par de alterantivas, siempre sepa cuál alternativa es la que más le conviene. De esta manera, ante cualquier conjunto de posibles alternativas, la persona únicamente tomaría decisiones ya premeditadas.

Por otro lado, el axioma de la transitividad implica que es imposible presentarle a la persona una secuencia de pares de alternativas en las que sus preferencias se contradigan.

Este par de axiomas son sustanciales, sin los cuales no se podría sostener importantes porciones de la teoría económica.

Si entonces la relación de preferencias $\succsim$ es racional, entonces se tiene que:

Proposición 1. $\succsim$ es tanto irreflexiva ($x \succsim x$ nunca se sostiene) y reflexiva (si $x \succsim y$ y $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$).

Demostración. Por el axioma de completitud, $x \succsim x \quad \forall x \in X$. De ahí que $\nexists x \in X$ tal que $x \succ x$. Suponga que $x \succ y$ y $y \succ z$, entonces tiene que ser que: $x \succ y \succsim z$. Se tiene entonces que $x \succ z$ y por ende $\succ$ es transitiva. (Ver demostración de la tercera propiedad). □

Proposición 2. $\sim$ es reflexiva ($x \sim x\ \forall x$), transitiva (si $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces $x \sim z$) y simétrica (si $x \sim y$, entonces $y \sim x$).

Demostración. Dado que $x \succsim x \quad \forall x \in X$, entonces $x \sim x \quad \forall x \in X$ también. Por ende $\sim$ también es reflixiva. Suponga que $x \sim y$ y $y \sim z$. Entonces, $x \succsim y$, $y \succsim z$, $y \succsim x$ y $z \succsim y$. Por transitividad, esto implica que $x \succsim z$ y así $z \succsim x$. Por tanto $x \sim z$ y por ende $\sim$ es transitiva. Suponga que $x \sim y$ y así $x \succsim y$ y $y \succsim x$. Por ende $y \succsim x$ y $x \succsim y$ y así $y \sim x$. Por tanto $\sim$ es simétrica. □

Proposición 3. Si $x \succ y \succsim z$, entonces $x \succ z$.

Demostración. Dado que $y \succ z$ implica $y \succsim z$, la transitividad implica que $x \succsim z$. Suponga que $z \succsim x$. Dado que $y \succsim z$, la transitividad implicaría que $y \succsim x$, pero esto contradeciría el hecho de que $x \succ y$, y por tanto no se puede tener que $z \succsim x$, y por ende tiene que ser que $x \succ z$. □

1.1.2. Segundo abordaje: Reglas de la elección

En este segundo abordaje, el comportamiento de las decisiones es el principal objeto de la teoría del consumidor. Dicho comportamiento es representado mediante una estructura de elecciones. Una estructura de elecciones $(\mathbb{B}, C(\cdot))$ consiste de dos elementos:

- $\mathbb{B}$ es una familia de conjuntos no vacíos de X. Esto significa que cada elemento de $\mathbb{B}$ es un conjunto $B \subset X$. A cada elemento $B \in \mathbb{B}$ se le llama un conjunto presupuestario. Los distintos conjuntos presupuestarios en $\mathbb{B}$ son una lista exhaustiva de todas las posibles elecciones concebibles que puede tomar el agente.

- $C(\cdot)$ es una regla de elección, es decir, una correspondencia o relación que asigna un conjunto no vacío de elementos $C(B) \subset B$ para cada conjunto presupuestario $B \in \mathbb{B}$. Cuando $C(B)$ contiene un único elemento, ese elemento es la elección del individuo de entre todas las alternativas en B. Si $C(B)$ contiene más de un elemento, cada uno de esos elementos en $C(B)$ representa las posibles alternativas que el agente puede elegir.

Al utilizar este abordaje, es menester imponer restricciones razonables sobre el comportamiento decisional del agente. Una de estas restricciones se conoce como el **axioma débil de las preferencias reveladas**. La idea es que mediante estas restricciones, las decisiones tomadas por el agente denoten un cierto grado de consistencia en sus elecciones.

Definición 2. Axioma débil de las preferencias reveladas La estructura de elecciones $(\mathbb{B}, C(\cdot))$ satisface el axioma débil de las preferencias reveladas si se sostiene que, para algún $B \in \mathbb{B}$, con $x, y \in B$, se tiene que $x \in C(B)$, entonces para cada $B' \in \mathbb{B}$ con $x, y \in B'$ y $y \in C(B')$, también se debe tener que $x \in C(B')$.

Lo que dice el axioma débil es que, **si se escoge x dado que y esté disponible como elección, no puede haber otro conjunto presupuestario en donde, estando nuevamente disponibles x y y, se escoja y por encima de x.**

Capítulo 2

Utilidad

2.1. Función de utilidad

Definición 3 [Función de utilidad]. Defínase una función de utilidad como una función de valor real $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ que representa la relación de preferencias $\succsim$, si $\forall x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n_+, u(x^0) \geq u(x^1) \Leftrightarrow x^0 \succsim x^1$.

Una función de utilidad es una manera conveniente de resumir información contenida en las relaciones de preferencias del consumidor. En particular, el uso de las funciones de utilidad representa una ventaja para poder emplear herramientas matemáticas como el uso del cálculo.
Se considera que las relaciones de preferencias vistas anteriormente, son la manera más primitiva de representar las preferencias del consumidor, y la función de utilidad es simplemente una representación o resumen de la información transmitida por la relación de preferencia.
A continuación, una definición más formal sobre las funciones de preferencia:

Proposición 4. Considere una relación de preferencias racional $\succsim$. Si $u(x) = u(y)$ implica $x \sim y$ y si $u(x) > u(y)$ implica que $x \succ y$ y entonces $u(\cdot)$ es una función de utilidad que representa $\succsim$.

Demostración. Suponga que $u(x) = u(y) \Rightarrow x \sim y$ y $u(x) > u(y) \Rightarrow x \succ y$. Luego, suponga que $x \sim y$. Si $x \succ y$ y además es el caso que $y \succ x$, pues entonces esto implica que $x \sim y$, y por lo tanto $u(x) = u(y)$. Pero, si $x \succ y$ pero $y \not\succ x$, entonces esto implica que $u(x) \geq u(y)$. □

Proposición 5. Si X es finito y $\succsim$ es una relación de preferencias racional en X, entonces existe una función $u : X \to \mathbb{R}$.

Demostración. □

2.2. Utilidad como una noción ordinal

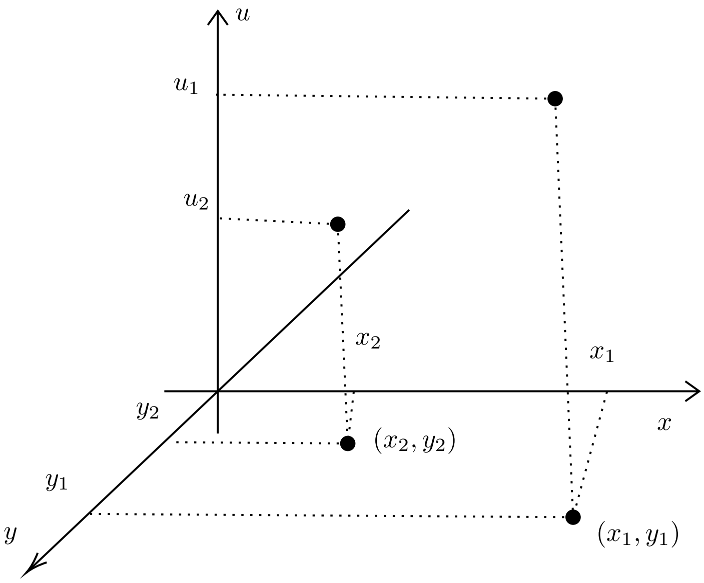
Dado que una función de utilidad revela información sobre el ordenamiento de las preferencias de un consumidor, es que entonces se dice que la utilidad es una noción meramente ordinal. Esto quiere decir que la información más valiosa que revela una función de utilidad es cómo ordena distintos conjuntos de consumo.

Por ejemplo, suponga una canasta de consumo (x_1, y_1) que se llama canasta 1 y otra (x_2, y_2) que se llama canasta 2. Así, suponga que un agente prefiere estrictamente la canasta 1 a la 2, lo cual quiere decir que $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2)$.

Si este ese el caso, debe ser entonces el caso de que, la utilidad que genere consumir la primer canasta, sea superior a la utilidad que genera consumir la segunda canasta, por lo que entonces $u(x_1, y_1) > u(x_2, y_2)$.

Ahora, recuerde que una función de utilidad es una función de valor real $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ que representa la relación de preferencias $\succsim$, si $\forall x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n_+, u(x^0) \geq u(x^1) \Leftrightarrow x^0 \succsim x^1$. Entonces, volviendo al ejemplo de dos canastas 1 y 2, entonces que $(x_1, y_1) \succ (x_2, y_2)$ implica que, la función de utilidad que representa dichas preferencias $u = f(x, y)$ entonces cumple que $f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2)$.

Esto quiere decir que, si se ubicaran las canastas en un espacio geográfico, como un plano cartesiano, la canasta 1 estará más alta que la canasta 2, pues la primera tiene asociado un mayor nivel de utilidad que la segunda. Así pues:



Lo cual es lo mismo que cuando en dos dimensiones se comparaban dos x's y se veía cuál tenía una mayor y. Ahora, la variable dependiente es la utilidad, y por eso se dice $u = f(\vec{X})$, lo cual es una generalización: u es una función de utilidad que depende de un vector de bienes $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, donde el caso más general serían n bienes y el caso más básico graficable sería que la utilidad depende de dos bienes, de forma que la función sería simplemente $u = f(x, y)$ o equivalentemente $u = f(x_1, x_2)$.

Nota 1. Pasar a una generalización de n bienes implica perder la posibilidad de ver una representación gráfica de la situación, así como un mayor nivel de abstracción matemática.

2.3. Restricción de presupuestaria

2.3.1. Caso de n bienes

Defínase una restricción presupuestaria para n bienes como una inecuación de la forma:

$$m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2.1}$$

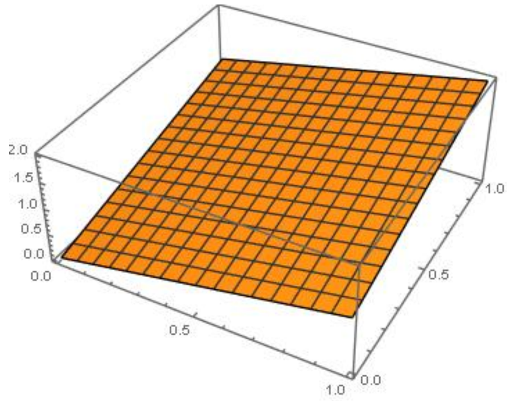
En donde se tiene un vector de bienes $\vec{x} = [x_1, x_2, ...x_n]$ con n entradas y cada uno de los x_i bienes tiene un respectivo precio p_i. Observe que la restricción presupuestaria no es más que la suma de los precios de los bienes multiplicados por las respectivas cantidades consumidas de cada bien.
Sea m el ingreso del consumidor, entonces este ingreso debe ser mayor, o como mínimo, igual al gasto total en bienes del consumidor. Note que la restricción presupuestaria no más que una inecuación entre el ingreso y el gasto.
Por medio del teorema de Karush-Kuhn-Tucker, esta restricción presupuestaria en casi la totalidad de casos pasa a ser una ecuación, de manera que será más común toparse con una restricción presupuestaria de la forma:

$$m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{2.2}$$

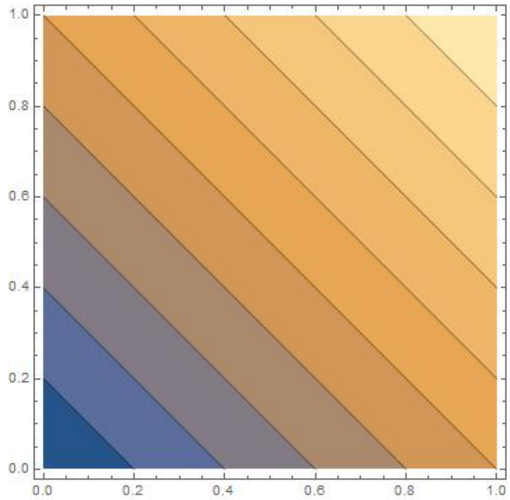
Cuando la restricción presupuestaria se cumple con igualdad, se tiene que el consumidor gasta todas sus unidades de ingreso en consumo, lo cual es una idea muy importante que será recurrente a lo largo de la economía.

2.3.2. Caso de dos bienes

Derivación general 1 [Restricción presupuestaria con dos bienes]. Asumiendo que la restricción presupuestaria se cumplirá con igualdad en casi la totalidad de los casos, defínase una restricción presupuestaria para



:
RP3D



:
RP2D

2 bienes (x,y) como una ecuación de la forma:

$$m = p_x x + p_y y \tag{2.3}$$

En donde m, p_x, p_y son valores constantes exógenos que representan el ingreso, el precio de x y el precio de y respectivamente.
Note que al ser m, p_x, p_y valores constantes, se tiene una función lineal con una sola variable independiente, de manera que esta ecuación se puede representar con una función lineal de la forma $y = mx + b$.
Observe que:

$$m = p_x x + p_y y$$

Dicha ecuación se puede despejar en términos de y:

Nota 2. La idea es derivar una expresión de la forma $y = f(\cdot)$, para así poder tener una función de y en función de x y poder graficarla como las funciones de toda la vida.

$$\begin{aligned} m - p_x x &= p_y y \\ \frac{m - p_x x}{p_y} &= y \\ \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x &= y \end{aligned}$$

Observe que la restricción presupuestaria, despejada en términos de y, es una función lineal con pendiente negativa de la forma $-\frac{p_x}{p_y}$. Es decir, que en una función de 2 bienes, la restricción presupuestaria se puede ver como una función lineal cuya pendiente es la relación entre los precios de los productos x y y.

Capítulo 3

Maximización de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria

Los problemas de maximización de utilidad sujetos a una restricción presupuestaria pueden ser resueltos mediante el método de los multiplicadores de Lagrange si las curvas de indiferencias son convexas y hay solución interna. Adicionalmente, también se puede utilizar el metodo de Karush-Kuhn-Tucker para resolver estos problemas de forma más general.

3.1. Caso de n bienes

Derivación general 2 [Karush-Kuhn-Tucker para maximizar una función de utilidad: soluciones internas y de esquina]. Suponga un consumidor que presenta una función de utilidad de la forma: $u(\vec{X})$, la cual se desea maximizar dada una cierta restricción presupuestaria de la forma $m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, entonces, se tiene el siguiente problema que describe la maximización de su utilidad:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \quad & u(\vec{X}) \\ \text{sujeto a} \quad & m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \end{aligned}$$

De esta forma, se puede plantear el siguiente lagrangeano para resolver el problema de maximización.

$$\mathcal{L} : u(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$$

O, análogamente también se puede plantear de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} : u(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - m)$$

En adelante, se va a trabajar con la primera versión del lagrangiano recién presentado. Por el teorema de Karush-Kuhn-Tucker debe cumplirse:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_1} - \lambda p_1 \leq 0 &\qquad x_1\left[\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_1} - \lambda p_1\right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_2} - \lambda p_2 \leq 0 &\qquad x_2\left[\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_2} - \lambda p_2\right] = 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_n} - \lambda p_n \leq 0 &\qquad x_n\left[\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_n} - \lambda p_n\right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq 0 &\qquad \lambda\left[m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = 0
\end{aligned}
$$

Dos preguntas importantes:

- ¿Gastará todo su ingreso? $\rightarrow$ suponga que no. De esta manera $m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq 0$, lo cual, por la última condición de holgura complementaria que $\lambda = 0$, por lo que debe ser cierto que:

$$
\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} UMg_{x_1} \leq 0 \\ UMg_{x_2} \leq 0 \\ \vdots \\ UMg_{x_n} \leq 0 \end{cases} \tag{3.1}
$$

  Pero si hay al menos una mercancía con utilidad marginal positiva (un bien) habría una contradicción. Es decir, que cuando el individuo desea unidades (monotonía) entonces debe ser que $\lambda > 0 \wedge m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

- ¿Solución de esquina? $\rightarrow$ considere un x_j cualquiera, debe cumplir $\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_j} \leq 0$. Ahora suponga $\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_j} = \infty$ pero si $\rightarrow \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_j}|_{x_j=0} - p_j \leq 0$ y se generaría una contradicción.

Así entonces el consumo de una unidad marginal se aprecia inmensamente y es consumida por un actor económico. Así $x_j > 0 \wedge \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_j} - p_j = 0$. Note que si todas las mercancías (que el individuo considera) satisfacen estas propiedades, las condiciones de primer orden se reducen a:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} &= \lambda p_1 \\
\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_2} &= \lambda p_2 \\
&\vdots \\
\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_n} &= \lambda p_n \\
m &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i
\end{aligned}
$$

Entonces, siguiendo el argumento del arbitraje, debe ser que para dos mercancías cualesquiera j, k, debe cumplirse que:

$$
\frac{\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_j}}{p_j} = \lambda \wedge \frac{\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k}}{p_k} = \lambda
$$

Y dado que $\lambda = \lambda$ entonces se tiene que:

$$\frac{\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_j}}{p_j} = \frac{\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k}}{p_k}$$

Se llega a la condición de optimalidad de que:

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_j}}{\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k}} = \frac{p_j}{p_k}$$

λ se puede interpretar como el monto en que $\mathcal{L}$ aumentaría si la restricción presupuestaria se relajara en una unidad, es decir, si aumentara el ingreso en una unidad. En otras palabras, es la utilidad marginal del ingreso; es lo que se llama un precio sombra, o sea, la utilidad marginal "perdida.ªsociada a la restricción interpuesta.

Esto quiere decir que de no estar la restricción interpuesta, bajo condiciones normales (por monotonía) el agente económico querría consumir más, sin embargo, con motivo de la restricción interpuesta en el ingreso, debe conformarse con una cierta cantidad consumida, y se están dejando de consumir unidades que, de no ser por la restricción, se consumirían.

La solución a estos problemas de maximización se llaman **funciones marshallianas de demanda**. Estas funciones se caracterizan porque **dependen de los precios de todos los bienes de la función de utilidad y del ingreso**. λ se puede interpretar como el monto en que $\mathcal{L}$ aumentaría si la restricción presupuestaria se relajara en una unidad, es decir, si aumentara el ingreso en una unidad. En otras palabras, es la utilidad marginal del ingreso; es lo que se llama un precio sombra, o sea, la utilidad marginal "perdida.ªsociada a la restricción interpuesta.

Esto quiere decir que de no estar la restricción interpuesta, bajo condiciones normales (por monotonía) el agente económico querría consumir más, sin embargo, con motivo de la restricción interpuesta en el ingreso, debe conformarse con una cierta cantidad consumida, y se están dejando de consumir unidades que, de no ser por la restricción, se consumirían.

Ejemplo 1 [Función de Elasticidad de Sustitución Constante (CES)]. Suponga un vector de n bienes de la forma: $\vec{X} = [x_1, x_2, ..., x_n]$. Una función de utilidad de la forma de elasticidad de sustitución constante dependiente de n bienes tiene la siguiente forma:

$$u(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}}$$

Originalmente, la función CES fue concebida como una función de producción [1] ante las limitaciones ocasionadas por trabajar con funciones de tipo Cobb-Douglas y de complementos. En su forma original esta función fue planteada de la forma:

$$V = \gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}} \tag{3.2}$$

En donde:

- γ es un parámetro (neutral) de eficiencia
- ρ es el parámetro de sustitución
- δ es el parámetro de distribución

Problema del consumidor:

$$max_{x_1,x_2,...,x_n}\ u(\vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}} \text{ sujeto a } m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \wedge \quad \rho \geq 1, \rho \neq \infty$$

$$\mathcal{L} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}} + \lambda\left(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

[1] Arrow y Debreu, 1954

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}-1} \cdot -\rho\alpha_j x_j^{\rho-1} - \lambda p_1 \leq 0 \qquad x_1\left[\frac{-1}{\rho}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho})^{\frac{-1}{\rho}-1} \cdot -\rho\alpha_j x_j^{\rho-1} - \lambda p_1\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow \frac{-1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}-1} \cdot -\rho\alpha_2 x_2^{\rho-1} - \lambda p_2 \leq 0 \qquad x_2\left[\frac{-1}{\rho}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_2 x_2^{-\rho})^{\frac{-1}{\rho}-1} \cdot -\rho\alpha_2 x_2^{\rho-1} - \lambda p_2\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow \frac{-1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}-1} \cdot -\rho\alpha_n x_n^{\rho-1} - \lambda p_n \leq 0 \qquad x_n\left[\frac{-1}{\rho}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho})^{\frac{-1}{\rho}-1} \cdot -\rho\alpha_n x_n^{\rho-1} - \lambda p_n\right] = 0$$

Note que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \equiv \left[\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_1} - \lambda p_1\right] \equiv [UMg_{x_1} - \lambda p_1]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq 0 \qquad \lambda\left[m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = 0$$

Caso 1: $\lambda = 0$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} UMg_{x_1} \leq 0 \\ UMg_{x_2} \leq 0 \\ \vdots \\ UMg_{x_n} \leq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

$\Rightarrow Si \lambda = 0$ las utilidades marginales de todas las n mercancías serían ≤ 0.

Esto querría decir, *contrario sensu*, que ningún bien tendría utilidad marginal positiva, es decir, ninguna de las n entradas del vector de productos $\vec{x}$, sería un bien. Sin embargo, note lo siguiente.
Suponga que tomamos un bien cualquiera, digamos j, de los n bienes que conforman el vector de productor $\vec{x}$, y suponga que queremos ver cómo cambia la utilidad u, ante una variación en el consumo del bien j, es decir, quisiéramos ver su utilidad marginal:

$$UMg_{x_j} \equiv \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_{x_j}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{-1}{\rho}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}-1} \cdot -\rho\alpha_j x_j^{-\rho-1}$$

$$\frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{x_j} = \frac{\cancel{\rho}\alpha_j x_j^{-\rho-1}}{\cancel{\rho}}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}-1}$$

$$\frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{x_j} = \frac{\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}-1}}{x_j^{\rho+1}}$$

Habiendo obtenido cuál es la utilidad marginal con respecto al bien j, suponga que quisiéramos oberservar cómo se comporta esa utilidad marginal cuando el bien x_j tiende a cero, es decir, cuando no se tiene nada del bien x_j y se va a aproximar a empezar a tener un poco de ese bien, entonces planteamos el siguiente límite:

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{x_j} = \frac{\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}-1}}{x_j^{\rho+1}} \tag{3.4}$$

Es decir:

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{x_j} = \infty$$

Es decir, que cuando el consumo de x_j es nulo, y se va a consumir la primera unidad de ese bien, la utilidad marginal ”se dispara.ª infinito. Esto quiere decir que la primera unidad consumida del bien x_j es valorada infinítamente y vale muchísimo.

Esto entonces entraría en contradicción con el supuesto de que $\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_j} \leq 0$, de manera que no se podría sostener que x_j, y con ello todas las n entradas del vector $\vec{x}$, deben ser bienes y con ello tener utilidades marginales positivas.

Aún más, siguiendo el supuesto de que las preferencias han de ser monótonas, es decir que ”más siempre es mejor”, esto en términos de utilidad se traduce a que, entre más se consuma de algún bien o de todos los bienes, necesariamente la utilidad total ha de aumentar respectivamente.

Esto se puede percibir de manera incluso aún más intuitiva observando que la función de utilidad tiene la forma de una sumatoria, lo cual se puede interpretar como que mientras más consuma de cada uno o al menos de un solo de los bienes $\vec{x}$, mayor deberá ser la utilidad total.

Entonces

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial u\left(\vec{x}\right)}{x_j} = \infty \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u(\vec{X})}{\vec{x_1}} = p_1 \\ \frac{\partial u(\vec{X})}{\vec{x_2}} = p_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial u(\vec{X})}{\vec{x_n}} = p_n \end{cases}$$

Y por tanto, para dos bienes cualesquiera se puede establecer la condición de optimalidad:

$$TMSS_{j,k} = TMSM_{j,k} \Rightarrow \frac{\frac{\alpha_j \cancel{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1-\rho}{\rho}}}}{x_j^{\rho+1}}}{\frac{\alpha_k \cancel{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1-\rho}{\rho}}}}{x_k^{\rho+1}}} = \frac{p_j}{p_k}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_j}{\alpha_k}\left(\frac{x_k}{x_j}\right)^{1+\rho} = \frac{p_j}{p_k} \Rightarrow \left(\frac{x_k}{x_j}\right)^{1+\rho} = \frac{p_j}{p_k}\frac{\alpha_k}{\alpha_j}$$

$$\Rightarrow \frac{x_k}{x_j} = \left(\frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \Rightarrow x_k = \left(\frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} x_j$$

Ahora, habiendo caracterizado a x_k en el óptimo, se procede a evaluar en la restricción presupuestaria:

$$m = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \Rightarrow m = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\left(\frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} x_j\right)$$

$$\Rightarrow m = x_j \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \Rightarrow m = x_j \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{\frac{1}{1+\rho}} p_k^{\frac{\rho}{1+\rho}}$$

$$\therefore x_j^M = \frac{m}{\left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{\frac{1}{1+\rho}} p_k^{\frac{\rho}{1+\rho}}}$$

A partir de cambiar los valores para ρ en la demanda marshalliana de un bien para una función de utilidad de elasticidad de sustitución constante (CES), se obtienen distintos casos:

- $\rho = 0 \to$ Cobb-Douglas
  - *Demostración.* Tómese la función CES como fue concebida originalmente:

$$u = \gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}}$$

Aplicando logaritmos a ambos lados se obtiene que:

$$\ln u = \ln \gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}}$$

Recuerde que: $\log a^b = b \cdot \log a$, entonces:

$$\ln u = \frac{\ln -\gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]}{\rho}$$

Ahora evalúase en el límite cuando $\rho \to 0$

$$\lim_{\rho \to 0} \ln u = \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln -\gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]}{\rho}$$

$$\ln u = \frac{\ln -\gamma[\delta K^{0} + (1-\delta)L^{0}]}{0}$$

$$\ln u = \frac{\ln 1}{0}$$

$$\ln u = \frac{0}{0}$$

Es decir que evaluar el límite cuando $\rho \to 0$ genera una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, lo cual puede ser resuelto mediante la aplicación de la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\ln -\gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]}{\rho}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f(\rho) =& \ln -\gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}] \\
\Rightarrow f'(\rho) =& \frac{1}{-\gamma[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]} \cdot \gamma[-\delta K^{-\rho}\ln K - (1-\delta)L^{-\rho}\ln L] \\
f'(\rho) =& \frac{-\cancel{\gamma}[\delta K^{-\rho}\ln K + (1-\delta)L^{-\rho}]}{\cancel{-\gamma}[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]} \Rightarrow f'(\rho) = \frac{\delta K^{-\rho}\ln K + (1-\delta)L^{-\rho}\ln L]}{[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]} \\
g(\rho) =& \rho \Rightarrow g'(\rho) = 1
\end{aligned}$$

Entonces, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\ln u =& \lim_{\rho \to 0} \frac{\frac{\delta K^{-\rho}\ln K + (1-\delta)L^{-\rho}\ln L]}{[\delta K^{-\rho} + (1-\delta)L^{-\rho}]}}{1} \Rightarrow \ln u = \frac{\delta K^{0}\ln K + (1-\delta)L^{0}\ln L]}{[\delta K^{0} + (1-\delta)L^{0}]} \\
\Rightarrow \ln u =& \frac{\delta \ln K + (1-\delta)\ln L}{\delta + 1 - \delta} \Rightarrow \ln u = \delta \ln K + (1-\delta)\ln L \\
\Rightarrow \ln u =& \ln K^{\delta} + \ln L^{1-\delta} \\
\Rightarrow \ln u =& \ln K^{\delta} \cdot L^{1-\delta} \\
\Rightarrow e^{\ln u} =& e^{\ln K^{\delta} \cdot L^{1-\delta}} \\
\therefore u = K^{\delta} \cdot L^{1-\delta}
\end{aligned}$$

$\square$

-
-

- $\rho = \infty \to$ Complementos perfectos
- $\rho = -1 \to$ Sustitutos perfectos

3.2. Caso de dos bienes

Derivación general 3 [Multiplicadores de Lagrange para una función de utilidad de dos bienes]. Suponga un consumidor que presenta una función de utilidad de la forma: $u(x, y)$, la cual se desea maximizar dada una cierta restricción presupuestaria de la forma $m = p_x x + p_y y$, entonces, se tiene el siguiente problema que describe la maximización de su utilidad:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u(x, y) \\ \text{s.a.} \quad & m = p_x x + p_y y \end{aligned} \tag{3.5}$$

De esta forma, se puede plantear el siguiente lagrangeano para resolver el problema de maximización.

$$\mathcal{L} : u(x, y) + \lambda(m - p_x x - p_y y)$$

O, análogamente también se puede plantear de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} : u(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - m)$$

En adelante, se va a trabajar con la primera versión del lagrangiano recién presentado. Ahora, dado el lagrangiano que representa el problema de optimización del consumidor, se tienen las siguientes **condiciones de primer orden** asociadas al problema de maximización:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} : \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \lambda p_x = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} : \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - \lambda p_y = 0 \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} : m - p_x x - p_y y = 0 \tag{3.8}$$

Note que una vez planteado el lagrangiano, las condiciones de primer orden consisten en las derivadas parciales del lagrangiano con respecto a cada una de las variables que conforman los bienes dentro de la función de la utilidad y posteriormente la derivada parcial con respecto al multiplicador de lagrange λ. Note que de las condiciones de primer orden resulta un sistema con la misma cantidad de ecuaciones que variables por encontrar (recuerde que m, p_x, p_y son valores constantes dados exógenamente y que no interesa hallar exactamente en estos modelos.

Es importante que note que $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ son las derivadas parciales de la función de utilidad con respecto a cada una de las variables de las que depende la utilidad, así que en realidad estamos obteniendo cómo cambia la función de utilidad ante un cambio en la cantidad consumida de x y de y respectivamente. En otras palabras, estamos encontrando las utilidades marginales con respecto a x y y respectivamente.
Observe que de las ecuaciones anteriores, se pueden hacer los siguientes arreglos algebráicos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} : UMg_x = \lambda p_x \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{p_x} = \lambda$$

Y por otro lado:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} : UMg_x = \lambda p_x \Leftrightarrow \frac{UMg_y}{p_y} = \lambda$$

Y, teniendo dos igualdades con dos variables (x,y), se puede hacer la siguiente evaluación o igualación de λ, de tal manera que queda la siguiente igualdad:

$$\frac{UMg_x}{p_x} = \frac{UMg_y}{p_y}$$

Y, haciendo un despeje se puede obtener lo siguiente:

$$\frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.9}$$

Note que la condición de optimalidad implica $\lambda = \frac{UMg_x}{p_x} = \frac{UMg_y}{p_y}$, lo cual económicamente se podría interpretar de la siguiente manera:

Si se altera el consumo de uno de los bienes, el consumo del otro bien también debe cambiar, suponiendo que se gasta todo el ingreso. Así:

- Si se reduce (aumenta) el consumo de x en $\frac{1}{p_x}$, entonces habría una disminución (subida) en la utilidad de $\frac{UMg_x}{p_x}$.

- Si se aumenta (reduce) el consumo de y en $\frac{1}{p_y}$, entonces habría una subida (disminución) en la utilidad de $\frac{UMg_y}{p_y}$.

- Por lo tanto, el cambio total en la utilidad tras el ajuste en el consumo de ambos bienes sería de $\Delta u = \frac{UMg_x}{p_x} - \frac{UMg_y}{p_y}$. Por tanto, note que si:

    - $\Delta u > 0 \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{p_x} - \frac{UMg_y}{p_y} > 0 \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{p_x} > \frac{UMg_y}{p_y}$ lo cual implica que aumentar el consumo del bien x aumenta la utilidad total y se querría substituir y por x, para consumir más x.
    - $\Delta u < 0 \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{p_x} - \frac{UMg_y}{p_y} > 0 \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{p_x} < \frac{UMg_y}{p_y}$ lo cual implica que aumentar el consumo del bien y aumenta la utilidad total y se querría substituir x por y, para consumir más y.
    - $\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{p_x} - \frac{UMg_y}{p_y} = 0 \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{p_x} = \frac{UMg_y}{p_y}$ lo cual implica que cambiar o redistribuir el consumo entre los bienes x y y, no cambia la utilidad total, por lo cual debe ser que ya se está maximizando y no harbía ningún incentivo a sustituir ninguno de los bienes por el otro.

Ahora, ¿qué hemos hecho? Note que este problema de optimización se ha venido trabajando sin una función de utilidad particular, sino que sólo hemos venido utilizando una función de utilidad genérica de la forma $u(x, y)$. Pronto veremos formas concretas y recurrentes de funciones de utilidad muy comunes, pero por el momento estamos trabajando con una función de utilidad general.
Es así, que las operaciones algerbáicas anteriores nos han permitido encontrar una condición de optimalidad general para los problemas de maximización de funciones de utilidad en dos variables sujetas a una restricción presupuestaria.

Note que esta condición de optimalidad consiste en una igualdad entre la relación de utilidades marginales de x y y, y la relación de precios entre los precios de x y de y.

El lado izquierdo de la condición de optimalidad se conoce como la tasa marginal de sustitución de x y de y ($TMS_{x,y}$). Esta expresión es una relación que nos permite comparar cómo se comporta la utilidad del consumidor ante cambios en el consumo de x y de y.

Nota 3. En resumen: la tasa marginal de sustitución nos indica cómo se comporta la relación marginal de sustitución entre los bienes x y y.

3.2.1. Transformaciones monótonamente crecientes

Dado que ya se tiene un panorama de la utilidad como una función que depende de bienes, y cómo esta es una noción primordialmente ordinal, se puede entonces introducir las transformaciones monótonas crecientes.

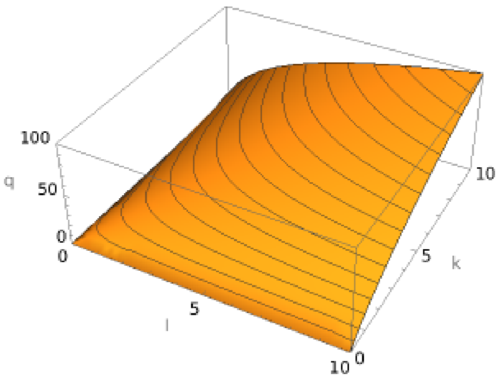
Suponga que se quiere escalar la función de utilidad utilizando una función estrictamente creciente f, donde $f'(\cdot) > 0$. Es decir, se usa:

$$W(x, y) = f(U(x, y))$$

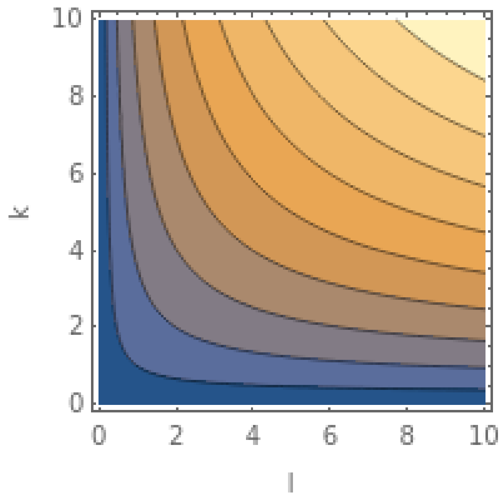
Esto, sin embargo, no alteraría el problema de maximización de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria, puesto que de igual manera se llegaría a la siguiente condición de optimalidad:

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{\cancel{f'(U(x, y))} \cdot U_x}{\cancel{f'(U(x, y))} \cdot U_y} = \frac{U_x}{U_y}$$

Por lo cual se confirma de manera algebraica que en efecto la noción ordinal es lo único que importa en las funciones de utilidad, puesto que aunque se cambie la escala de la función de utilidad mediante otra función (siempre y cuando sea una función creciente estrictamente en todo su dominio) entonces el conjunto de consumo óptimo no se verá alterado.



:
fig:test1



:
fig:test2

3.2.2. Función de Elasticidad de Sustitución Constante (Constant Elasticity Substitution)

Observe que para el caso particular de dos bienes, una función de utilidad de la forma CES tiene la siguiente forma:

$$(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{3.10}$$

Es importante indicar que será común toparse con que esta función de utilidad CES pueda verse de la siguiente manera:

$$U(x,y) = (\alpha x^\rho + (1-\alpha) y^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{3.11}$$

Es decir, que será muy común toparse con que los α's de la función de utilidad han de sumar uno en total ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Leftrightarrow \alpha_2 = 1 - \alpha_1$). Sin embargo, esto no siempre necesariamente será así.
Una transformación monótona creciente que puede ser de utilidad para tornar la función de utilidad CES cuyos exponentes no sumen uno en una que sí sume uno, sería la siguiente:

$$U(x,y) = (\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$V(x,y) = \left[(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}\right]^\rho \Rightarrow V(x,y) = (\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho) \tag{3.12}$$

Entonces, la maximización de una función de utilidad Cobb-Douglas para dos variables dada una restricción presupuestaria de la forma $m = p_x x + p_y y$ sería de la siguiente forma: [enhanced, breakable, skin first=enhanced, skin middle=enhanced, skin last=enhanced] Se tiene el problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & (\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \\ \text{s.t.} \quad & m = p_x x + p_y y \end{aligned}$$

$Porlotanto, sepl$

(3.13)

L $= (\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho)^{\frac{1}{\rho}} + \lambda(m - p_x x + p_y y) Y las condiciones de primer orden :$ (3.14)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{\rho}} \left(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \left(\cancel{\rho} \alpha_2 y^{\rho-1}\right) - \lambda p_y = 0 \\
\Leftrightarrow \alpha_2 y^{\rho-1} \left(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1} = \lambda p_y \\
\Leftrightarrow \frac{\alpha_2 y^{\rho-1} \left(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{p_y} = \lambda
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow m = p_x x + p_y y \tag{3.16}$$

Es así que entonces planteando que $\lambda = \lambda$:

$$\frac{\alpha_1 x^{\rho-1} \left(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{p_x} = \frac{\alpha_2 y^{\rho-1} \left(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}{p_y} \tag{3.17}$$

Despejando queda:

$$\frac{\alpha_1 x^{\rho-1} \cancel{\left(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}}{\alpha_2 y^{\rho-1} \cancel{\left(\alpha_1 x^\rho + \alpha_2 y^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}-1}}} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.18}$$

Observe que la última ecuación no es más que la condición de optimalidad genérica para el consumidor que indica que: $TMS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$. O sea, la relación entre las utilidades marginales ha de ser igual a la relación de precios. Simplificando:

$$\frac{\alpha_1 x^{\rho-1}}{\alpha_2 y^{\rho-1}} = \frac{p_x}{p_y}$$

Por lo tanto, para este caso, la condición de optimalidad se simplifica a que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}\right)^{\rho-1} = \frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y} \\
\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \left(\frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ahora, despejando para x:

$$x = y \left(\frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \tag{3.20}$$

Entonces, sustituyendo x en la tercera condición de primer orden (la restricción presupuestaria):

$$m = p_x \left(y \left(\frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right) + p_y y$$

$$m = y \left(p_y + p_x \left(\left(\frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right) \right)$$

$$\frac{m}{p_y + p_x \left(\left(\frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right)} = y^M$$

Solo queda resolver para x:

$$x = \frac{m}{\left(p_y + p_x \left(\left(\frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} \right) \right)} \cdot \left(\frac{\alpha_2 p_x}{\alpha_1 p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

$$x^M = \frac{m}{p_x + p_y \left(\frac{\alpha_1 p_y}{\alpha_2 p_x}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}}$$

Ejercicio 1 [Un problema del consumidor y sus óptimos]. Suponga que existe un consumidor que solo compra dos bienes, x y y, y sus preferencias están representadas por $U(x, y) = \theta \ln x + (1 - \theta) \ln y$. Asuma que $\theta = \frac{1}{4}$ y que el consumidor tiene un ingreso de 100 000 colones.

- Si el precio inicial de ambos bienes es 1 000 colones, ¿cuál es el consumo óptimo de estos bienes? Dibuje sus resultados en un gráfico.

  Note que a la función de utilidad propuesta se le puede aplicar una transformación monotónica. De este modo:

$$\begin{aligned} U(x, y) =& \theta \ln x + (1 - \theta) \ln y \\ =& \ln x^{\theta} + \ln y^{1-\theta} \\ e^{U(x,y)} =& e^{\ln x^{\theta} + \ln y^{1-\theta}} \\ V(x, y) =& e^{\ln x^{\theta}} \cdot e^{lny^{1-\theta}} \\ =& x^{\theta} \cdot y^{1-\theta} \end{aligned}$$

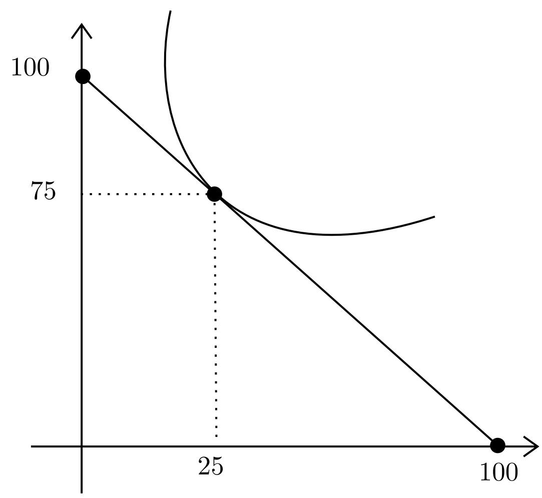
  Con lo cual, se obtiene una función de utilidad Cobb-Douglas. Por tanto, utilizando los resultados previamente obtenidos, se obtiene.

$$\begin{aligned} x^M =& \theta \cdot \frac{m}{p_x} \\ y^M =& (1 - \theta) \cdot \frac{m}{p_y} \end{aligned}$$

  Finalmente, usando $\theta = \frac{1}{4}$, $m = 100000$, $p_x = 100000$ y $p_y = 100000$, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^M =& \frac{1}{4} \cdot \frac{100000}{1000} = 25 \\ y^M =& \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{100000}{1000} = 75 \end{aligned}$$

  Gráficamente esta situación se ve así:



3.2.3. Función de Utilidad: Cobb-Douglas

3.2.3.1. El caso de n bienes

Suponga un vector de n bienes de la forma: $\vec{X} = [x_1, x_2, ..., x_n]$. Una función de utilidad de la forma de Cobb-Douglas dependiente de n bienes tiene la siguiente forma:

$$u\left[x_1, x_2, ..., x_n\right] = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

Para una función de utilidad de la forma Cobb-Douglas definida para n bienes, se procede a obtener la siguiente función de demanda marshalliana general dada una restricción presupuestaria de la forma $m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$: Se tiene el problema de maximiación:

$$\max_{\vec{x}} \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$
$$\text{s.t.} \quad m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$Setieneellagr$

(3.21)

L $= \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \lambda(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i) Procediendoconelprocesode Karush - Kuhn - Tucker$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \prod_{i=2}^{n} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_1 \leq 0 \qquad x_1[\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} \prod_{i=2}^{n} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_1] = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow \alpha_2 x_2^{\alpha_2 - 1} \prod_{i \neq 2}^{n} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_2 \leq 0 \qquad x_2[\alpha_2 x_2^{\alpha_2 - 1} \prod_{i=2}^{n} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_2] = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow \alpha_n x_n^{\alpha_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_n \leq 0 \qquad x_n[\alpha_n x_n^{\alpha_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_n] = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \Rightarrow \alpha_n x_n^{\alpha_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_n \leq 0 \qquad x_n[\alpha_n x_n^{\alpha_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} x_i^{\alpha_i} - \lambda p_n] = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq 0 \qquad \lambda[m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i] = 0$$

Considere la utilidad marginal de un bien cualquiera i:

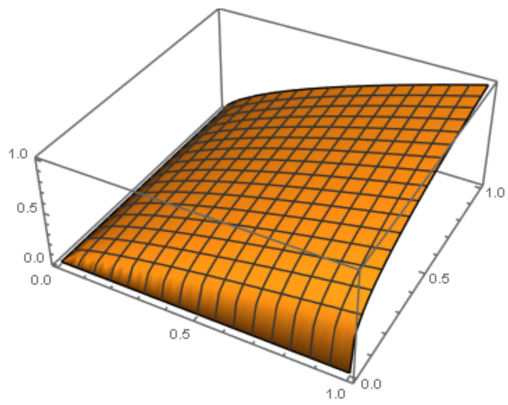
$$UMg_{x_i} = \frac{\alpha_i x_i^{\alpha_i}}{x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

Observe cómo se comporta el límite de la utilidad marginal cuando x_i tiende a cero:

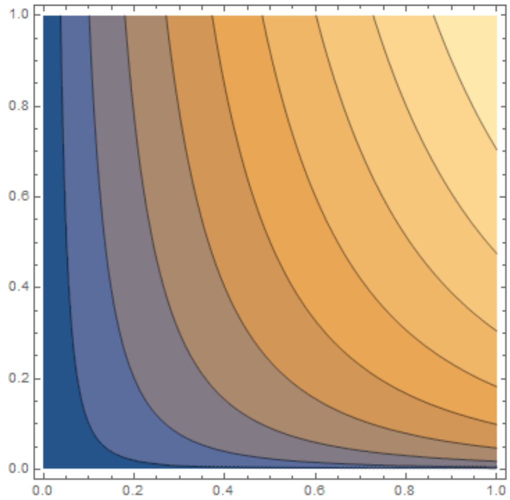
$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\alpha_i x_i^{\alpha_i}}{x_i} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} = \infty$$

De manera que, como ya se había demostrado anteriormente, cuando se tiene muy poco, casi nada del bien, este se valora muchísimo (ya que la utilidad marginal está dando infinito) por lo que no puede ser que las utilidades marginales sean negativas o iguales a cero sin que haya una contradicción.
De esta manera se sabe que se gasta todo el ingreso y la restricción presupuestaria se cumple con igualdad. Así mismo, en una función de utilidad de tipo Cobb-Douglas, el consumo de ningún bien del vector $\vec{x}$ puede ser cero, ya que dada la forma multiplicativa de la función de utilidad, si uno de los bienes no se consume, toda la utilidad sería cero, así que de todos los bienes se consume en una cantidad positiva. Por ende, no hay solución de esquina.
Ahora, tome dos bienes cualesquiera, j y k, de manera que entonces, $TMS_{j,k}$ sería:

$$TMS_{j,k} = \frac{\frac{\alpha_j x_j^{\alpha_j}}{x_j} \prod_i^n x_i^{\alpha_i}}{\frac{\alpha_k x_k^{\alpha_k}}{x_k} \prod_i^n x_i^{\alpha_i}}$$



:
fig:test1



:
fig:test2

$$TMS_{j,k} = \frac{\frac{\alpha_j}{x_j}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}{\frac{\alpha_k}{x_k}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}$$

$$\Rightarrow TMS_{j,k} = \frac{\alpha_j x_k}{\alpha_k x_j}$$

Recuerde la condición de optimalidad del consumidor:

$$\frac{\alpha_j x_k}{\alpha_k x_j} = \frac{p_j}{p_k}$$

$$x_k = \frac{p_j}{p_k}\frac{\alpha_k x_j}{\alpha_j}$$

Sabiendo la forma que tiene x_k en el óptimo, se puede evaluar en la restricción presupuestaria:

$$m = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{p_j}{p_k}\frac{\alpha_k x_j}{\alpha_j}\right)$$

$$m = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_j \alpha_k x_j}{\alpha_j}$$

$$m = \frac{p_j x_j}{\alpha_j}\sum_{i=1}^{n} \alpha_k$$

$$\frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_k} = x_j^M$$

3.2.3.2. El caso de dos bienes

Observe que para el caso particular de dos bienes, una función de utilidad de la forma Cobb-Douglas tiene la siguiente forma:

$$U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \tag{3.22}$$

Es importante indicar que será común toparse con que esta función de utilidad Cobb-Douglas pueda verse de la siguiente manera:

$$U(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha} \tag{3.23}$$

Es decir, que será muy común toparse con que los exponentes de de las variables de la función de utilidad han de sumar uno en total. Sin embargo, esto no siempre necesariamente será así.
Una transformación monótona creciente que puede ser de utilidad para tornar la función de utilidad Cobb-Douglas cuyos exponentes no sumen uno en una que sí sume uno, sería la siguiente:

$$U(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$$
$$V(x,y) = x^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}y^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} \tag{3.24}$$

Entonces, la maximización de una función de utilidad Cobb-Douglas para dos variables dada una restricción presupuestaria de la forma $m = p_x x + p_y y$ sería de la siguiente forma:
Se tiene el problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^{\alpha}y^{\beta} \\ \text{s.t.} \quad & m = p_x x + p_y y \end{aligned}$$

$Porlotanto, s$

(3.25)

L = x$^{\alpha}y^{\beta} + \lambda(m - p_x x + p_y y) Ylascondicionesdeprimerorden : \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - \lambda p_x = 0 \Rightarrow$ (3.26)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0 \Rightarrow \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} = \lambda p_y \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow\Rightarrow m = p_x x + p_y y \tag{3.28}$$

Observe que de las primeras dos condiciones de primer orden se obtiene que:

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{p_x} = \lambda \tag{3.29}$$

$$\frac{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}{p_y} = \lambda \tag{3.30}$$

Es así que entonces planteando que $\lambda = \lambda$:

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{p_x} = \frac{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}}{p_y} \tag{3.31}$$

Despejando queda:

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.32}$$

Observe que la última ecuación no es más que la condición de optimalidad genérica para el consumidor que indica que: $TMS_{x,y} = \frac{p_x}{p_y}$. O sea, la relación entre las utilidades marginales ha de ser igual a la relación de precios. Simplificando:

$$\frac{\alpha x^{(\alpha-1-(\alpha))}y^{(\beta-(\beta-1))}}{\beta} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{\alpha x^{-1}y^{1}}{\beta} = \frac{p_x}{p_y}$$

Por lo tanto, para este caso, la condición de optimalidad se simplifica a que:

$$\frac{\alpha y}{\beta x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{3.33}$$

Ahora, despejando para y:

$$y = \frac{p_x}{p_y}\frac{\beta x}{\alpha} \tag{3.34}$$

Entonces, sustituyendo y en la tercera condición de primer orden (la restricción presupuestaria):

$$\begin{aligned} m &= p_x x + p_y(\frac{p_x}{p_y}\frac{\beta x}{\alpha}) \\ m &= p_x x + \frac{p_x \beta x}{\alpha} \\ m &= p_x x(1 + \frac{\beta}{\alpha}) \\ m &= p_x x(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}) \\ \frac{m}{p_x(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})} &= x \end{aligned}$$

Finalmente, se concluye que la demanda Marshalliana de x es:

$$\frac{\alpha m}{p_x(\alpha+\beta)} = x^M \tag{3.35}$$

Y, recuerde que:

$$y = \frac{p_x}{p_y}\frac{\beta x}{\alpha}$$

De manera, que la demanda Marshalliana de y debe ser:

$$\begin{aligned} y &= \frac{p_x}{p_y}\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha m}{p_x(\alpha+\beta)} \\ y &= \frac{\cancel{p_x}}{p_y}\frac{\beta}{\cancel{\alpha}} \cdot \frac{\cancel{\alpha} m}{\cancel{p_x}(\alpha+\beta)} \\ y^M &= \frac{\beta m}{p_y(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Note que se han encontrado las demandas marshallianas de x y y para el caso de una función de utilidad de la forma Cobb-Douglas. Esto no es más que un caso particular del caso general de n variables que fue resuelto primeramente.
Los exponentes α y β se dice que representan la importancia relativa que el consumidor asigna respectivamente a cada uno de los bienes a la hora de decidir su consumo.

A continuación una representación para ilustrarse. Suponga: $U(x_1, x_2) = x^\alpha y^{1-\alpha}$. Note que evidentemente $\alpha + (1-\alpha) = 1$, o sea que la suma de los exponentes es igual a 1, pero no se sabe exactamente cuánto es α ni $1-\alpha$.

Ejercicio 2 [Función de utilidad... ¿Cobb-Douglas?]. Encuentre las demandas totales de un consumidor representativo con la siguiente función de utilidad

$$u(x, y) = 2\ln x + 3\ln y$$

Observe que a esta función de utilidad u se le pueden aplicar las leyes de logaritmos para que se parezca a un tipo de funciones ya conocida: la función de utilidad Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \ln x^2 + \ln y^3 \\ &= \ln\left(x^2 y^3\right) \\ v(x, y) = e^{u(x,y)} &= e^{\ln\left(x^2 y^3\right)} \\ v(x, y) &= x^2 y^3 \end{aligned}$$

Y a partir de aquí ya se puede trabajar la función conocida. Hay dos posibilidades:

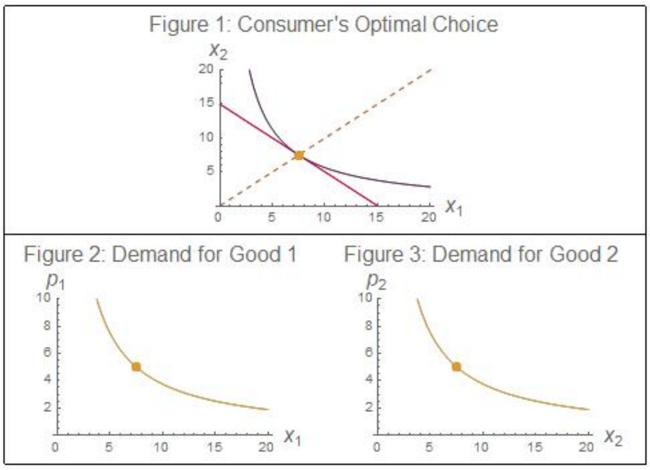


Figura 3.1: Caso particular Cobb Douglas: $\alpha = 0{,}5|m = 75|p_1 \wedge p_2 = 5$

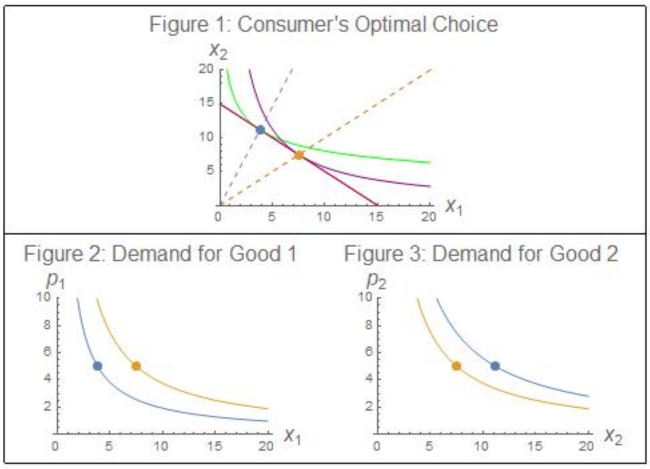


Figura 3.2: Caso particular Cobb Douglas: $\alpha = 0{,}25|m = 75|p_1 \wedge p_2 = 5$

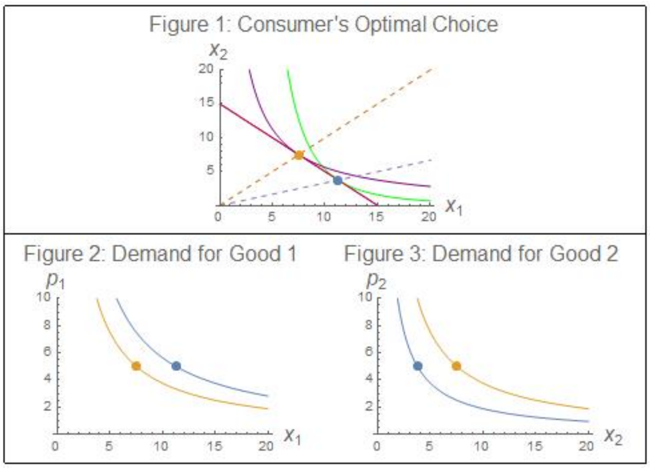


Figura 3.3: Caso particular Cobb Douglas: $\alpha = 0{,}75|m = 75|p_1 \wedge p_2 = 5$

- Una primera opción es normalizar la función v para que sus exponentes sumen 1, lo cual se haría mediante una transformación monótona creciente.

$$\begin{aligned}w(x,y) =& x^{\frac{2}{2+3}} \cdot y^{\frac{3}{2+3}} \\ =& x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

Y se sabe que en el óptimo:

$$\begin{aligned}TMSS_{x,y} =& TMSM_{x,y} \\ \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{UMg_y} =& \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{\frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}y^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}y^{\frac{3}{5}-1}x^{\frac{2}{5}}} =& \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{10x^{-1}}{15y^{-1}} =& \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{2y}{3x} =& \frac{p_x}{p_y} \\ y^* =& \frac{3x \cdot p_x}{2p_y}\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}m =& p_x x + p_y y \\ m =& p_x x + \cancel{p_y}\left(\frac{3x \cdot p_x}{2\cancel{p_y}}\right) \\ m =& p_x x + \frac{3x \cdot p_x}{2} \\ m =& p_x x\left(1 + \frac{3}{2}\right) \\ m =& p_x x\left(\frac{2+3}{2}\right) \\ m =& p_x x\left(\frac{5}{2}\right) \\ \frac{m}{\left(\frac{5}{2}\right)} =& p_x x \\ \frac{2m}{5p_x} =& x^M\end{aligned}$$

Luego, evaluando x^M en y^*

$$\begin{aligned}y^* =& \frac{3x \cdot p_x}{2p_y} \\ =& \frac{3\left(\frac{2m}{5p_x}\right) \cdot p_x}{2p_y} \\ =& \frac{3\left(\frac{2m}{5\cancel{p_x}}\right) \cdot \cancel{p_x}}{2p_y} \\ =& \frac{6m}{10p_y} \\ y^M =& \frac{3m}{5p_y}\end{aligned}$$

- Trabajar la función tal y como está actualmente

Se sabe que en el óptimo:

$$\begin{aligned}
TMSS_{x,y} =& TMSM_{x,y} \\
\Leftrightarrow \frac{UMg_x}{UMg_y} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{2xy^3}{3x^2y^2} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{2x^{1-2}y^{3-2}}{3} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{2y}{3x} =& \frac{p_x}{p_y} \\
y^* =& \frac{3x \cdot p_x}{2p_y}
\end{aligned}$$

La cual es la misma condición arribada anteriormente, por lo cual se llegará a las mismas demandas marshallianas.

Es importante tener presente cuáles son las demandas marhallianas genéricas de la función de utilidad Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned}
x^M =& \frac{\alpha m}{p_x(\alpha+\beta)} \\
y^M =& \frac{\beta m}{p_y(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

Y con esto, no es necesario hacer el desarrollo completo para estos casos, sino que con ver la función de utilidad sin la transformación de la normalización de los exponentes $v(x,y) = x^2y^3$ se puede ver directamente que:

$$\begin{aligned}
x^M =& \frac{2m}{(2+3)p_x} \\
y^M =& \frac{3m}{(2+3)p_y}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3 [Función de utilidad Cobb-Douglas con transformación monótona[2]]. Suponga que tiene la siguiente función de utilidad

$$U(x,y) = \theta \ln x + (1-\theta)\ln y$$

Donde $0 < \theta < 1$.

Nota 4. Note que esta es equivalente a una Cobb Douglas; se puede aplicar la siguiente transformación para verlo.

$$\begin{aligned}
W(x,y) =& e^{\theta \ln x + (1-\theta)\ln y} \\
W(x,y) =& e^{\theta \ln x} e^{(1-\theta)\ln y} \\
W(x,y) =& e^{\ln x^{\theta}} e^{\ln y^{(1-\theta)}} \\
W(x,y) =& x^{\theta} y^{(1-\theta)}
\end{aligned}$$

Encuentre el óptimo del consumidor en este caso.

$$\max_{x,y} W(x,y)$$

[2] Ejercicio tomado de ACCG

sujeto a

$$P_x x + P_y y \leq m$$

Utilizando la maximización de Lagrange (se maximiza la utilidad)

$$L = W(x, y) + \lambda\,(m - P_x x - P_y y)$$

donde λ es denominado el multiplicador de Lagrange. En el caso económico, este multiplicador indica cómo afecta la existencia de la restricción al valor óptimo de la utilidad.

Aplicando derivadas parciales para maximizar

$$\frac{\partial L}{\partial x} = W_x - \lambda P_x = \theta x^{(\theta-1)} y^{(1-\theta)} - \lambda P_x = 0 \Rightarrow \frac{W_x}{P_x} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = W_y - \lambda P_y = (1-\theta) y^{-\theta} x^{\theta} - \lambda P_y = 0 \Rightarrow \frac{W_y}{P_y} = \lambda$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_x x + P_y y = m$$

de las primeras dos derivadas parciales podemos igualar el valor de lambda para obtener la condición óptima (TMS = restricción presupuestaria)

Ahora bien, sustituyendo con los valores de las derivadas

$$\frac{\theta x^{(\theta-1)} y^{(1-\theta)}}{(1-\theta) y^{-\theta} x^{\theta}} = \frac{P_x}{P_y}$$
$$\frac{\theta x^{-1} y}{(1-\theta)} = \frac{P_x}{P_y}$$
$$\frac{\theta y}{(1-\theta) x} = \frac{P_x}{P_y}$$

Despejando el valor de y

$$y = \frac{(1-\theta) x P_x}{\theta P_y}$$

e inyectándolo en la restricción presupuestaria tenemos

$$P_x x + P_y \left[\frac{(1-\theta) P_x x}{\theta P_y}\right] = m$$
$$\theta P_x x + (1-\theta) P_x x = \theta m$$
$$x^* = \frac{\theta m}{P_x}$$

donde x^* es la demanda marshalliana de x y retomando el valor de y

donde y^* es la demanda marshalliana de y.

Nota 5. Note que cada una de las demandas de los bienes dependen únicamente de su propio precio. La elasticidad cruzada de demanda es cero, es por esto que **las Cobb-Douglas no son apropiadas para representar bienes sustitutos o complementos**.

Ejemplo 2 [Una transformación monótona útil]. ¿Qué sucedería si la función de utilidad fuera de la forma $U(x,y) = x^2y^2$? $\rightarrow$ En primera instancia se puede normalizar la función de la siguiente forma

$$V(x,y) = x^{\frac{2}{2+2}}y^{\frac{2}{2+2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

Vea que los exponentes de la función ahora suman 1 y el procedimiento seria exactamente igual al realizado anteriormente con θ y $(1-\theta)$. Por lo tanto, los resultados de las demandas marshallianas serian

$$\begin{aligned} y^* = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)m}{P_y} &= \frac{m}{2P_y} \\ x^* &= \frac{m}{2P_x} \end{aligned}$$

Ejercicio 4 [Función de utilidad... ¿Cobb-Douglas?]. Para cada nivel de precios e ingresos encuentre la demanda marshalliana de la siguiente función de utilidad

$$u(x_1,x_2) = \sqrt{x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}}$$

Observe que a esta función de utilidad u se le pueden aplicar las leyes de logaritmos para que se parezca a un tipo de funciones ya conocida: la función de utilidad Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= \sqrt{x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}} \\ &= \left(x_1^{\frac{2}{5}}x_2^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x_1^{\frac{2}{10}}x_2^{\frac{3}{10}}\right) \\ &= \left(x_1^{\frac{1}{5}}x_2^{\frac{3}{10}}\right) \end{aligned}$$

Recuerde las demandas marhallianas genéricas de la función de utilidad Cobb-Douglas:

$$\begin{aligned} x^M &= \frac{\alpha m}{p_x(\alpha+\beta)} \\ y^M &= \frac{\beta m}{p_y(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Y con ver la función de utilidad sin la transformación de la normalización de los exponentes $u(x_1,x_2) = \left(x_1^{\frac{1}{5}}x_2^{\frac{3}{10}}\right)$ se puede ver directamente que:

$$\begin{aligned} x^M &= \frac{1m}{5\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)p_x} \\ y^M &= \frac{3m}{10\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}\right)p_y} \end{aligned}$$

Ejercicio 5 [Función de utilidad Cobb-Douglas con restricciones adicionales[3]]. Eduardo consume solamente dos bienes: mascarillas (bien 1) y alimentos (bien 2). Las preferencias de este individuo pueden representarse por medio de la función de utilidad: [9]

$$U(x) = x_1 x_2$$

Para intentar racionar el consumo de mascarillas, el gobierno impone un impuesto del 300 % sobre cada unidad consumida, solo aplicable a partir de la undécima mascarilla comprada. Es decir, las primeras 10 mascarillas que se compran no pagan el impuesto, pero sí lo hacen de la undécima en adelante.
a) Plantee las ecuaciones que representan la restricción presupuestaria que enfrenta Eduardo. Note que son dos restricciones presupuestaria, una para $x_1 \leq 10$, y otra para $x_1 > 10$.

$\rightarrow$ Tenemos dos bienes x_1 y x_2. Y que a partir de la undécima unidad de $x_1, t_1 = 3$. Denotamos el ingreso como m. Entonces para $x_1 \leq 10$:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 \leq m$$

Para $x_1 > 10$:

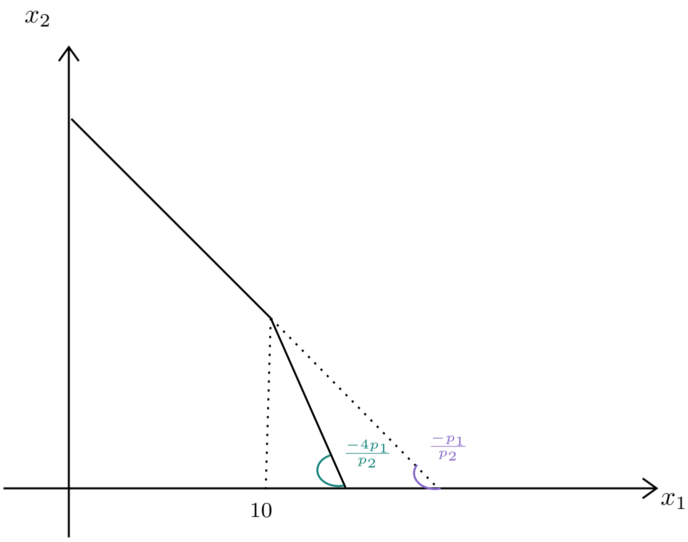
$$\begin{gathered} P_1 x_1 + P_2 x_2 + 3P_1 (x_1 - 10) \leq m \\ \Rightarrow 4P_1 x_1 + P_2 x_2 \leq m + 30P_1 \end{gathered}$$

Sabemos que la restricción se cumplirá con igualdad. Para graficarlas, podemos despejar x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{m}{P_2} - \frac{P_1}{P_2} x_1 \\ x_2 &= \frac{m + 30P_1}{P_2} - \frac{4P_1}{P_2} x_1 \end{aligned}$$

b) Grafique ambas rectas presupuestarias en un mismo gráfico, indique cuáles son sus pendientes y explique por qué la restricción de presupuesto tiene esta forma específica.

$\rightarrow$ La restricción se quiebra a partir del punto en donde las mascarillas se vuelven más caras. A partir de la undécima mascarilla, se debe sacrificar mucho más consumo de alimentos para conseguir una unidad más de mascarillas. Por eso la pendiente pasa de -1 a -4 .



c) Plantee el problema que enfrenta este consumidor y obtenga las funciones de demanda marshalliana. Note que se tienen que calcular los casos para cuando la persona compra menos de 10 mascarillas, 10 mascarillas o más de 10 mascarillas.

$\rightarrow$ El problema del consumidor es maximizar su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria.

[3]Ejercicio tomado de ACCG

Para $x_1 < 10$:

$$\begin{aligned} \text{máx } U = x_1 x_2 \text{ s.a.m } &= x_1 P_1 + x_2 P_2 \\ L = x_1 x_2 + \lambda \left(m - x_1 P_1 - x_2 P_2 \right) \end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 - \lambda P_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2}{P_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x_1}{P_2} \\ \Rightarrow \frac{x_2}{P_1} &= \frac{x_1}{P_2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 P_2}{P_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= m - x_1 P_1 - x_2 P_2 = 0 \\ \Rightarrow m = x_2 P_2 + x_2 P_2 &\Rightarrow x_2^* = \frac{m}{2P_2} \\ &\Rightarrow x_1^* = \frac{m}{2P_1} \end{aligned}$$

Para $x_1 = 10$: Tenemos que $x_1^* = 10$, entonces la restricción presupuestaria luce así:

$$m = 10P_1 + x_2 P_2$$

En este caso, el problema del consumidor para maximizar su utilidad es simplemente gastar todo el ingreso que le queda en x_2 :

$$\Rightarrow x_2^* = \frac{m - 10P_1}{P_2}$$

Para $x_1 > 10$:

$$\begin{aligned} \text{máx } U = x_1 x_2 \quad \text{s.a. } m &= 4x_1 P_1 + x_2 P_2 - 30P_1 \\ L = x_1 x_2 + \lambda \left(m - 4x_1 P_1 - x_2 P_2 - 30P_1 \right) \end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_2 - 4\lambda P_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x_2}{4P_1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_1 - \lambda P_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x_1}{P_2} \\ \Rightarrow \frac{x_2}{4P_1} &= \frac{x_1}{P_2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 P_2}{4P_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= m - 4x_1 P_1 - x_2 P_2 - 30P_1 = 0 \\ &\Rightarrow m = x_2 P_2 + x_2 P_2 - 30P_1 \\ x_2^* &= \frac{m + 30P_1}{2P_2} \\ \Rightarrow x_1^* = \frac{m + 30P_1}{2P_2} \frac{P_2}{4P_1} &= \frac{m + 30P_1}{8P_1} \end{aligned}$$

3.2.4. Función de Utilidad: complementos perfectos

3.2.4.1. El caso de n bienes

Suponga un vector de n bienes de la forma: $\vec{X} = [x_1, x_2, ..., x_n]$. Una función de utilidad de la forma de complementos perfectos (Leontief) dependiente de n bienes tiene la siguiente forma:

$$u\left[x_1, x_2, ..., x_n\right] = \text{mín}\{a_1 x_1, a_2 x_2, ... a_n x_n\}$$

Para una función de utilidad de la forma de complementos perfectos (Leontief) definida para n bienes, se procede a obtener la siguiente función de demanda marshalliana general dada una restricción presupuestaria de la forma $m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$: Se tiene el problema de maximización:

$$\max_{x,y} \quad \min\{a_1x_1, a_2x_2, ...a_nx_n\}$$
$$\text{s.a} \quad m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

(3.37)

Tome en consideración que las funciones de Leontief no son diferenciables, por lo que no les es posible aplicar el procedimiento de Karush-Kuhn-Tucker para encontrar sus demandas Marshallianas.

Nota 6. ***Como nota académica:*** *se le recomienda consultar* [4] *: Monge, Marco Vinicio. 2021. «Funciones De Leontief En Dos Variables. Una Nueva Perspectiva». Análisis Económico 36 (93):159-66. https://doi.org/10.24275/uam/a*

Sin embargo, este 'obstáculo' es fácilmente superable conociendo el hecho de que la condición de optimalidad de las funciones de Leonfief, se obtiene a partir de una igualación de todos sus argumentos internos. Es así que entonces, en el óptimo:

$$a_1x_1 = a_{2x2} = ... = a_nx_n \tag{3.38}$$

Por lo tanto, para dos bienes cualesquiera j,k, se tiene que la condición de optimalidad indica que:

$$a_jx_j = a_kx_k$$

Por lo que, despejando:

$$x_j = \frac{a_kx_k}{a_j}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la restricción presupuestaria, se obtiene que:

$$m = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{a_kx_k}{a_j}\right)$$

$$m = a_kx_k \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{a_j}$$

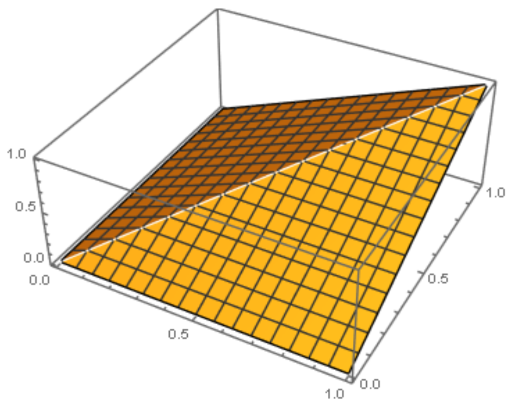
$$\frac{m}{a_k \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{a_j}} = x_k^M \tag{3.39}$$

3.2.4.2. El caso de dos bienes

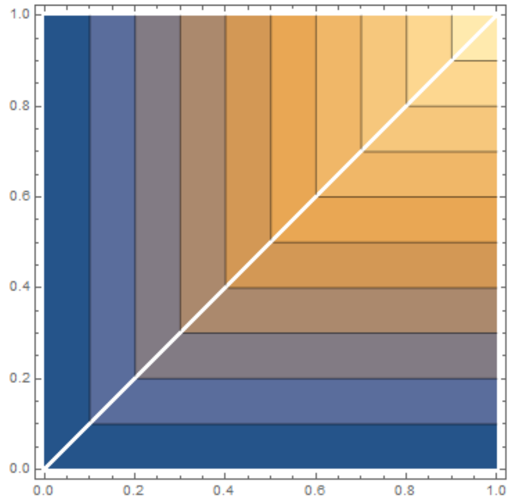
Se tiene el problema de maximización:

$$\max_{x,y} \quad \min\{a_1x_1, a_2x_2\}$$
$$\text{s.a} \quad m = p_x x + p_y y$$

[4] Monge, 2021



:
fig:test1



:
fig:test2

Se sabe que en el óptimo se debe cumplir la condición de optimalidad:

$$a_1 x_1 = a_2 x_2 \tag{3.40}$$

Por lo tanto, despejando para x_1:

$$x_1 = \frac{a_2 x_2}{a_1}$$

Y en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}
m =& p_1 x_1 + p_2 x_2 \\
\Rightarrow m =& p_1 (\frac{a_2 x_2}{a_1}) + p_2 x_2 \\
\Rightarrow m =& x_2 (\frac{p_1 a_2}{a_1} + p_2) \\
\frac{m}{a_2 \frac{p_1}{a_1} + p_2} =& x_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
x_1 =& \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{m}{a_2 \frac{p_1}{a_1} + p_2} \right) \\
x_1 =& \frac{\alpha_2 m}{\alpha_2 p_{1+\alpha_1 p_2}} \\
x_1 =& \frac{m}{p_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p_2}
\end{aligned}$$

Así, aproximadamente, se ven las funciones de demanda por bienes complementarios:

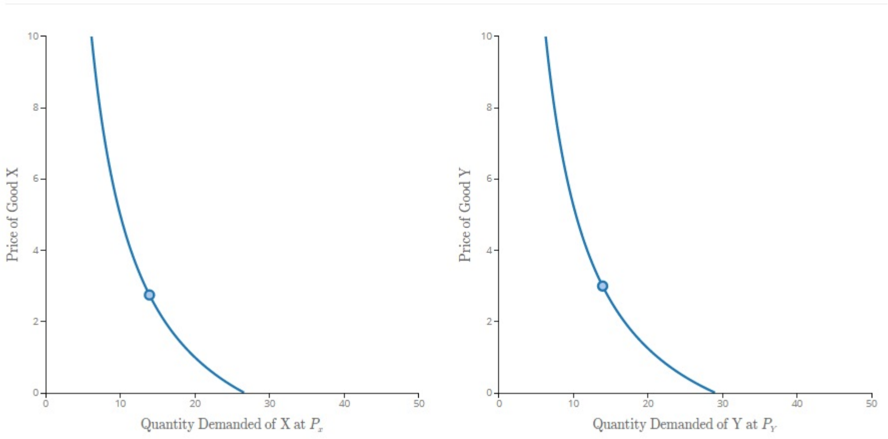


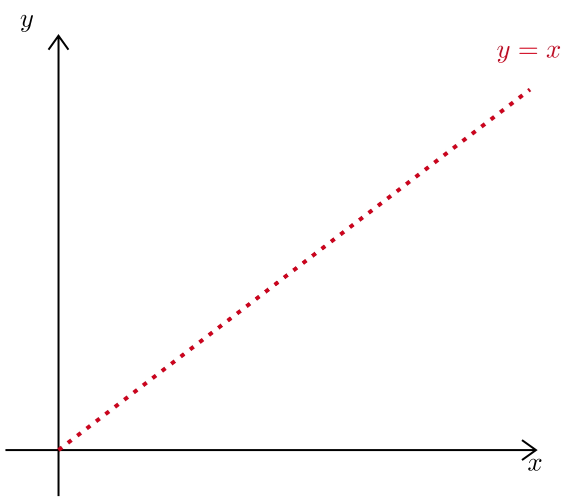
Figura 3.4: Funciones de demanda marshallianas en una función de utilidad de bienes complementarios entre sí.

3.2.4.3. *Cómo graficar curvas de indiferencia para bienes complementarios*

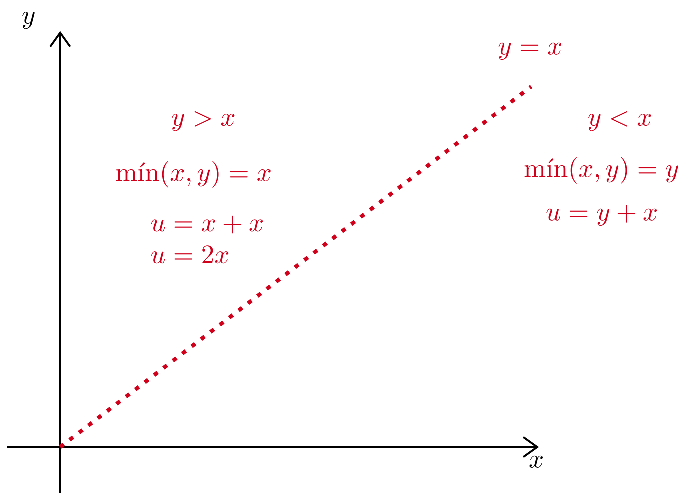
Ejemplo 3 [Niveles de utilidad para bienes complementarios].

- Grafique la función de utilidad $u(x, y) = \text{mín}(x, y) + x$ para $u = 2, 4, 6$.

Primeramente, resulta conveniente hallar el rayo que se obtiene al igualar los argumentos de la función $\text{mín}(x, y)$. Este rayo será de especial importancia para poder determinar las dos regiones en las que el comportamiento de la función de utilidad cambia. De este modo, se tiene que el rayo corresponde a $x = y$.



A partir del rayo, se pueden plantear los diversos casos para la función de complementos. Observe que por encima del rayo de igualdad, las y siempre serán mayores que las x, y por debajo del rayo las x siempre serán mayores que las y.

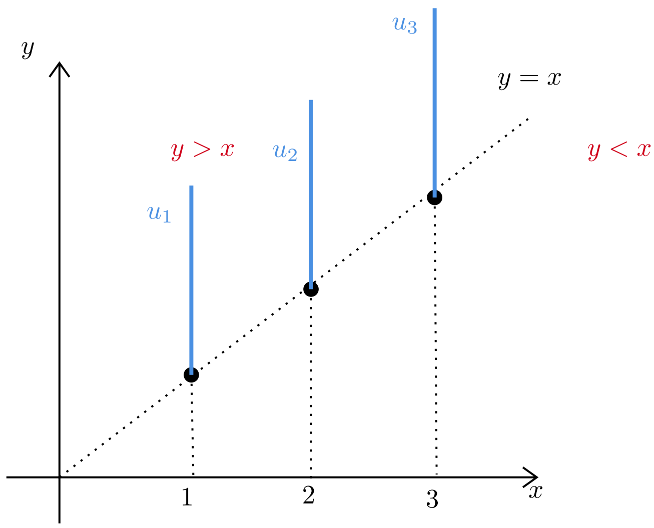


Luego, note que, para la región que está por encima del rayo, la función de utilidad se convierte en $u(x, y) = x + x = 2x$. Por otro lado, para la región que está ubicada por debajo del rayo, se cumple que la función de utilidad corresponde a $u(x, y) = x + y$.

Finalmente, basta sustituir los valores de u por 2, 4 y 6, para las regiones que están por debajo y por encima del rayo. De esta manera, observe que por encima del rayo, dados los tres valores de utilidad dados hacen que se tenga:

$$\begin{aligned} u(x, y) =& 2x \\ 2 =& 2x \Rightarrow 1 = x \\ 4 =& 2x \Rightarrow 2 = x \\ 6 =& 2x \Rightarrow 3 = x \end{aligned}$$

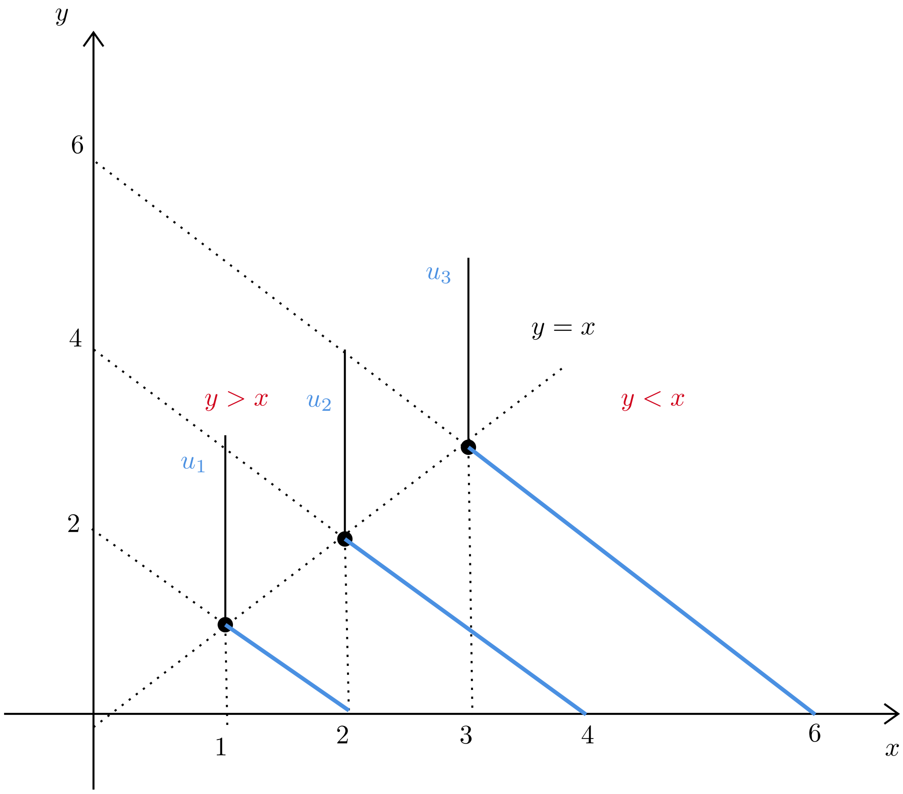
Por ende, por encima del rayo, para los valores de $x = 1, 2, 3$ se tendrán líneas verticales. Así:



Para el caso que está por debajo del rayo, dados los tres valores de utilidad dados hacen que se tenga:

$$\begin{aligned} u(x, y) =& x + y \\ 2 =& x + y \Rightarrow 2 - x = y \\ 4 =& x + y \Rightarrow 4 - x = y \\ 6 =& x + y \Rightarrow 6 - x = y \end{aligned}$$

Por ende, por encima del rayo, para los valores de $x = 1, 2, 3$ se tendrán funciones lineales con pendiente negativa. Así:



Ejercicio 6 [Un caso particular de complementos perfectos[5]]. Considere la siguiente función de utilidad:

$$U = \text{mín}(\alpha x, \beta y)$$

Derive las funciones de demanda:

→ Primeramente, se elabora el gráfico de las curvas de indiferencia.

1. Paso 1: Se igualan los componentes dentro de la función del mínimo para encontrar la ecuación del rayo. La ecuación del rayo es la siguiente:

$$y = \frac{\alpha x}{\beta}$$

[5] Ejercicio tomado de ACCG

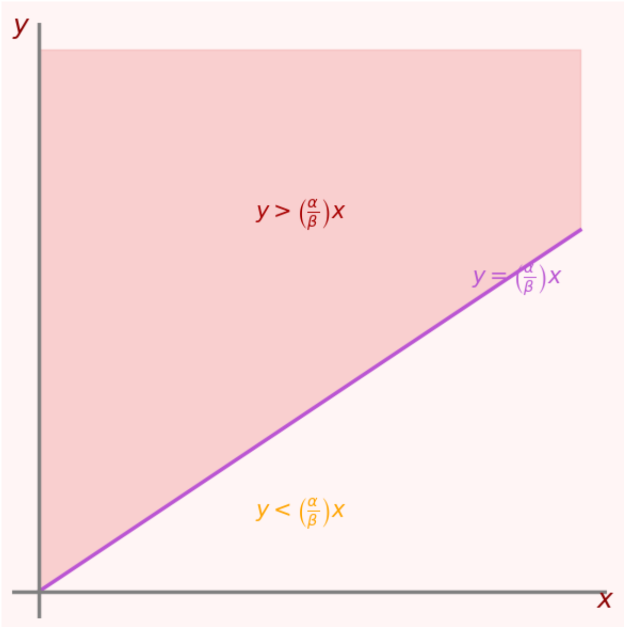


Figura 3.5: Casos posibles a partir de la ecuación del rayo

2. Se dibujan las curvas de indiferencia. Los vértices de las curvas de indiferencia de la función de Leontief se encuentran en el rayo que sale del origen del gráfico.

   Se sabe que:

   - Cuando $\left(y > \frac{\alpha x}{\beta}\right) \Rightarrow U(x,y) = \min(\alpha x, \beta y) = \alpha x$
   - Cuando $\left(y < \frac{\alpha x}{\beta}\right) \Rightarrow U(x,y) = \min(\alpha x, \beta y) = \beta y$

   Con la información anterior se pueden graficar las curvas de indiferencia:

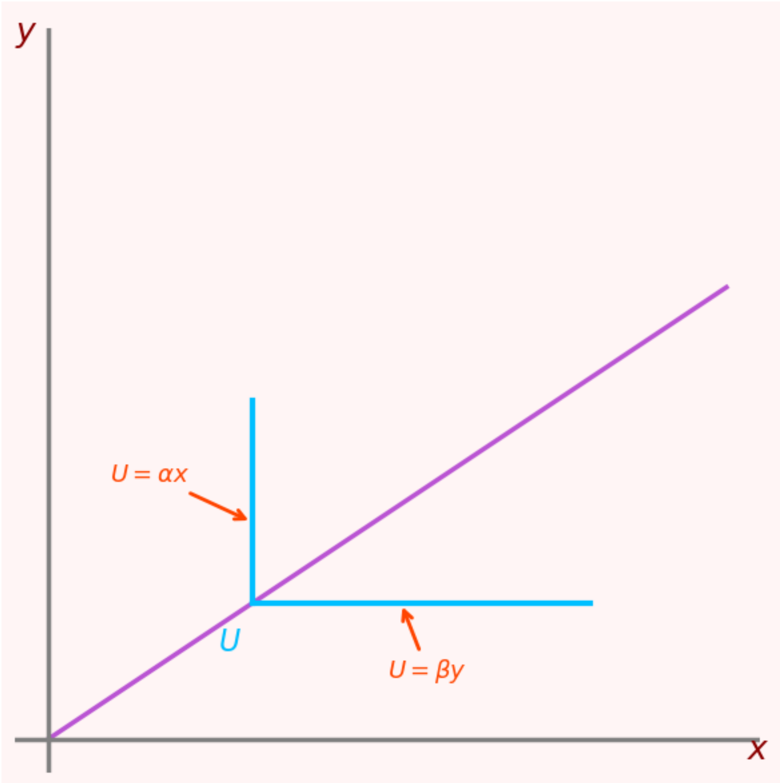


Figura 3.6: Curva de indiferencia para una función de utilidad de complementos perfectos

3. Paso 3: Se calculan las funciones de demanda Se igualan los componentes dentro de la función del mínimo y se sustituyen en la restricción presupuestaria. La ecuación de la restricción presupuestaria es la siguiente:

$$P_x x + P_y y = m$$

Se sustituye ($y = \frac{\alpha x}{\beta}$) en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}
P_x x + P_y \left(\frac{\alpha x}{\beta}\right) &= m \\
x\left(P_x + P_y \frac{\alpha}{\beta}\right) &= m \\
x &= \frac{m}{\left(\frac{P_x\beta + P_y\alpha}{\beta}\right)} \\
x^* &= \frac{\beta m}{P_x\beta + P_y\alpha}
\end{aligned}$$

Al sustituir x^* en $\left(y = \frac{\alpha x}{\beta}\right)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{\beta m}{\beta P_x + \alpha P_y} \\
y^* &= \frac{\alpha m}{\beta P_x + \alpha P_y}
\end{aligned}$$

3.2.5. Función de Utilidad: sustitutos perfectos

3.2.5.1. El caso de n bienes

Derivación general 4 [Sustitutos perfectos con n bienes]. Suponga un vector de n bienes de la forma: $\vec{X} = [x_1, x_2, ..., x_n]$. Una función de utilidad de la forma de complementos perfectos (Leontief) dependiente de n bienes tiene la siguiente forma:

$$u[x_1, x_2, ..., x_n] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Para una función de utilidad de la forma de sustitutos perfectos definida para n bienes, se procede a obtener la siguiente función de demanda marshalliana general dada una restricción presupuestaria de la forma $m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$: Se tiene el problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x}} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \\ \text{s.a} \quad & m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \end{aligned}$$

Se tiene el lagrangeano de la forma:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i)$$

Se plantean las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow a_1 - \lambda p_1 \leq 0 \qquad & x_1[a_1 - \lambda p_1] = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow a_2 - \lambda p_2 \leq 0 \qquad & x_2[a_2 - \lambda p_2] = 0 \\ & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow a_n - \lambda p_n \leq 0 \qquad & x_n[a_n - \lambda p_n] = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad & x_n[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i] = 0 \end{aligned}$$

Ahora, piense en dos grandes posibilidades para un par de mercancías j y k cualesquiera:

1. Si $a_k < \lambda p_k \Rightarrow x_k = 0$
2. Si $x_j > 0$ entonces tiene que ser que $a_j = \lambda p_j \Rightarrow \frac{\alpha_j}{p_j} = \lambda$

De esta manera, se puede observar que si $x_j > 0 \wedge x_k = 0$ tiene que ser que:

$$\frac{a_j}{p_j} > \frac{a_k}{p_k}$$

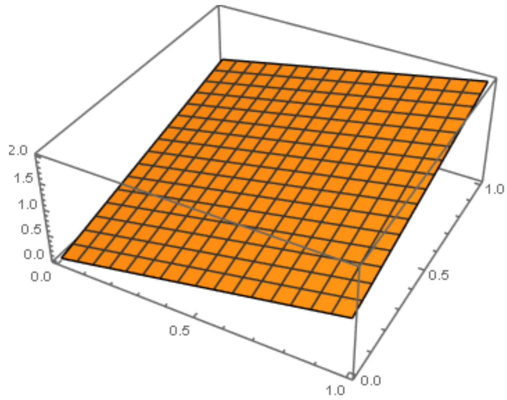
O, en otras palabras:

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_k} > \frac{p_j}{p_k}$$

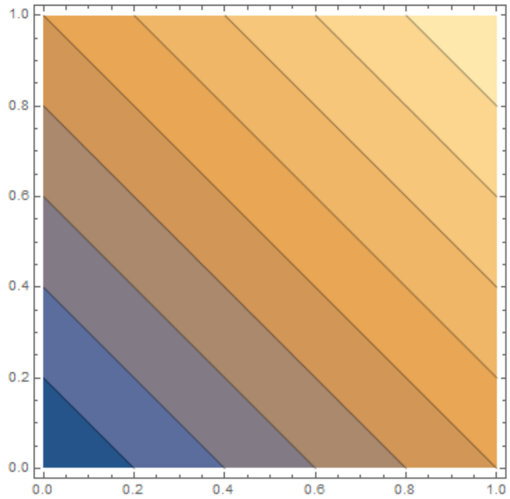
De manera que entonces se presentan los siguientes casos:

$$x_j^M = \begin{cases} \frac{m}{p_j} \quad si & TSM_{j,k} > \frac{p_j}{p_k} \\ 0 \quad si & \exists \quad x_k \quad tal \quad que \quad TSM_{j,k} < \frac{p_j}{p_k} \\ Indeterminado \quad si & TSM_{j,k} = \frac{p_j}{p_k} \end{cases} \tag{3.41}$$

3.2.5.2. El caso de 2 bienes



:
fig:test1



:
fig:test2

Derivación general 5 [Sustitutos perfectos con 2 bienes]. Se tiene el problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x+y \\ \text{s.a} \quad & m = p_x x + p_y y \end{aligned}$$

Entonces:

$$x^M = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_x > p_y \\ \in [0, \frac{m}{p_x}[& \text{si} \quad \text{si} \quad p_x = p_y \\ \frac{m}{p_x} & \text{si} \quad p_x < p_y \end{cases}$$

Mientras que:

$$y^M = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_x < p_y \\ \in [0, \frac{m}{p_y}[& \text{si} \quad \text{si} \quad p_x = p_y \\ \frac{m}{p_y} & \text{si} \quad p_x > p_y \end{cases}$$

Observe que estas funciones de demanda por bienes sustitutos son algo particular: requieren una cierta interpretación geométrica. Para estos efectos, tómese un ejemplo concreto numérico. Suponga que se tiene un ingreso de 80 unidades, el precio del bien x es 4 y el precio del bien y es 3.

Nota 7. Dado que los bienes son sustitutos perfectos entre sí, simple y sencillamente se va a consumir aquel bien que sea más barato y en este caso $4 > 3$, por lo tanto, se gasta todo el ingreso en el bien y de la forma $y = \frac{m}{p_y} \Rightarrow y = \frac{80}{3} \Rightarrow y = 20$.

Ahora, note que mientras que $p_y < p_x$, el consumo del bien x será $x = 0$, y la única forma en la que se empazaría a consumir x es hasta en tanto $p_x = p_y$ y en este caso las demandas no tendrían un valor determinado concreto, serían un rango, lo cual se puede observar en el tramo constante de ambas funciones de demanda, que representan los tramos en que los precios de ambos bienes son idénticos y no habría una única posible forma de "sustituir.entre ellos.

Lo mismo para y, si $p_y > p_x$ entonces $y = 0$ lo cual se puede observar por el tramo vertical en la demanda de y.

Note que para ambos bienes las funciones de demanda tienen 3 tramos:

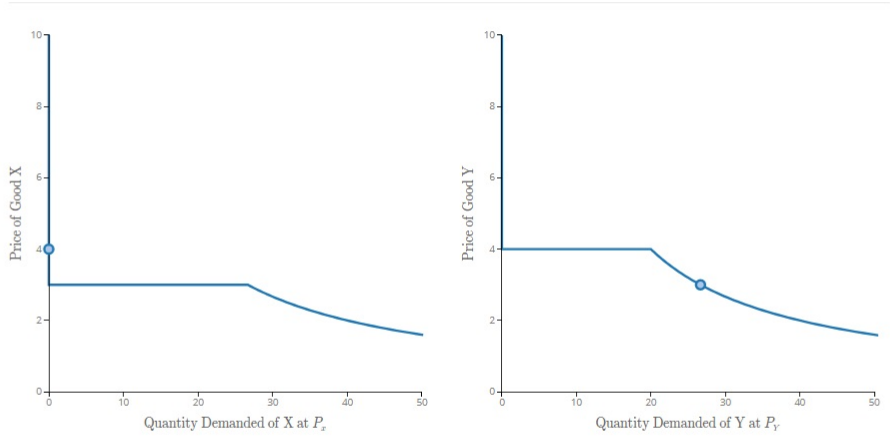


Figura 3.7: Caso particular bienes sustitutos: $m = 80, p_x = 4, p_y = 3$

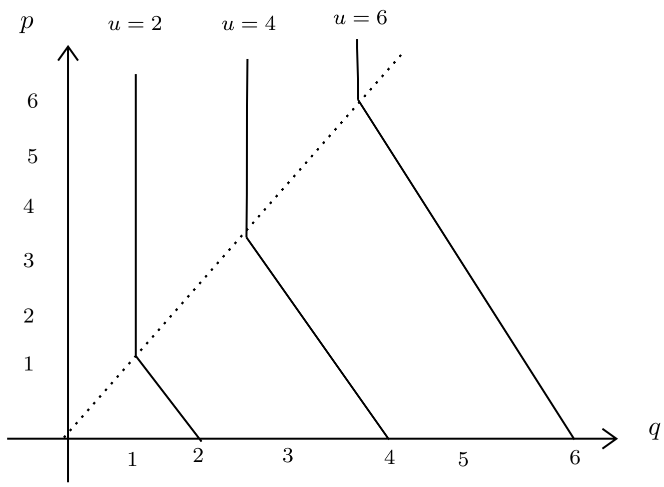
1. Un primer tramo vertical cuando la cantidad demandada es 0 a raíz de que el otro bien es más barato y se consumo todo del otro.
2. Un segundo tramo horizontal cuando ambos bienes valen lo mismo y puede consumirse un rango de posibles combinaciones entre ellos, así que la cantidad demandada no es un número específico sino una posibilidad de valores.
3. Un último tramo que adquiere la forma de las demandas tradicionales ya conocidas que respetan la ley de la demanda, ya que a medida que disminuya el precio, aumenta la cantidad demandada y viceversa. Este sería el tramo aplicable cuando el bien en cuestión tiene un precio menor que el otro y se consume todo de este.

Ejercicio 7 [¿Complementos? ¿Sustitutos?]. Sea U una función de utilidad tal que $U(x, y) = \text{mín}(x, y) + x$

a) Grafique las curvas de indiferencia para $U = 2, U = 4$ y $U = 6$.

Nota 8. Recomendación: En general, para graficar las curvas de Leontief es útil escoger y analizar valores arbitrarios de x y y. Además, es conveniente marcar los rayos definidos al igualar los argumentos de los mínimos y máximos presentes en la función de utilidad.

Tenemos que $U = \text{mín}(x, y) + x$, igualamos los argumentos del mínimo y marcamos el rayo $y = x$.



Por encima del rayo, $y > x$, entonces:

$$U = \text{mín}(x, y) + x = 2x$$

Note que, por encima del rayo, el bien y no aporta a la utilidad, por lo que se vuelve en cierto sentido un bien neutral. (Por eso las curvas de indiferencia por encima del rayo son verticales)

Por debajo del rayo, $y < x$. entonces:

$$U = \min(x, y) + x = y + x$$
$$\Rightarrow y = -x + U$$

Note que, por debajo del rayo, los bienes se comportan como sustitutos perfectos con una tasa marginal de sustitución de -1 . (La pendiente de las curvas de indiferencia es -1) Para construir la curva de indiferencia (CI) de $U = 2$, se pueden evaluar, por ejemplo, los puntos $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ y $(2, 0)$.

Para $U = 4$, se pueden evaluar $(2, 2), (2, 3)$ y $(3, 1)$.
Para $U = 6$, se pueden evaluar $(3, 3), (3, 10)$ y $(5, 1)$.
(Estos puntos se marcaron en rojo)

b) Analice las posibles soluciones según las diferentes rectas presupuestarias:

(a) Caso $P_x > P_y$: la pendiente de la RP sería mayor a la de las CI. El punto óptimo estaría en el vértice, donde escoge consumir cantidades iguales de x y y.

Las demandas de los bienes son: $x = \frac{I}{P_x+P_y}, y = \frac{I}{P_x+P_y}$.
(b) Caso $P_x = P_y$: la pendiente de la recta presupuestaria (RP) sería $m = \frac{-P_x}{P_y} = -1$, la misma pendiente que la de las curvas de indiferencia. Por lo tanto, todos los puntos donde coincide la RP con la mayor CI son puntos óptimos.

Las posibles demandas de los bienes son: $x = \alpha\frac{I}{P_x}, y = (1-\alpha)\frac{I}{P_y}$, con $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
(c) Caso $P_y > P_x$: la pendiente de la RP sería menor a la de las CI. Tendríamos una solución de esquina donde solo se consume del bien x. Es intuitivo ya que x es más barato.

Las demandas de los bienes son: $x = \frac{I}{P_x}, y = 0$.

3.2.6. Funciones de utilidad cuasilineal

3.2.6.1. El caso de n bienes

Una función de utilidad cuasilineal en n variables tiene la forma:

$$u[x_1, x_2, ..., x_n] = ax_1 + f(x_2, ..., x_n) \tag{3.42}$$

De esta manera, en una solución interna (es decir, no de esquina), la demanda por el(los) bien(es) no-lineal depende de precios y no de ingreso, de manera tal que las variables no lineales no tienen efecto ingreso, únicamente efecto sustitución.

Dado que las funciones de utilidad son un caso de composición de funciones, están compuestas por variables lineales y alguna otra variable inserta en alguna otra función que puede variar, de manera que podrían haber muchos ejemplos.

Ejemplo 4 [Función cuasilineal en n bienes].

$$U(\vec{X}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} ln(x_i) \tag{3.43}$$

De manera que para obtener las demandas óptimas de dicha función de utilidad y para el subsecuente problema de maximización, se tiene el siguiente problema de optimización sujeto a una restricción presupuestaria:

$$\max_{\vec{X}} \quad x_1 + \sum_{i=2}^{n} ln(x_i) \text{sujeto a} \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{3.44}$$

Y el correspondiente lagrangiano sería:

$$\mathcal{L} = x_1 + \sum_{i=2}^{n} ln(x_i) + \lambda(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \tag{3.45}$$

Se plantean las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow 1 - \lambda p_1 \leq 0 \qquad & x_1[1 - \lambda p_1] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 \leq 0 \qquad & x_1[\frac{1}{x_2} - \lambda p_2] = 0 \\
& \vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} - \lambda p_n \leq 0 \qquad & x_n[\frac{1}{x_n} - \lambda p_n] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad & \lambda[m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i] = 0
\end{aligned}$$

Examinando la última condición de holgura complementaria:
Caso $\lambda = 0$
Note que si $\lambda = 0$ las utilidades marginales de todos los bienes $\vec{X}$ serían iguales o menores a 0, por lo que no serían bienes y no se consumiría nada. Por monotonía, esto no se acepta y tiene que ser que $m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ y por ende se gasta todo el ingreso.
Caso $\lambda \neq 0 \wedge m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
Ahora, sabiendo que se toma todo el ingreso, tómese el bien x_1:

$$\lim_{x_1 \to 0} 1 = 1$$

Note que la utilidad marginal del bien x_1 cuando su consumo tiende a cero, esta tiende a 1, es positiva y constante. Por lo tanto, note las siguientes posibilidades:

$$TMSS_{1,j} \leq TMSM_{j,k}$$

Caso $x_1 = 0 \Rightarrow TMSS_{1,j} < TMSM_{j,k}$
Entonces se consume 0 del bien x_1, y sabiendo que su demanda marshalliana es $x_1^M = 0$, entonces se tiene:

$$U(\vec{X}) = \sum_{i=2}^{n} ln(x_i)$$

Note que ahora la función de utilidad queda expresada en términos de los biens $i = \{2, n\}$, los cuales, entre sí, son todos idénticos (se comportan matemáticamente igual). De modo que ahora procede a conocer la función de demanda marshalliana para estos bienes. Tómese dos bienes cualesquiera, j y k.

$$\begin{aligned}
TMSS_{j,k} = TMSM_{j,k} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_k}} &= \frac{p_j}{p_k} \\
\Rightarrow \frac{x_k}{x_j} &= \frac{p_j}{p_k} \\
\Rightarrow x_k &= \frac{p_j}{p_k} x_j
\end{aligned}$$

Evaluando en la restricción presupuestaria:

$$m = \sum_{k=2}^{n} p_k x_k \Rightarrow m = \sum_{k=2}^{n} \cancel{p_k} \frac{p_j}{\cancel{p_k}} x_j$$

$$\Rightarrow m = \sum_{k=2}^{n} p_j x_j \Rightarrow m = (n-1)p_j x_j$$

$$\Rightarrow \frac{m}{p_j(n-1)} = x_j^M$$

Note que sólo se ha examinado el caso para el cual $x_1 = 0$. Ahora se procede a examinar el caso restante:
Caso: $1 - \lambda p_1 = 0$
Note que esto implica que:

$$1 = \frac{\lambda}{p_1}$$

$$\frac{1}{p_1} = \lambda$$

De esta manera, se puede proceder a çomparar."el bien x_1 con algún otro bien j cualquiera. Se procede a estipular la condición de optimalidad.

$$TMSS_{1,j} = TMSM_{1,j} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x_j}} = \frac{p_1}{p_j}$$

$$\Rightarrow x_j = \frac{p_1}{p_j}$$

Evaluando en la restricción presupuestaria:

$$m = p_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j x_j \Rightarrow m = \sum_{j=2}^{n} \cancel{p_j} \frac{p_1}{\cancel{p_j}}$$

$$\Rightarrow m = p_1 x_1 + \sum_{j=2} p_1$$

$$\Rightarrow m = p_1 x_1 + (n-1)p_1$$

$$\Rightarrow m = p_1(x_1 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{p_1} + 1 = x_1^M$$

Ejercicio 8 [Otra función cuasilineal en n bienes].

$$U(\vec{X}) = \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{x_i^{1-\sigma}}{1 - \frac{1}{\sigma}}$$

De manera que para obtener las demandas óptimas de dicha función de utilidad y para el subsecuente problema de maximización, se tiene el siguiente problema de optimización sujeto a una restricción presupuestaria:

$$\max_{\vec{X}} \quad \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{x_i^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1 - \frac{1}{\sigma}} \text{sujeto a} \quad m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{3.46}$$

Y el correspondiente lagrangiano sería:

$$\mathcal{L} = \alpha_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{x_i^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda(m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i) \tag{3.47}$$

Se plantean las siguientes condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow \alpha_1 - \lambda p_1 \leq 0 \qquad x_1 \left[a_1 - \lambda p_1\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow (1-\frac{1}{\sigma})\alpha_2 \frac{x_2^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}} - \lambda p_2 \leq 0 \qquad x_2 \left[(1-\frac{1}{\sigma})\alpha_2 \frac{x_2^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}}\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow (1-\frac{1}{\sigma})\alpha_n \frac{x_n^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}} - \lambda p_n \leq 0 \qquad x_n \left[(1-\frac{1}{\sigma})\alpha_n \frac{x_n^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq 0 \qquad \lambda \left[m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = 0$$

Recurriendo a la última condición de primer orden y su respectiva condición de holgura complementaria nace entonces la posibilidad de analizar casos:
Caso: $\lambda = 0$
Observe que si $\lambda = 0$ ningún bien tendría utilidad marginal positiva, de modo que ni siquieran serían bienes, serían males o neutros y no se consumiría nada de ningún bien, lo cual es contrario al supuesto de la monotonía y por ende $\lambda \neq 0$. Esto permite concluir, *contrario sensu*, que $m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ y por ende se gasta todo el ingreso.
Caso: $\lambda \neq 0 \wedge m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ Considere el bien x_1 y su respectiva condición de holgura complementaria:

$$x_1 \left[a_1 - \lambda p_1\right] = 0$$

Recuerde que esto, de manera detallada es:

$$x_1 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right] = 0$$

Que en otras palabras es:

$$x_1 \left[\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} - \lambda p_1\right] = 0$$

Es decir:

$$x_1 \left[UMg_{x_1} - \lambda p_1\right] = 0$$

Observe que nacen dos posibilidades:
$x_1 = 0$
En cuyo caso, no se consume nada de x_1:
A partir de lo cual se deduciría que:

$$\Rightarrow \alpha_1 = \lambda p_1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{p_1} = \lambda$$

Note que $UMg_{x_1} = \alpha_1$, y

$$\lim_{x_1 \to 0} \alpha_1 = \alpha_1$$

Es decir, que cuando x_1 tiende a ser cero, y se va a recibir la primera unidad de ese bien, la utilidad marginal se **mantiene constante**, en oposición a casos anteriores en donde la utilidad marginal tendía hacia infinito. De modo que aquí cabe un análisis distinto.

Entonces:

$$u(x_2, ..., x_n) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \frac{x_i^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}}$$

Con respecto a los bienes $i=\{2,n\}$, se tiene la condición de holgura complementaria, para un bien i, de la forma:

$$x_i\left[(1-\frac{1}{\sigma})\alpha_i\frac{x_i^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}}-\lambda p_i\right]=0$$

Observe que entonces nace la posibilidad de dos casos:
Caso $x_i=0$
En este caso, el consumo del bien x_i sería nulo, cero. Y otro caso que sería:
Caso: $(1-\frac{1}{\sigma})\alpha_i\frac{x_i^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}}-\lambda p_i=0$

En este caso, haciendo el mismo análisis realizado para el bien x_1, observe que:

$$\lim_{x_i\to 0}(1-\frac{1}{\sigma})\alpha_i\frac{x_i^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}}=\infty$$

De manera que para los bienes $i=\{2,n\}$, no cabe la posibilidad de que el consumo de estos bienes sea 0, puesto que la utilidad marginal cuando el consumo de estos tiende a 0, la utilidad marginal tiende a infinito, de manera que el consumo de los bienes $i=\{2,n\}$ debe ser positivo.

Por tanto, tomando dos bienes cualesquiera j,k, se tiene que en el óptimo:

$$\frac{\left(\cancel{1-\frac{1}{\sigma}}\right)\alpha_j\frac{x_j^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{\cancel{1-\frac{1}{\sigma}}}}{\left(\cancel{1-\frac{1}{\sigma}}\right)\alpha_k\frac{x_k^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{\cancel{1-\frac{1}{\sigma}}}}=\frac{p_j}{p_k}\Rightarrow\frac{\frac{a_j}{x_j^{\frac{1}{\sigma}}}}{\frac{a_k}{x_k^{\frac{1}{\sigma}}}}=\frac{p_j}{p_k}$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\left(\frac{x_k}{x_j}\right)^{\frac{1}{\sigma}}=\frac{p_j}{p_k}\Rightarrow\left(\frac{x_k}{x_j}\right)^{\frac{1}{\sigma}}=\frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k}$$

$$\Rightarrow\frac{x_k}{x_j}=\left(\frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k}\right)^{\sigma}\Rightarrow x_k=\left(\frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k}\right)^{\sigma}x_j$$

Evaluando en la restricción presupuestaria:

$$m=\sum_{k=2}^{n}p_k x_k\Rightarrow m=\sum_{k=2}^{n}p_k\left(\left(\frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k}\right)^{\sigma}x_j\right)$$

$$m=x_j\left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\sigma}\sum_{k=2}^{n}p_k\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\sigma}$$

Y por tanto:

$$\therefore x_j^M=\left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\sigma}\frac{m}{\sum_{k=2}^{n}p_k\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\sigma}}\qquad x_1^M=0$$

Ahora, el caso faltante:
$\alpha_1-\lambda p_1=0$
Tómese entonces el bien x_1 y otro cualquiera x_j:

$$\frac{\alpha_1}{(1-\frac{1}{\sigma})\alpha_j\frac{x_j^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{1-\frac{1}{\sigma}}}=\frac{p_1}{p_j}\Rightarrow\frac{\alpha_1}{(\cancel{1-\frac{1}{\sigma}})\alpha_j\frac{x_j^{1-\frac{1}{\sigma}-1}}{\cancel{1-\frac{1}{\sigma}}}}=\frac{p_1}{p_j}$$

$$\frac{\alpha_1}{\frac{\alpha_j}{x_j^{\frac{1}{\sigma}}}}=\frac{p_1}{p_j}\Rightarrow\frac{\alpha_1 x_j^{\frac{1}{\sigma}}}{\alpha_j}=\frac{p_1}{p_j}$$

$$\Rightarrow x_j^{\frac{1}{\sigma}}=\frac{\alpha_j p_1}{\alpha_1 p_j}\Rightarrow x_j^M=\left(\frac{\alpha_j p_1}{\alpha_1 p_j}\right)^{\sigma}$$

Evaluando en la restricción presupuestaria:

$$
\begin{aligned}
m = p_1x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j x_j \Rightarrow & m = p_1x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j (\frac{\alpha_j p_1}{\alpha_1 p_j})^{\sigma} \\
\Rightarrow & m = p_1x_1 + \left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\sigma} \sum_{j=2}^{n} p_j (\frac{\alpha_j}{p_j})^{\sigma} \\
\therefore x_1^M = & \frac{m - (\frac{p_1}{\alpha_1})^{\sigma} \sum_{j=2}^{n} \alpha_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma}}{p_1} \qquad x_j^M = \left(\frac{\alpha_j p_1}{\alpha_1 p_j}\right)^{\sigma}
\end{aligned}
$$

3.2.6.2. El caso de dos bienes

Una función de utilidad cuasilineal en n variables tiene la forma:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + f(x_2) \tag{3.48}$$

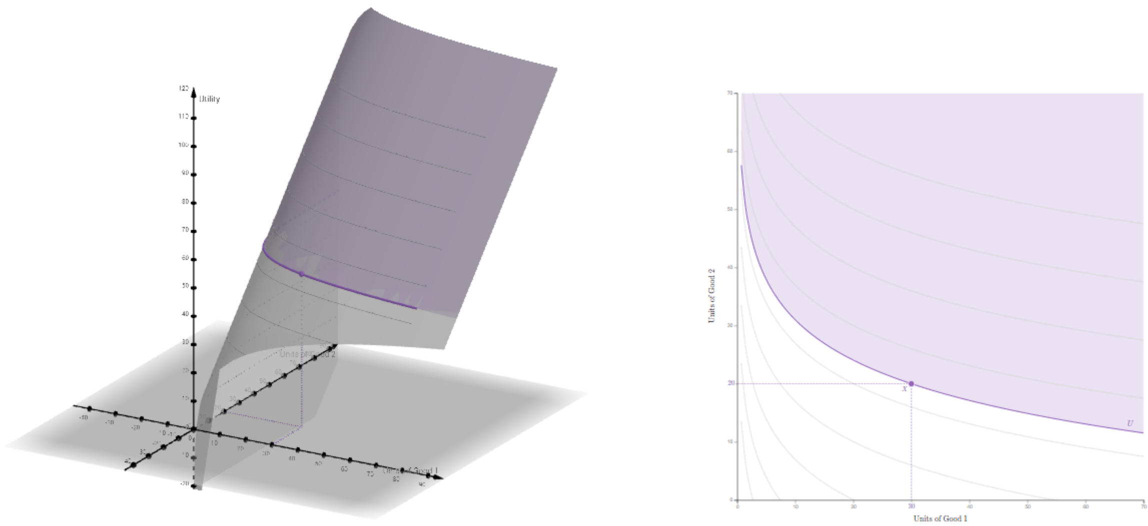


Figura 3.8: Una función de utilidad cuasilineal en dos bienes

Ejemplo 5 [Función cuasilineal en dos variables]. Considere la función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1 + \ln x_2$.

- Encuentre la función de demanda de los dos bienes. No considere casos de esquina.

  Se tiene el siguiente problema de maximización:

  $$\max_{x_1,x_2} \quad x_1 + ln(x_2) \text{sujeto a} \quad m = p_1x_1 + p_2x_2 \tag{3.49}$$

  Y el respectivo lagrangiano sería:

  $$\mathcal{L} = x_1 + ln(x_2) + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

  Y se plantean las siguientes condiciones de primer orden:

  $$
  \begin{aligned}
  \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow 1 = \lambda p_1 \Rightarrow \frac{1}{p_1} = \lambda \\
  \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \lambda p_2 \Rightarrow \frac{1}{x_2 p_2} = \lambda \\
  \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow m - p_1x_1 - p_2x_2
  \end{aligned}
  $$

Y planteando $\lambda = \lambda$ entonces:

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{x_2 p_2}$$
$$x_2^M = \frac{p_1}{p_2}$$

Note que el bien no lineal encuentra su demanda marshalliana directamente del planteamiento de la condición de optimalidad $TMSS_{x_1,x_2} = TMSM$. Y evaluando en la restricción presupuestaria:

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \Rightarrow m = p_1x_1 + \cancel{p_2}\left(\frac{p_1}{\cancel{p_2}}\right)$$
$$\Rightarrow m = p_1x_1 + p_1 \Rightarrow m = p_1(x_1 + 1)$$
$$\Rightarrow \frac{m}{p_1} = x_1 + 1 \Rightarrow \frac{m}{p_1} - 1 = x_1^M$$

Observe que la función de demanda del bien x_2 no depende de m, es decir, es un bien que ante eventuales cambios en el ingreso, permanece constante (no tiene efecto renta o efecto ingreso), sin embargo el bien x_1 sí depende de m, de forma que sí tendría eventualmente un efecto ingreso.

Ejercicio 9 [Función de utilidad cuasilineal en dos variables]. Considere la función de utilidad $u(x, y) = x + \ln y - 1$.

- Encuentre la función de demanda de los dos bienes. No considere casos de esquina.

  Se sabe que en el óptimo se tiene que cumplir la condición de optimalidad $TMSS_{x,y} = TMSM_{x,y}$, por lo que entonces:

$$\frac{UMG_x}{UMg_y} = \frac{p_x}{p_y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{y-1}} = \frac{p_x}{p_y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{y-1}{1} = \frac{p_x}{p_y}$$
$$\Leftrightarrow y - 1 = \frac{p_x}{p_y}$$
$$\Leftrightarrow y^M = \frac{p_x}{p_y} + 1$$

  Observe que de la condición de optimalidad planteada, se obtiene una expresión que no depende del consumo del otro bien x, por lo cual esta es la función de demanda marshalliana del bien y. Esta función de demanda tampoco depende del ingreso, puesto es el bien no lineal en la función de utilidad.

  Ahora, para encontrar el bien x se evalúa la expresión de y encontrada en la restricción presupuestaria. Así:

$$m = p_x x + p_y y$$
$$\Rightarrow m = p_x x + p_y\left(\frac{p_x}{p_y} + 1\right)$$
$$\Leftrightarrow m = p_x x + \cancel{p_y}\left(\frac{p_x + p_y}{\cancel{p_y}}\right)$$
$$\Leftrightarrow m = p_x x + p_x + p_y$$
$$\Leftrightarrow m - p_y = p_x x + p_x$$
$$\Leftrightarrow m - p_y = p_x(x + 1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{m - p_y}{p_x} = x + 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{m - p_y}{p_x} - 1 = x^M$$

Ejercicio 10 [Función de utilidad cuasilineal con un parámetro]. Encuentre la demanda marshalliana de la siguiente función de utilidad

$$u(x,y) = A\ln(1+x) + y$$

En el óptimo se sabe que:

$$\begin{aligned}
TMSS_{x,y} =& TMSM_{x,y} \\
\Leftrightarrow \frac{UMg_x}{UMg_y} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{\frac{A}{1+x}}{1} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{A}{1+x} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{Ap_y}{p_x} =& 1+x \\
\frac{Ap_y}{p_x} - 1 =& x^M
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}
m =& p_x x + p_y y \\
m =& p_x\left(\frac{Ap_y}{p_x} - 1\right) + p_y y \\
m =& p_x\left(\frac{Ap_y - p_x}{p_x}\right) + p_y y \\
m =& \cancel{p_x}\left(\frac{Ap_y - p_x}{\cancel{p_x}}\right) + p_y y \\
m =& Ap_y - p_x + p_y y \\
m - Ap_y + p_x =& p_y y \\
\frac{m - Ap_y + p_x}{p_y} =& y^M
\end{aligned}$$

Ejercicio 11 [Función de utilidad cuasilineal en dos bienes]. Obtenga la demanda marshalliana para la siguiente función de utilidad y considere los casos de solución de esquina.

$$u(x,y) = 2\sqrt{x} + y$$

Primero hay que comprobar si existe la posibilidad de que haya solución de esquina

- Bien x

$$\begin{aligned}
UMg_x =& \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^{-\frac{1}{2}} \\
=& \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Se examina el límite de UMg_x a medida que x tiende a 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} UMg_x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\
=& \infty
\end{aligned}$$

Esto significa que cuando se tiene muy poco o nada del bien x, la primera unidad que se consuma generaría una utilidad marginal positiva e infinita, por lo cual, se querría consumir ese bien y no tendría sentido consumir 0 del mismo, y por lo tanto, no puede haber solución de esquina para el bien x.

- Bien y

$$UMg_y = 1$$

Se examina el límite de UMg_y a medida que y tiende a 0.

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} UMg_y &= \lim_{y\to 0} \\ &= 1\end{aligned}$$

Dado que el límite de la utilidad marginal del bien y es constante, es posible que haya solución de esquina para el bien y.

Así, habría que analizar casos:

- $\underbrace{y^M = 0 \wedge x^M = \frac{m}{p_x}}_{\text{se gasta todo en x}}$

- $y^M \neq 0$

  Se procede a obtener las demandas marshallianas con normalidad. Se sabe que en el óptimo:

$$\begin{aligned} TMS_{x,y} &= TMSM_{x,y} \\ \Leftrightarrow \frac{UMg_x}{UMg_y} &= \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}{1} &= \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} &= \frac{p_x}{p_y} \\ \frac{p_y}{p_x} &= x^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 &= x^M \end{aligned}$$

Evaluando en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}
m =& p_y y + p_x x \\
m =& p_y y + p_x \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \\
m =& p_y y + \cancel{p_x} \left(\frac{p_y^2}{p_x^{\cancel{2}}}\right) \\
m =& p_y y + \frac{p_y^2}{p_x} \\
m - \frac{p_y^2}{p_x} =& p_y y \\
\frac{m - \frac{p_y^2}{p_x}}{p_y} =& y \\
\frac{\frac{mp_x - p_y^2}{p_x}}{p_y} =& y \\
\frac{mp_x - p_y^2}{p_x p_y} =& y^M
\end{aligned}$$

Ejercicio 12 [Otra función de utilidad cuasilineal con un parámetro]. Encuentre la demanda marshalliana de la siguiente función de utilidad

$$u(x, y) = A\ln(1 + x) + y$$

En el óptimo se sabe que:

$$\begin{aligned}
TMSS_{x,y} =& TMSM_{x,y} \\
\Leftrightarrow \frac{UMg_x}{UMg_y} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{\frac{A}{1+x}}{1} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{A}{1+x} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\frac{Ap_y}{p_x} =& 1 + x \\
\frac{Ap_y}{p_x} - 1 =& x^M
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}
m =& p_x x + p_y y \\
m =& p_x \left(\frac{Ap_y}{p_x} - 1\right) + p_y y \\
m =& p_x \left(\frac{Ap_y - p_x}{p_x}\right) + p_y y \\
m =& \cancel{p_x} \left(\frac{Ap_y - p_x}{\cancel{p_x}}\right) + p_y y \\
m =& Ap_y - p_x + p_y y \\
m - Ap_y + p_x =& p_y y \\
\frac{m - Ap_y + p_x}{p_y} =& y^M
\end{aligned}$$

Ejercicio 13 [Función de utilidad cuasilineal con complementos]. Considere la función de utilidad $u(x,y) = x + \text{mín}(x,y)$.

- Encuentre la función de demanda de los dos bienes. No considere casos de esquina.

  En esta ocasión deben plantearse casos según sea menor x o y o incluso que sean iguales.

  $\begin{cases} u(x,y) = & x + x = 2x \text{ si } x < y \\ u(x,y) = & x + y \text{ si } x > y \end{cases}$ Luego, dada la anterior función de utilidad, considere cada posible relación de precios. Con ello, se obtiene que las demandas marshallianas corresponden a:

Ejercicio 14 [Suma de logaritmos[6]]. Considere la siguiente función de utilidad:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \ln x + \ln(y-1) \\ x > 0 \wedge y - 1 > 0 \end{aligned}$$

Derive las funciones de demanda marshallianas a partir de la función de utilidad dada.
Se sabe que en el óptimo debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} TMSS_{x,y} =& TMSM_{x,y} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y-1}} =& \frac{p_x}{p_y} \\ \Leftrightarrow \frac{y-1}{x} =& \frac{p_x}{p_y} \\ \Leftrightarrow y - 1 =& \frac{p_x}{p_y} x \\ \Leftrightarrow y =& \frac{p_x}{p_y} x + 1 \end{aligned}$$

Y evaluando en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} m =& p_x \cdot x + p_y \cdot y \\ m =& p_x \cdot x + p_y \cdot \left(\frac{p_x x}{p_y} + 1 \right) \\ m =& p_x \cdot x + \cancel{p_y} \cdot \left(\frac{p_x x + p_y}{\cancel{p_y}} \right) \\ m =& p_x x + p_x x + p_y \\ m - p_y =& p_x x + p_x x \\ m - p_y =& 2 p_x x \\ \frac{m - p_y}{2 p_x} =& x^M \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

[6] Tomado de Chaves, Con y Guevara (2022)

$$
\begin{aligned}
y =& \frac{p_x}{p_y}x + 1 \\
\Leftrightarrow y =& \frac{p_x}{p_y}\left(\frac{m - p_y}{2p_x}\right) + 1 \\
\Leftrightarrow y =& \frac{\cancel{p_x}}{p_y}\left(\frac{m - p_y}{2\cancel{p_x}}\right) + 1 \\
\Leftrightarrow y =& \frac{m - p_y}{2p_y} + 1 \\
\Leftrightarrow y =& \frac{m - p_y + 2p_y}{2p_y} \\
\Leftrightarrow y^M =& \frac{m + p_y}{2p_y}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 15 [Función de utilidad cuasilineal en dos bienes[7]]. Considere la siguiente función de utilidad:

$$
\begin{aligned}
u(x, y) =& \alpha \ln(1 + x) \ln y \\
\alpha \in& \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

Derive las funciones de demanda marshallianas a partir de la función de utilidad dada.
Se sabe que en el óptimo debe cumplirse que:

$$
\begin{aligned}
TMSS_{x,y} =& TMSM_{x,y} \\
\Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha \ln y}{1+x}}{\frac{\alpha \ln(1+x)}{y}} =& \frac{p_x}{p_y} \\
\Leftrightarrow \frac{\cancel{\alpha} y \ln y}{\cancel{\alpha}(1 + x)\ln(1 + x)} =& \frac{p_x}{p_y}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 16 [Una función de utilidad diferente[8]]. Considere la siguiente función de utilidad:

$$
\begin{aligned}
U(x, y) &= \ln x + \ln(y - 1) \\
&(x > 0) \wedge (y > 1)
\end{aligned}
$$

Se utiliza la condición de optimalidad para encontrar las demandas marshallianas:

$$
\begin{aligned}
\frac{UM_x}{UM_y} &= \frac{P_x}{P_y} \\
\frac{1/x}{1/(y - 1)} &= \frac{P_x}{P_y} \\
\frac{y - 1}{x} &= \frac{P_x}{P_y} \\
x &= \frac{(y - 1)P_y}{P_x}
\end{aligned}
$$

Se sustituye x en la restricción presupuestaria para encontrar y^*.

$$
\begin{aligned}
m &= P_x x + P_y y \\
m &= P_x\left[\frac{(y - 1)P_y}{P_x}\right] + P_y y \\
y^* &= \frac{m + P_y}{2P_y}
\end{aligned}
$$

[7] Ejercicio tomado de ACCG
[8] Ejercicio tomado de ACCG

Al sustituir y^* en $x = \frac{(y-1)P_y}{P_x}$, se obtiene el siguiente resultado.

$$x^* = \frac{m - P_y}{2P_x}$$

Ejercicio 17 [Función de utilidad cuasilineal: solución interna y de esquina[9]]. A continuación se derivan las funciones de demanda a partir de la siguientes funciones de utilidad:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \alpha \ln(1+x)\ln(y) \\ &\alpha \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Primeramente, se debe evaluar si existen soluciones de esquina. Para determinar esto se utilizan los límites de las utilidades marginales cuando el bien correspondiente tiende a cero.

$$\begin{aligned} UM_x = \alpha\frac{1}{1+x} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{1+x} &= \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ UM_y = 1 \Rightarrow \lim_{y\to 0} 1 &= 1 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen tres casos para encontrar las demandas marshallianas, ya que puede haber solución de esquina para el bien x o el bien y.

Caso 1: $(x = 0) \wedge (y \neq 0)$

Las demandas marshallianas serían las siguientes:

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ y^* &= \frac{m}{P_y} \end{aligned}$$

Esto significa que todo el ingreso se destina al consumo del bien y.

Caso 2: $(x \neq 0) \wedge (y = 0)$:

Las demandas marshallianas serían las siguientes:

$$\begin{aligned} y^* &= 0 \\ x^* &= \frac{m}{P_x} \end{aligned}$$

Esto significa que todo el ingreso se destina al consumo del bien x .

Caso 3: $(x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$

Se utiliza la condición de optimalidad para encontrar las demandas marshallianas:

$$\begin{aligned} \frac{UM_x}{UM_y} &= \frac{P_x}{P_y} \\ \frac{\left(\frac{\alpha}{1+x}\right)}{1} &= \frac{P_x}{P_y} \\ x^* &= \frac{\alpha P_y - P_x}{P_x} \end{aligned}$$

Se sustituye x^* en la restricción presupuestaria para encontrar y^*.

$$\begin{aligned} m &= P_x x + P_y y \\ m &= P_x\left(\frac{\alpha P_y - P_x}{P_x}\right) + P_y y \\ y^* &= \frac{m - \alpha P_y + P_x}{P_y} \end{aligned}$$

[9]Ejercicio tomado de ACCG

Capítulo 4

El problema de minimización del gasto

Los problemas de minimización del gasto o el ingreso sujeto a una restricción presupuestaria pueden ser resueltos mediante el método de los multiplicadores de Lagrange si las curvas de indiferencias son convexas y hay solución interna. Adicionalmente, también se puede utilizar el metodo de Karush-Kuhn-Tucker para resolver estos problemas de forma más general.

Para efectos prácticos: lo que hay que hacer para encontrar las funciones de demanda hicksianas, lo que se puede hacer es evaluar la condición de optimalidad encontrada durante el proceso de resolución de las demandas marshallianas y en la función de utilidad. Esto va a permitir obtener una función que depende de precios y de la utilidad.

4.1. Caso de n-bienes

Derivación general 6 [Minimización del gasto con n insumos]. Suponga un consumidor que presenta una función de utilidad de la forma: $u(\vec{X})$, la cual se desea maximizar dada una cierta restricción presupuestaria de la forma $m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, entonces, se tiene el siguiente problema que describe la maximización de su utilidad:

$$\min_{x_1, x_2, \ldots, x_n} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \text{sujeto a} \quad u \leq u(\vec{X}) \tag{4.1}$$

De esta forma, se puede plantear el siguiente lagrangeano para resolver el problema de maximización.

Por el teorema de Karush-Kuhn-Tucker debe cumplirse:

$$\mathcal{L} : \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda \left(\vec{x} - u \right)$$

Por el teorema de Karush-Kuhn-Tucker debe cumplirse:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} \leq 0 \qquad x_1 \left[\frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} \leq 0 \qquad x_2 \left[\frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_2}\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} \leq 0 \qquad x_1 \left[\frac{\partial \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right]}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_n}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \Rightarrow u(\vec{X}) - u \leq 0 \qquad \lambda \left[u(\vec{X}) - u\right] = 0$$

Para este caso igualmente se pueden hacer todas las consideraciones anteriores sobre las posibilidad de casos de esquina y soluciones interiores de manera análoga. Las condiciones anteriores se pueden reformular de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow p_1 - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} \leq 0 \qquad x_1 \left[p_1 - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow p_2 - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_2} \leq 0 \qquad x_2 \left[p_2 - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_2}\right] = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow p_n - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_n} \leq 0 \qquad x_n \left[p_n - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_n}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \leq 0 \Rightarrow u(\vec{X}) - u \leq 0 \qquad \lambda \left[u(\vec{X}) - u\right] = 0$$

La solución a estos problemas de minimización se llaman **funciones hicksianas de demanda**, también llamadas demandas compensadas . Estas funciones se caracterizan porque **dependen de los precios de todos los bienes de la función de utilidad y de la utilidad**.

Entonces, si se descarta la posibilidad de soluciones de esquina, las condiciones de optimalidad pueden resumirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
p_1 - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} &= 0 && \Leftrightarrow \frac{p_1}{\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1}} = \lambda \\
p_2 - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_2} &= 0 && \Leftrightarrow \frac{p_2}{\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_2}} = \lambda \\
&\vdots \\
p_n - \lambda \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_n} &= 0 && \Leftrightarrow \frac{p_n}{\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_n}} = \lambda
\end{aligned}$$

Ahora, tomándose dos bienes cualesquiera j y k puede observarse que:

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow \frac{p_j}{\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_j}} = \frac{p_k}{\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_k}}$$

$$\frac{p_j}{p_k} = \frac{\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_j}}{\frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_k}} \Leftrightarrow \frac{p_j}{p_k} = \frac{UMg_{x_j}}{UMg_{x_k}}$$

Observe que la condición de optimalidad a la que se llega para obtener funciones de demanda hicksianas es la misma que para obtener las funciones de demanda marshallianas. La diferencia es que ahora, al evaluar la condición de optimalidad en la restricción del problema, se hace en la función de utilidad y no en la restricción presupuestaria (por lo que irónicamente no sería la función restricción) dado que esta restricción presupuestaria es la función objetivo que se desea minimizar.

Al evaluar la condición de optimalidad en la función restricción que es la función de utilidad, se obtendrá una expresión que depende de los precios y de la utilidad, por lo cual termina siendo una expresión distinta a lo que se llega en las funciones de demanda marshallianas.

4.2. Caso de 2 bienes

4.3. Función de Elasticidad de Sustitución Constante

Para la función de utilidad CES, la condición de optimalidad $TMSS_{j,k} = TMSM_{j,k}$ implica que

$$x_k = \left(\frac{p_j \alpha_k}{p_k \alpha_j} \right)^{\frac{1}{1+\rho}} x_j$$

Por lo tanto, para obtener la función de demanda hicksiana se evalúa esa condición de optimalidad en la función de utilidad. De esta manera:

$$
\begin{aligned}
u(\vec{X}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}} \\
\Leftrightarrow u &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\left(\frac{p_j \alpha_k}{p_k \alpha_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} x_j\right)^{-\rho}\right)^{\frac{-1}{\rho}} \\
\Leftrightarrow u &= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\left(\frac{p_j \alpha_k}{p_k \alpha_j}\right)^{\frac{-\rho}{1+\rho}} x_j^{-\rho}\right)\right)^{\frac{-1}{\rho}} \\
\Leftrightarrow u &= \left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} x_j \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\frac{-\rho}{1+\rho}} x_j^{-\rho}\right)\right)^{\frac{-1}{\rho}} \\
\Leftrightarrow x_j^H &= \frac{u}{\left(\frac{p_j}{\alpha_j}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\left(\frac{\alpha_k}{p_k}\right)^{\frac{-\rho}{1+\rho}} x_j^{-\rho}\right)\right)^{\frac{-1}{\rho}}\right]
\end{aligned}
$$

4.3.1. Función de Utilidad: Cobb-Douglas

4.3.2. Función de Utilidad: complementos perfectos

4.3.3. Función de Utilidad: sustitutos perfectos

4.4. Función de utilidad indirecta

La utilidad que se ha venido estudiando puede ser expresada en términos de los precios y el ingreso, esto mediante la función de utilidad indirecta. Formalmente se tiene:

Definición 4. Defínase la función de utilidad indirecta v como

$$u = v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v\left[x_1^M(m,\vec{p}), x_2^M(m,\vec{p}), \ldots, x_n^M(m,\vec{p})\right] = \psi(m,\vec{p})$$

Esta función de utilidad indirecta se obtiene como resultado de evaluar los niveles óptimos de las variables de decisión (los niveles de consumo de cada mercancía) en la función objetivo, es decir, la función de utilidad.

De esta forma, se concluye entonces que la función de utilidad indirecta es una función que depende de los precios y el ingreso, dado que, al evaluar las funciones de demanda marshallianas (las cuales a su vez dependen del precio y el ingreso) en la función de utilidad, entonces la utilidad quedará en términos de precios e ingreso. Así pues, para el caso de dos variables:

$$
\begin{aligned}
v(p_x, p_y, m) =& \max_{x,y}\{u(x,y) \quad s.a \quad p_x x + p_y y = m\} \\
=& u(x^M(m, p_x, p_y), y^M(m, p_x, p_y))
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6 [Función de utilidad indirecta: caso Cobb-Douglas]. Note que en la función de utilidad Cobb-Douglas se obtenía el siguiente nivel óptimo de consumo al maximizar la utilidad

$$x_j^M = \frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_k}$$

Ahora, ese nivel óptimo de consumo (es decir, la expresión de la demanda marshalliana encontrada para el bien j) debe ser evaluada en la función de utilidad original, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
u(\vec{X}) &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \\
\Leftrightarrow u &= \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\alpha_j} \\
\Leftrightarrow u &= \left(\frac{\alpha_1 m}{p_1 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2 m}{p_2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\alpha_2} \cdots\cdots \left(\frac{\alpha_n m}{p_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\alpha_n} \\
\Leftrightarrow u &= \left[\left(\frac{m}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \right] \cdot \left[\left(\frac{m}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2} \right] \cdots\cdots \left[\left(\frac{m}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right)^{\alpha_n} \left(\frac{\alpha_n}{p_n} \right)^{\alpha_n} \right] \\
\Leftrightarrow u &= \left[\frac{m}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \right]^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{p_j} \right)^{\alpha_j}
\end{aligned}
$$

Nota 9. Note que la principal diferencia respecto de las funciones marshallianas es que las funciones de demanda hicksianas dependen de los precios de los bienes y de la **utilidad**, mientras que las marshallianas, además de depender de los precios de los bienes, dependen del **ingreso**.

4.4.1. Teorema de la envolvente

Del problema de maximización de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria se obtiene el siguiente planteamiento:

$$\max_{x,y} \quad u(x,y) \text{s.a.} \quad m = p_x x + p_y y \tag{4.2}$$

De esta forma, se puede plantear el siguiente lagrangeano para resolver el problema de maximización.

$$\mathcal{L} : u(x,y) + \lambda(m - p_x x - p_y y)$$

A partir de la solución de este problema, la función de utilidad indirecta se definía como:

$$
\begin{aligned}
v(m,\vec{p}) = v(m,p_x,p_y) =& \max_{x,y} \{u(x,y) \quad s.a \quad m = p_x x + p_y y\} \\
=& u(x^M(p_x,p_y,m), y^M(p_x,p_y,m))
\end{aligned}
$$

Sin embargo, a partir de esta función de utilidad indirecta, suponga que en esta ocasión se quisieran obtener las condiciones de primer orden en función de los parámetros, es decir: el ingreso, el precio de x y el precio de y. De esta manera el lagrangiano nuevo sería:

$$\mathcal{L} = u(x^M(p_x,p_y,m), y^M(p_x,p_y,m)) + \lambda(m - p_x x^M - p_y y^M)$$

Y las condiciones de primer orden respecto de los parámetros serían:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial m}\right) + \lambda\left(1 - p_x\frac{\partial x^M}{m} - p_y\frac{\partial y^M}{\partial m}\right)\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial m}\right) + \lambda - \lambda\left(p_x\frac{\partial x^M}{m} - p_y\frac{\partial y^M}{\partial m}\right)\\
&= \lambda + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial m}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial m}\right) + \lambda\left(-p_x\frac{\partial x^M}{m} - p_y\frac{\partial y^M}{\partial m}\right)\\
&= \lambda + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial m} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial m} - \lambda p_x\frac{\partial x^M}{m} - \lambda p_y\frac{\partial y^M}{\partial m}\\
&= \lambda + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p_x\right)\frac{\partial x^M}{\partial m} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda p_y\right)\frac{\partial y^M}{\partial m}\\
&= \lambda + \left(UMg_x - \lambda p_x\right)\frac{\partial x^M}{\partial m} + \left(UMg_y - \lambda p_y\right)\frac{\partial y^M}{\partial m}\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_x} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial p_x}\right) + \lambda\left(-x^M - p_x\frac{\partial x^M}{\partial p_x} - p_y\frac{\partial y^M}{\partial p_x}\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial p_x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial p_x} - \lambda x^M - \lambda p_x\frac{\partial x^M}{\partial p_x} - \lambda p_y\frac{\partial y^M}{\partial p_x}\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p_x\right)\frac{\partial x^M}{\partial p_x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda p_y\right)\frac{\partial y^M}{\partial p_x} - \lambda x^M\\
&= \left(UMg_x - \lambda p_x\right)\frac{\partial x^M}{\partial p_x} + \left(UMg_y - \lambda p_y\right)\frac{\partial y^M}{\partial p_x} - \lambda x^M\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_y} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial p_y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial p_y}\right) + \lambda\left(-p_x\frac{\partial x^M}{\partial p_y} - y^M - p_y\frac{\partial y^M}{\partial p_y}\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x^M}{\partial p_y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y^M}{\partial p_y} + -\lambda p_x\frac{\partial x^M}{\partial p_y} - \lambda y^M - \lambda p_y\frac{\partial y^M}{\partial p_y}\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p_x\right)\frac{\partial x^M}{\partial p_y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda p_y\right)\frac{\partial y^M}{\partial p_y} - \lambda y^M
\end{aligned}
$$

Ejercicio 18 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[1]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i) \quad \forall i = 2, \ldots, n$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.
4. Obtenga la función de mínimo costo.

$\rightarrow$ Comprobar si hay solución de esquina:
Si $\lim_{x_i \to 0} UM_i = \infty$ entonces no hay solución de esquina para x_i
Note que:
$\lim_{x_1 \to 0} UM_1 = \lim_{x_1 \to 0} 1 = 1 \neq \infty$ (puede pasar que $x_1 = 0$)
$\lim_{x_i \to 0} UM_i = \lim_{x_i \to 0} \frac{1}{x_i} = \infty \quad \forall i = 2, \ldots, n$ (no hay solución de esquina para X_i $\forall i$ con $i = 2, \ldots n$)
Maximizando la utilidad:
Problema del consumidor:

[1]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$\max_{x_j,\forall j}\left\{x_i+\sum_{i=2}^{n}\ln x_i\right\}$ s.o $m=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=p_1x_1+\sum_{i=2}^{n}p_ix_i$
El lagrangeano asociado es:

$$\begin{cases} d_1: 1-\lambda p_1=0\\ d_2: \frac{1}{x_2}-\lambda p_2=0\\ \vdots\\ d_j: \frac{1}{x_j}-\lambda p_j=0\\ d_k: \frac{1}{x_k}-\lambda p_k=0\\ \vdots\\ d_n: \frac{1}{x_n}-\lambda p_n=0\\ d_\lambda: m-p_1x_1-\sum_{i=2}^{n}p_ix_i=0\end{cases}$$

Solución interna ($x_i>0 \quad \forall i=1,2,\ldots,n$)
Combinando d_1 con d_j se obtiene que
$\frac{1}{\frac{1}{x_j}}=\frac{\rho_1}{\rho_j}\Rightarrow x_j^m=\frac{\rho_1}{\rho_j}$ (pora este caso la cond opt. coincide
Inyectando esto en z_λ se tiene

$$\begin{aligned} m-p_1x_1-\sum_{j=2}^{n}p_1\left(\frac{p_1}{p_j}\right)&=0\\ \Rightarrow m-p_1x_1-\sum_{j=2}^{n}p_1&=0\\ \Rightarrow m-p_1x_1-(n-1)p_1&=0\\ x_1&=\frac{m-(n-1)p_1}{p_1} \qquad \text{(marshalliana de } x_1\text{)}\end{aligned}$$

¿Cuándo $x_1>0$? $\quad\frac{m-(n-1)\rho_1}{\rho_1}>0\Rightarrow\frac{m}{\rho_1}>n-1$
Dado que:

$$\begin{aligned} u(x_1,\ldots,x_n)&=x_1+\sum_{i=2}^{n}\ln x_i\\ \Rightarrow v(m,p_1,\ldots,p_n)&=\frac{m-(n-1)p_1}{p_1}+\sum_{i=2}^{n}\ln\left(\frac{p_1}{p_i}\right) \qquad \text{(utilidad indirecto)}\end{aligned}$$

Minimizando el gasto
Problema del consumidor:

$$\min_{x_j,y_j}\left\{p_1x_1+\sum_{i=2}^{n}p_ix_i\right\} \qquad \text{s.o} \qquad \bar{u}=x_1+\sum_{i=2}^{n}\ln x_i$$

El lagrangcano asociado es:
$\mathcal{L}: p_1x_1+\sum_{i=1}^{n}p_1x_i+\lambda\left(\bar{u}-x_1-\sum_{i=2}^{n}\ln x_i\right)$

$$CPO\begin{cases}\alpha_1: p_1-\lambda=0\\ \vdots\\ \alpha_j: p_j-\frac{\lambda}{x_j}=0\\ \alpha_K: p_K-\frac{\lambda}{x_K}=0\end{cases}$$

$$\alpha_\lambda: \bar{u}-x_1-\sum_{i=2}^{n}\ln x_i=0$$

Combinando z_1 con z_j se obtiene que:

$$\frac{p_1}{p_j} = x_j$$

Inyectando esto en z_λ se tiene

$$X_1 = U - \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_j}\right)$$

Dado que $G = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i$

$$G\left(\bar{u}, p_1, \ldots p_n\right) = p_1 u - p_1 \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right) + (n-1)p_1 \quad \text{(función de mínimo gasto)}$$

Solución de esquina ($x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_j > 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$)
Si $\frac{m}{p_1} < n-1 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \wedge \quad m = \sum_{j=2}^{n} p_j x_j \quad \wedge \quad u = \sum_{i=2}^{n} \ln x_i$
Combinando $d_j \wedge d_k$ se tiene: $\frac{x_j}{x_k} = \frac{\rho_k}{\rho_j}$ (cond opt.) Inyectando esto en $m = \sum_{j=2}^{n} p_j x_j$
Se Ilega a $m = \sum_{j=2}^{n} p_k x_k \Rightarrow m = (n-1)P_k x_k \Rightarrow x_k = \frac{m}{(n-1)p_k}$ (marshalliano)
Inyectando la cond opt en la función de utilidad se tiene

$$u = \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_k X_k}{p_j}\right)$$

$$u = (n-1)\ln p_k + (n-1)\ln x_k - \sum_{j=2}^{n} \ln p_j \Rightarrow x_k = e^{u-(n-1)\ln p_k + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j}$$

$$v\left(m, p_2, \ldots, p_n\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{m}{(n-1)p_k}\right) = (n-1)[\ln(m) - \ln(n-1)] - \sum_{k=2}^{n} \ln p_k$$

$$G\left(\bar{u}, p_2, \ldots, p_n\right) = \sum_{k=2}^{n} p_k e^{u-(n-1)\ln p_k + \sum_{j=1}^{n} \ln p_j}$$

Ejercicio 19 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[2]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución

$$TMS = \frac{uM_j}{uM_k} = \frac{\alpha_j x_j^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{\alpha_k x_k^{-1} \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}} = \frac{p_j}{p_k} \Rightarrow \frac{x_k}{x_j} = \frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k} \quad \text{(condición de optimalidad)}$$

[2]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Al inyectar la condición de optimalidad en la restricción presupuestaria se obtiene la demanda marshalliana:

$$m = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k p_j x_j}{\alpha_j} \Rightarrow x_j = \frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{k=1}^{j} \alpha_k}$$

Al inyectar la condición de optimalidad en la función de utilidad se obtiene la demanda hicksiana

$$U = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k \rho_j}{\alpha_j \rho_k} x_j \right)^{\alpha_k} \Rightarrow U = \left(\frac{\rho_j x_j}{\alpha_j} \right)^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k} \right)^{\alpha_k} \Rightarrow x_j = \frac{\alpha_j U^{\frac{1}{\sum_{k=k}}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\rho_k}{\rho_k} \right)^{\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1} \alpha_k}}}{\rho_j}$$

$$V(m, p_1, \ldots, p_n) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{k=1}^{j} \alpha_k} \right)^{\alpha_j} = \left(\sum_{k=1}^{m} \right)^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j} \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\alpha_j}{p_j} \right]^{\alpha_j}$$

$$G(\bar{u}, p_1, \ldots, p_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{\frac{1}{\sum_{j=1}}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\alpha_k} \right)^{\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{\alpha} \alpha k}} = u^{\sum_{i=1}^{1} \frac{n}{\sum_{k=1}}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{\alpha_k} \right)^{\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^{\alpha} \alpha k}} \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right]$$

Ejercicio 20 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[3]]. La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) \quad \text{con} \quad \forall x_j > 0 \quad j = 1, \ldots, n$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Obtenga la función de mínimo costo.

$\rightarrow$ Si se maximiza la utilidad
El inciso dice $x_i > 0 \forall i$ por lo que sólo interesa solución interna.

$$\max_{x_i \forall i} \left\{ x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) \right\} \text{ s.a } m = p_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i$$

$$\alpha : x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) + \lambda \left(m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i \right)$$

$$\text{cPO} \begin{cases} \alpha_1 : 1 - \lambda p_1 = 0 & \frac{1}{p_1} = \\ \vdots & \\ \alpha_k : \frac{1}{x_j - 1} - \lambda p_j = 0 & \frac{1}{x_{k-1}} - \lambda p_k = 0 \\ \alpha_\lambda : m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i = 0 & \lambda p_j = \frac{1}{x_j - 1} \end{cases}$$

Combinando d_1 con d_j se obtiene que:

$$\frac{1}{\frac{1}{x_j - 1}} = \frac{p_1}{p_j} \Rightarrow x_j = \frac{p_1}{p_j + 1}$$

Inyectando esto en z_λ se obtiene la demanda marshalliana

$$m - p_1 x_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j (p_1 + 1) = 0$$

$$m - p_1 x_1 - (n-1) p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j = 0$$

$$x_1 = \frac{m - (n-1) p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j}{p_1}$$

[3]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Inyectando $x_j = \frac{p_1}{p_j+1}$ en la función de utilidad se obtiene la demanda hicksiana:

$$u = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right) \Rightarrow x_1 = u - (n-1)\ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j$$

$$V(m, p_1, \ldots, p_n) = \frac{m - (n-1)p_1 - \sum_{j=2}^{n} p_j}{p_1} + \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{p_j}\right) = \frac{m - (n-1)p_1 - \sum_{j=1}^{n} p_j}{p_1} + (n-1)\ln p_1 - \sum_{j=2}^{n} \ln p_j$$

$$G(\bar{u}, p_1, \ldots, p_n) = p_1 \left[u - (n-1)\ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j\right] + \sum_{j=2}^{n} p_j \left(\frac{p_1}{p_j} + 1\right)$$

$$\Rightarrow G(\bar{u}, p_1, \ldots, p_n) = p_1 \left[u - (n-1)\ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j\right] + (n-1)p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j$$

Ejercicio 21 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[4]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.

2. Halle la función de utilidad indirecta.

3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.

4. Obtenga la función de mínimo costo.

1.

$$\max_{x_i \forall i} \left\{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right\} \quad \text{s.a } m \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \wedge \quad x_i \geqslant 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$UM_i = \frac{1}{x_i} \Rightarrow \lim_{x_i \to 0} UM_i = \infty \Rightarrow x_i > 0 \Rightarrow UM_i > 0 \Rightarrow m = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Entonces

[4] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$max_{x_i \forall i}\left\{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right\} \quad \text{s.a } m=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$$

$$\cancel{L}^*=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i+\lambda\left(m-\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)$$

$$cP_0\begin{cases} d_{x_j}=\frac{1}{x_j}-\lambda p_j=0\\ d_{x_k}=\frac{1}{x_k}-\lambda p_k=0\\ d_\lambda=m-\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_k}}=\frac{p_j}{p_k}\Rightarrow x_k=\frac{p_i}{p_k}x_j$$

$$m=\sum_{k=1}^{n}p_kx_k$$

$$\Rightarrow m=\sum_{k=1}^{n}p_kp_jx_j$$

$$\Rightarrow m=np_jx_j$$

$$x_j=\frac{m}{np_j}=x_j\left(m,p_1,\ldots,p_n\right)$$

2)

$$v\left(m,p_1,\ldots,p_n\right)=\sum_{j=1}^{n}\ln\left(\frac{m}{np_j}\right)$$

$$v\left(m,p_1,\ldots,p_n\right)=n\ln m-n\ln n-\sum_{j=1}^{n}\ln p_j$$

3)

$$\min_{x_i\forall i}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i \text{ s.a } u=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\text{cPo}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+\lambda\left(u-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\\ d_{x_j}:p_j+\lambda\frac{1}{x_j}=0\\ d_\lambda:p_k+\lambda\frac{1}{x_k}=0\end{cases}$$

$$\frac{p_j}{p_k}=\frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_k}}\Rightarrow\frac{x_k}{x_i}=\frac{p_j}{p_k}\Rightarrow x_k=\frac{p_j}{p_k}x_j$$

$$u=\sum_{k=1}^{n}\ln x_k\Rightarrow u=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{p_j}{p_k}x_j\right)$$

$$u=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln p_j+\ln x_j-\ln p_k\right]$$

$$u=n\ln p_j+n\ln x_j-\sum_{k=1}^{n}\ln p_k$$

$$\ln x_j=\frac{u-n\ln p_j+\sum_{k=1}^{n}\ln p_k}{n}$$

$$e^{k/x_j}=e^{\frac{u-n\ln p_j+\sum_{k=1}^{n}lp_k}{n}}$$

$$x_j=e^{\frac{u-n\ln p_j+\sum_{k=1}^{n}np_k}{n}}=x_j\left(\bar{u},p_1,\ldots,p_n\right)$$

4)

$$
\begin{aligned}
G^*\left(\bar{u}, p_1, \cdots, p_n\right) &= \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \\
G^*\left(\bar{u}, p_1, \cdots, p_n\right) &= \sum_{j=1}^{n} P_j e^{\frac{u - n\ln p_j + \sum_{k=1}^{n} n_{pk}}{n}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 22 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[5]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$
U\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1
$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.
4. Obtenga la función de mínimo costo.

Solución

$$
\begin{aligned}
&TMS_{jk} = \frac{UM_j}{UM_k} = \frac{P_j}{P_k} \\
&U = x_l^{\alpha_l} \prod_{i \neq l}^{\alpha_i} x^{\alpha_i} \\
&U_l = \alpha_l x_l^{\alpha_l - 1} \prod_{i \neq l}^{n} x^{\alpha_i} = \alpha_l x_l^{-1} x_l^{\alpha_l} \prod_{i \neq l}^{n} x^{\alpha_i} = \alpha_l x_l^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \\
&UM_j = \alpha_j x_j^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \\
&UM_k = \alpha_k x_k^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \\
&TMS_{jk} = \frac{\alpha_j x_j^{-1} \prod_{i=1}^{n} x^{\alpha_i}}{\alpha_k x_k^{-1} \prod_{i=1}^{n} x^{\alpha_i}} = \frac{P_j}{P_k} \\
&\quad x_k = \frac{\alpha_k P_i}{\alpha_j P_k} x_j \rightarrow \text{ condición optimalidad}
\end{aligned}
$$

Marshallionas

$$
\begin{aligned}
m = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k \Rightarrow m &= \sum_{k=1}^{n} P_k \frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j P_k} x_j \\
m &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k P_j}{\alpha_j} x_j \Rightarrow m = \frac{P_j x_j}{\alpha_j} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 \\
x_j^m &= \frac{\alpha_j m}{P_j}
\end{aligned}
$$

[5] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Hicksianas

$$x_k = \frac{\alpha_k P_1}{\alpha_j P_k} x_j \rightarrow \text{ condición optimalidad}$$
$$U = \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}$$

$$u = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\alpha_k P_1}{\alpha_j P_k} x_j\right]^{\alpha_k}$$
$$u = \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{P_j x_j}{\alpha_j}\right]^{\alpha_k} \left[\frac{\alpha_k}{P_k}\right]^{\alpha_k}$$
$$u = \left[\frac{P_j x_j}{\alpha_j}\right]^{\sum_{k=1}^{\alpha_k} \alpha'_k} \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{\alpha_k}{P_k}\right]^{\alpha_k}$$
$$x_j = \frac{\alpha_j \cdot \bar{u}}{P_j} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k}$$

Utilidad indirecto

$$U = \prod_{j=1}^{n} X_j^{\alpha_j}$$
$$V(m, P_1, \ldots, P_n) = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\alpha_j m}{P_j}\right]^{\alpha_j} = m^{\sum_j \alpha_j} \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\alpha_j}{P_j}\right]^{\alpha_j} = m \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{\alpha_j}{P_j}\right]^{\alpha_j}$$

Función mínimo gasto

$$G(\bar{u}, P_1, \ldots, P_n) = \sum_{j=1}^{n} P'_j \cdot \frac{\alpha_j \bar{u}}{P_j} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k}$$
$$G(\bar{u}, P_1, \ldots, P_n) = \bar{u} \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k} \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j$$
$$G(\bar{u}, P_1, \ldots, P_n) = \bar{u} \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{P_k}{\alpha_k}\right]^{\alpha_k}$$

Ejercicio 23 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[6]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 \prod_{i=2}^{n} x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.
2. Halle la función de utilidad indirecta.
3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.
4. Obtenga la función de mínimo costo.

[6] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Solución

$$\left.\begin{array}{l}
u = x_1^2 \prod_{i=2}^{n} x_i \\
\mathcal{L} : x_1^2 \prod_{i=2}^{n} x_i + \lambda \left[m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i\right] \\
\mathcal{L}x_1 : 2x_1 \prod_{i=2}^{n} x_i - \lambda p_1 = 0 \\
\mathcal{L}x_j : x_1^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i - \lambda p_j = 0 \\
\mathcal{L}x_k : x_1^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq k}}^{n} x_i - \lambda p_k = 0 \\
\mathcal{L}\lambda : m - p_1 x_1 - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i = 0 \\
\frac{2x_1 \prod_{i=2}^{n} x_i}{x_1^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i} = \frac{p_1}{p_j} \\
\frac{2x_j}{x_1} = \frac{p_1}{p_j} \Rightarrow x_j = \frac{p_1}{2p_j} x_1 \\
x_1^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i \\
\frac{x_1^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq k}}^{n} x_i}{p_k} \Rightarrow x_k = \frac{p_j}{p_k} x_j
\end{array}\right\} \text{cond.opt.}$$

$$\left.\begin{array}{l}
m = p_1 x_1 + \sum_{k=2}^{n} p_k x_k \\
m = p_1 x_1 + (n-1) p_j x_j \\
m = p_1 x_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} p_1 x_1 \\
p_1 x_1 \left(1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) = m \\
p_1 x_1 (1+n) = m \\
x_1 = \frac{2m}{p_1(1+n)} u^{\text{marshalliana}} \\
\left. x_j = \frac{m}{p_j(1+n)} \right] \\
V(m, p_1, \ldots, p_n) = \left[\frac{2m}{p_1(1+n)}\right]^2 \prod_{j=2}^{n} \frac{m}{p_j(1+n)} = \left[\frac{2m}{p_1(1+n)}\right]^2 \left(\frac{m}{1+n}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^{n} p_j^{-1} = \frac{4m^{n+1}}{p_1^2 (n+1)^{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{-1} \\
u = x_1^2 \prod_{j=2}^{n} \frac{p_1}{2p_j} x_1 \\
u = x_1^2 x_1^{n-1} \left(\frac{p_1}{2}\right)^{n-1} \frac{n}{\prod_{j=2}^{n} p_j^{-1}} \\
u \left(\frac{2}{p_1}\right)^{n-1} \frac{n}{\prod_{j=2}^{n+1} p_j = x_1^{n+1}} \\
x_1 = u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}} \\
x_j = \frac{p_1}{2p_j} u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}}
\end{array}\right\} \text{Hicksianas}$$

$$G(u, p_1, \ldots, p_n) = p_1 u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{j=2}^{n} \frac{p_1}{2} u^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} \prod_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{n+1}}$$

Ejercicio 24 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[7]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=2}^{n} (x_1 - 1) x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.

2. Halle la función de utilidad indirecta.

3. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.

4. Obtenga la función de mínimo costo.

[7]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Solución

$$u=\prod_{i=2}^{n}(x_1-1)\,x_i \Rightarrow u=(x_1-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}x_i$$

$$\mathcal{L}:(x_1-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}x_i+\lambda\left[m-p_1x_1-\sum_{i=2}^{n}p_ix_i\right]$$

$$\text{cP0}\left\{\begin{array}{l}
\mathcal{L}_{x_1}=(n-1)\,(x_1-1)^{n-2}\prod_{i=2}^{n}x_i-\lambda p_1=0\\
\mathcal{L}_{x_j}:(x_1-1)^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}x_i-\lambda p_j=0\\
\mathcal{L}_{k}:(x_1-1)^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq k}}^{n}x_i-\lambda p_k=0\\
\mathcal{L}_{\lambda}:m-p_1x_1-\sum_{i=2}^{n}p_ix_i=0\\
(n-1)\,(x_1-1)^{n-2}\prod_{i=2}^{n}x_i\\
(x_1-1)^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}x_i\\
\frac{p_1}{p_j}\Rightarrow\prod_{\substack{i\neq 2\\ |\neq j}}^{n}x_i\\
x_j=\frac{p_1}{p_j(n-1)}\,(x_i-1)\quad(\text{ cond opt. entre } x_1\wedge x_j)
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{(x_1-1)^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq j}}^{n}x_i}{(x_1-1)^{n-1}\prod_{\substack{i=2\\ i\neq k}}^{n}x_i}=\frac{p_j}{p_k}\Rightarrow\frac{x_k}{x_j}=\frac{p_j}{p_k}\Rightarrow x_k=p_jx_j\ (\text{cond opt entre } x_j\wedge x_k\right)\\
m-p_1x_1-\sum_{k=2}^{n}p_kx_k=0\\
m-p_1x_1-\sum_{k=2}^{n}p_jx_j=0\\
m-p_1x_1-(n-1)p_jx_j=0\\
m-p_1x_1-(n-1)p_j\cdot\frac{p_1}{p_j(n-1)}\,(x_1-1)=0\\
m-2p_1x_1+p_1=0\\
x_1^n=\frac{m+p_1}{2p_1}\\
x_j^n=\frac{p_1}{p_j(n-1)}\left(\frac{m+p_1}{2p_1}-1\right)\\
x_j=\frac{p_1}{p_j(n-1)}\,(x_1-1)\\
x_k=\frac{p_j}{p_k}x_j
\end{array}\right\}\text{cond.opt}$$

$$u = (x_i - 1)^{n-1} \prod_{k=2}^{n} x_k$$

$$u = [(x_i - 1)\, p_j x_j]^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k^{-1}$$

$$u = \left[(x_i - 1)\, p_j \frac{p_1}{p_j(n-1)} (x_i - 1)\right]^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k^{-1}$$

$$u = \left[(x_i - 1)^2 \cdot \frac{p_1}{(n-1)}\right]^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k^{-1}$$

$$u = (x_i - 1)^{2(n-1)} \left(\frac{p_1}{n-1}\right)^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1^H &= \left[u\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}} + 1 \\ x_j^H &= \frac{p_1}{p_j(n-1)}\left[u\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}} \end{aligned}\right\} H_{ick\,\text{sian}\,a}$$

$$v = \left(\frac{m + p_1}{2p_1} - 1\right)^{n-1} \prod_{j=2}^{n} \frac{p_1}{p_j(n-1)} \left(\frac{m+p_1}{2p_1} - 1\right)$$

$$G^* = p_1 \left[u\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}} + p_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{p_1}{(n-1)} \left[u\left(\frac{n-1}{p_1}\right)^{n-1} \prod_{k=2}^{n} p_k\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}$$

Ejercicio 25 [Funciones de utilidad, demandas y gasto[8]]. Considere un individuo que presenta las siguientes preferencias por los bienes:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} \quad \text{con} \quad x_j > 0 \quad , \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

1. Encuentre las demandas marshallianas para todos los bienes.

2. Encuentre la función de utilidad indirecta.

3. Encuentre las demandas hicksianas para todos los bienes.

4. Encuentre la función de mínimo gasto.

Solución

[8] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$TMS_{1j} = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot x_j^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{n}{x_j^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{p_1}{p_j} \Rightarrow x_j^{m^{1,H}} = \left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}}$$

$$m = p_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j \left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \Rightarrow m = p_1 x_1 + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

$$x_1 \left(m, p_1, \ldots, p_n\right) = \frac{m - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}}{p_1}$$

$$v \left(m, p_1, \ldots, p_n\right) = \frac{m - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}}{p_1} + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}}$$

$$v \left(m, p_1, \ldots, p_n\right) = \frac{m - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}}{p_1} + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

$$\bar{u} = x_1 + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}} \Rightarrow x_1 \left(\bar{u}, p_1, \ldots, p_n\right) = u - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

$$G \left(\bar{u}, p_1, \ldots, p_n\right) = p_1 \left[u - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}\right] + \sum_{j=2}^{n} p_j \left(\frac{np_j}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}}$$

$$G \left(\bar{u}, p_1, \ldots, p_n\right) = p_1 \left[u - \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{1}{n-n}} \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}\right] + \left(\frac{n}{p_1}\right)^{\frac{n}{1-n}} \cdot \sum_{j=2}^{n} p_j^{\frac{1}{1-n}}$$

Capítulo 5

Efecto precio: Variación compensada y equivalente

El cambio en el precio de las mercancías o servicios tiene un impacto en la cantidad demandada de dichos bienes de acuerdo con la ley de la demanda. Así, se suele considerar que el impacto total que tiene un cambio en el precio de las mercancías, se puede descomponer en otros dos efectos: el efecto precio y el efecto sustitución.

Definición 5 [Efecto sustitución]. Consiste en la sustitución de un bien por otro ante un cambio en el precio relativo de los bienes.

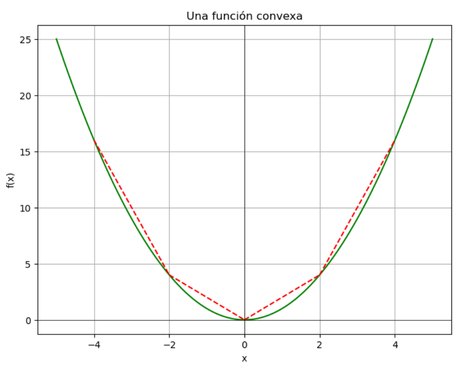
En otras palabras, es el cambio en la cantidad consumida de un bien al cambiar su precio, manteniendo constante el precio de los demás bienes (*ceteris paribus*) y el nivel de utilidad u_0 (lo cual se ve refljado en la demanda compensada o hicksiana)[1].

Definición 6 [Efecto ingreso]. Consiste en el cambio resultante de un cambio en el poder adquisitivo ante una variación en el ingreso de la persona.

En otras palabras refleja el cambio en la cantidad consumida de un bien ante un cambio en el ingreso, manteniendo los precios de todos los bienes constantes (*ceteris paribus*).

Si las curvas de indiferencia son **convexas**, al aumentar el precio de un bien, necesariamente deberá disminuir la cantidad consumida de ese bien si se mantiene el nivel de utilidad constante, lo cual sugiere que en efecto la pendiente de la curva de demanda de Hicks o demanda compensada, tiene que tener pendiente negativa.

Nota 10. Un consejo para recordar la distinción entre convexa y cóncava es que una función que sea convexa se asemeja a una especie de sonrisa o 'carita feliz'. Recuerde que una función convexa se ve algo así:



Ejercicio 26 [Efectos ingreso y sustitución: conceptos[2]]. Considere los siguientes enunciados:

[1] Zurita y Vial, 2011

[2] Ejercicio tomado de Gruber (2023)

1. *(7 puntos)* En un mundo con solo dos bienes, ¿puede ocurrir que ambos bienes sean inferiores? En un mundo con dos bienes, ¿pueden ambos ser normales? Explica.
   → No puede ocurrir que en un mundo con dos bienes ambos bienes sean inferiores. Cuando uno se encarece, necesitas gastar más en él (asumiendo que se cumple no saciedad). Si ambos bienes fueran inferiores, terminarías gastando menos en ambos, lo cual no puede ser óptimo si se satisface no saciedad. De hecho, incluso si no se satisface no saciedad, aún no puedes tener ambos bienes como inferiores. Tu canasta original sigue siendo asequible cuando tu ingreso aumenta, por lo que no puedes çambiar.[a] algo que ya era asequible antes del aumento en ingreso. Eso implicaría una violación de transitividad. En un mundo con dos bienes, ambos pueden ser normales: considera $U(x, y) = xy$.

2. *(8 puntos)* Supón que hay un aumento en los precios y el consumo disminuye. Dada esta información, el bien debe ser un bien normal. ¿Verdadero o falso? Explica.
   → Falso. El bien puede ser inferior, pero el efecto sustitución es mayor que el efecto ingreso.

   Supón que una consumidora desea solo dos bienes, x e y, y sus preferencias están representadas por la función de utilidad $U(x, y) = x + y$. Además, supón que $p_y = 3$ y su ingreso es $m = 6$.

3. *(2 puntos)* Supón que $p_x = 4$. ¿Cuánto consume la consumidora de cada bien?
   → Si $p_x > p_y$, entonces la consumidora solo consume el bien y, así que $x = 0$ y $y = 2$.

4. *(2 puntos)* Supón que p_x disminuye de $p_x = 4$ a $p'_x = 2$. ¿Cuánto consume la consumidora de cada bien?
   → Ahora $p'_x < p_y$, así que la consumidora solo consume el bien x y por tanto $x' = 3$ y $y' = 0$.

5. *(2 puntos)* Supón que p'_x disminuye de 2 a $p''_x = 1$. ¿Cuánto consume la consumidora de cada bien?
   → El precio de x sigue siendo menor, por lo tanto la consumidora sigue consumiendo solo x, y entonces $x'' = 6$, $y'' = 0$.

6. *(4 puntos)* Verdadero o Falso. Proporciona una explicación: cuando p_x cambia de $p_x = 4$ a $p'_x = 2$, hay efectos de ingreso y sustitución; mientras que cuando p_x cambia de $p'_x = 2$ a $p''_x = 1$, no hay efecto de sustitución.
   → Verdadero. Cuando p_x cambia de 4 a 2, la consumidora sustituye de y a x porque ahora x es más barato, y también hay efectos ingreso porque ahora los precios son más bajos y su poder adquisitivo es mayor. Cuando p_x disminuye aún más de 2 a 1, solo hay efecto ingreso porque la consumidora ya estaba consumiendo todo x, y por tanto el aumento en el consumo de x se debe solo a un incremento en su poder adquisitivo.

Ejercicio 27 [Efectos ingreso y sustitución: un caso concreto[3]]. Ben consume solo manzanas (x) y camisetas (y). Sus preferencias pueden representarse mediante la siguiente función de utilidad:

$$U(x, y) = x^2 y^3$$

El precio de las manzanas es p_x, el precio de las camisetas es p_y, y Ben tiene un ingreso de m dólares.

1. *(5 puntos)* Encuentra la demanda de manzanas y camisetas como función de p_x, p_y y m.
   → En el óptimo:
   $$MRS = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot \frac{p_x}{p_y} x$$
   En la restricción presupuestaria:
   $$p_x x + p_y \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{p_x}{p_y} x = m \Rightarrow \frac{5}{2} p_x x = m \Rightarrow x = \frac{2}{5} \cdot \frac{m}{p_x}, \quad y = \frac{3}{5} \cdot \frac{m}{p_y}$$

2. *(5 puntos)* ¿Cuál es la elasticidad precio de la demanda por manzanas? ¿Cuál es la elasticidad cruzada de la demanda por manzanas con respecto al precio de las camisetas?
   → La elasticidad precio de la demanda por manzanas es
   $$\varepsilon^x_{p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{m}{p_x^2} \cdot \frac{p_x}{\frac{2m}{5p_x}} = -1$$
   La elasticidad cruzada de la demanda por manzanas con respecto al precio de las camisetas es:
   $$\varepsilon^x_{p_y} = \frac{\partial x}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x} = 0$$

[3]Ejercicio tomado de Gruber (2023)

3. *(5 puntos)* Dibuja la curva de Engel para las camisetas. ¿Las camisetas son un bien inferior o normal? ¿Cuál es la elasticidad ingreso de la demanda por camisetas?
→ La curva de Engel para las camisetas es una línea recta creciente en m. Dado que la demanda por camisetas crece con el ingreso, entonces son un bien normal. La elasticidad ingreso de la demanda por camisetas es:

$$\varepsilon_m^y = \frac{\partial y}{\partial m} \cdot \frac{m}{y} = \frac{3}{5p_y} \cdot \frac{m}{\frac{3m}{5p_y}} = 1$$

4. *(5 puntos)* Verdadero o Falso. Explica: *Dado que la demanda de Ben por camisetas no depende del precio de las manzanas, entonces un cambio en el precio de las manzanas no tiene efecto sustitución ni efecto ingreso sobre la demanda de camisetas.*
→ Falso. Por el efecto sustitución, la demanda por camisetas aumenta en respuesta a un aumento en el precio de las manzanas, mientras que por el efecto ingreso la demanda disminuye. Con estas preferencias, ambos efectos se cancelan, por lo que el efecto total es cero.

Ejercicio 28 [Efecto ingreso y sustitución[4]]. Ben consume solo manzanas (x) y camisetas (y). Sus preferencias pueden representarse mediante la función de utilidad:

$$U(x, y) = x^2y^3$$

El precio de las manzanas es p_x, el precio de las camisetas es p_y, y Ben tiene un ingreso de m dólares. Deriva la demanda de Ben por manzanas y camisetas como función de p_x, p_y y m. Supón que inicialmente los precios son $p_x = p_y = 1$ y el ingreso es $m = 5$. ¿Cuántas manzanas consume Ben? ¿Y cuántas camisetas?

Ahora supón que el precio de las manzanas aumenta a $p_x = 2$. ¿Cuántas manzanas consume ahora? ¿Cuánto de la disminución en la demanda por manzanas se debe al efecto sustitución y cuánto al efecto ingreso? Calcula esto numéricamente y muéstralo en un gráfico.

→ La demanda de Ben por manzanas y camisetas como función de p_x, p_y y m es:

$$x = \frac{2}{5} \cdot \frac{m}{p_x}, \quad y = \frac{3}{5} \cdot \frac{m}{p_y}$$

Inicialmente $x = 2$ y $y = 3$, así que el nivel inicial de utilidad es $\bar{u} = 108$. Después del cambio de precios, $x = 1$ y $y = 3$. Para encontrar el ingreso necesario para alcanzar el mismo nivel de utilidad $\bar{u}$ a los nuevos precios usamos el siguiente sistema:

$$MRS = -\frac{p'_x}{p_y}, \quad u(x, y) = \bar{u}$$

Sustituyendo nuestros valores:

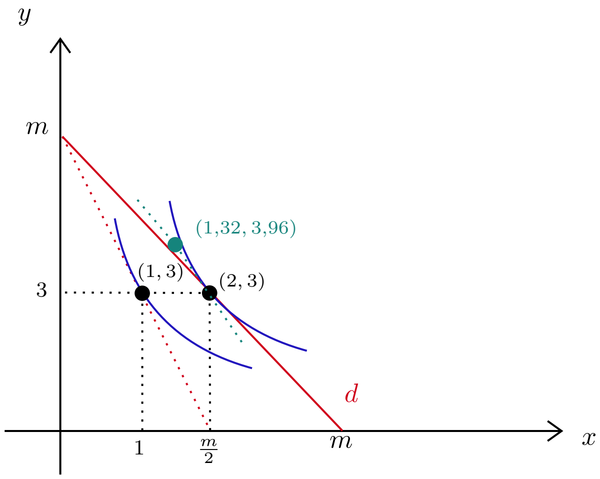
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{y}{x} = 2, \quad x^2y^3 = 108$$

De la primera ecuación obtenemos que $y = 3x$. Sustituyendo en la segunda:

$$27x^5 = 108 \Rightarrow x \approx 1{,}32, \quad y \approx 3{,}96$$

Entonces, la disminución en la demanda de manzanas debida al efecto sustitución es igual a $2 - 1{,}32 = 0{,}68$, y la disminución debida al efecto ingreso es igual a $1{,}32 - 1 = 0{,}32$.

[4]Ejercicio tomado de Gruber (2023)



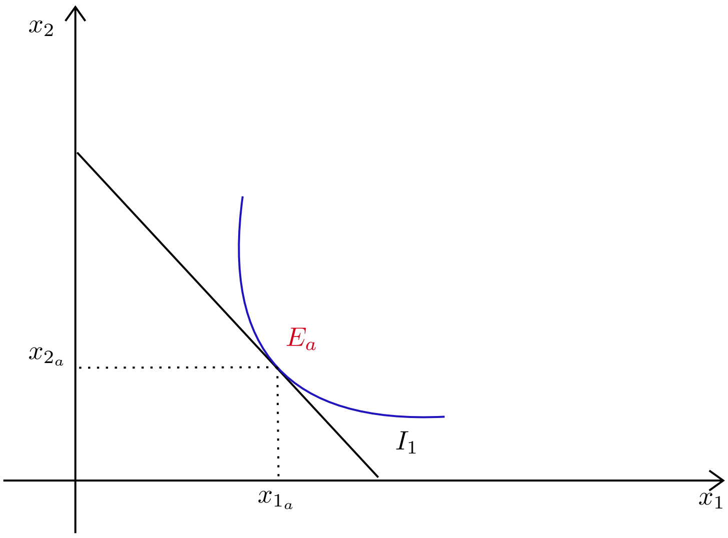
Es importante señalar que la distinción o el reconocimiento de los efectos ingresos y sustitución es muy importante en la economía y suele abordarse de dos maneras distintas: un primer abordaje un poco más intuitivo es de manera gráfica, que a su vez puede llevarse a cabo de dos maneras distintas según se escoja un abordaje de Slutsky o de Hicks. Otra manera de hacer esta distinción entre los efectos ingreso y sustitución, es de manera algebraica, mediante algo que se conoce como la ecuación de Slutsky.

Definición 7 [Efecto precio (total)]. Es la suma del efecto sustitución más el efecto ingreso.

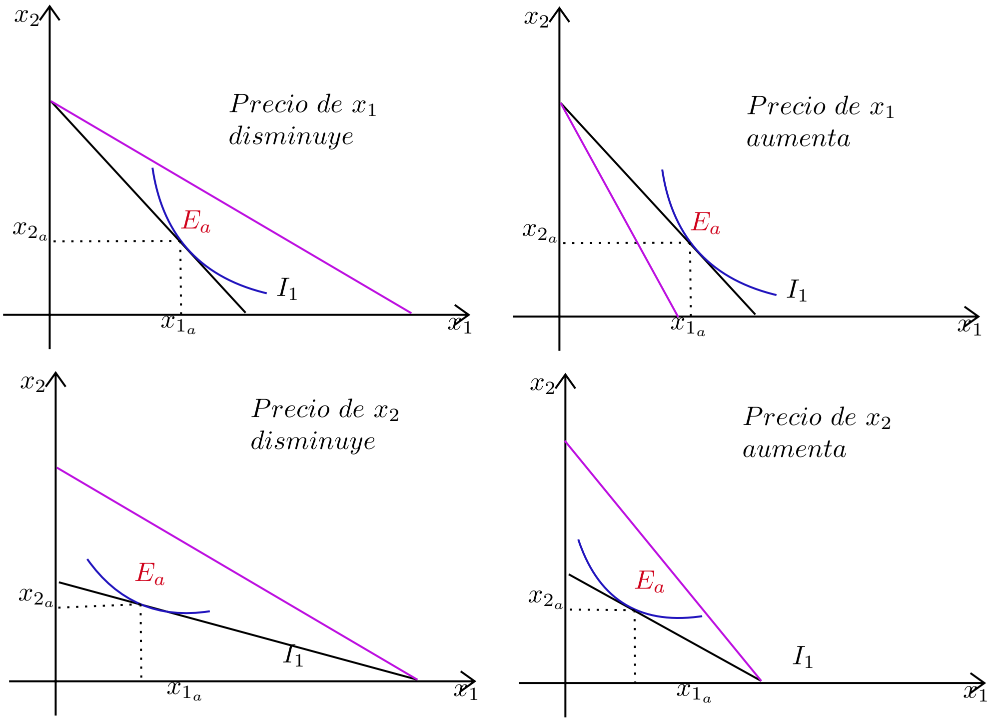
Dicha descomposición o separación de los efectos sustitución e ingreso, puede ser llevada a cabo de distintas maneras. Especialmente, existen dos principales abordajes para llevar a cabo esta tarea: un abordaje según Eugene Slutsky y otro abordaje según Sir. John R. Hicks.

5.1. Abordaje según Slutsky

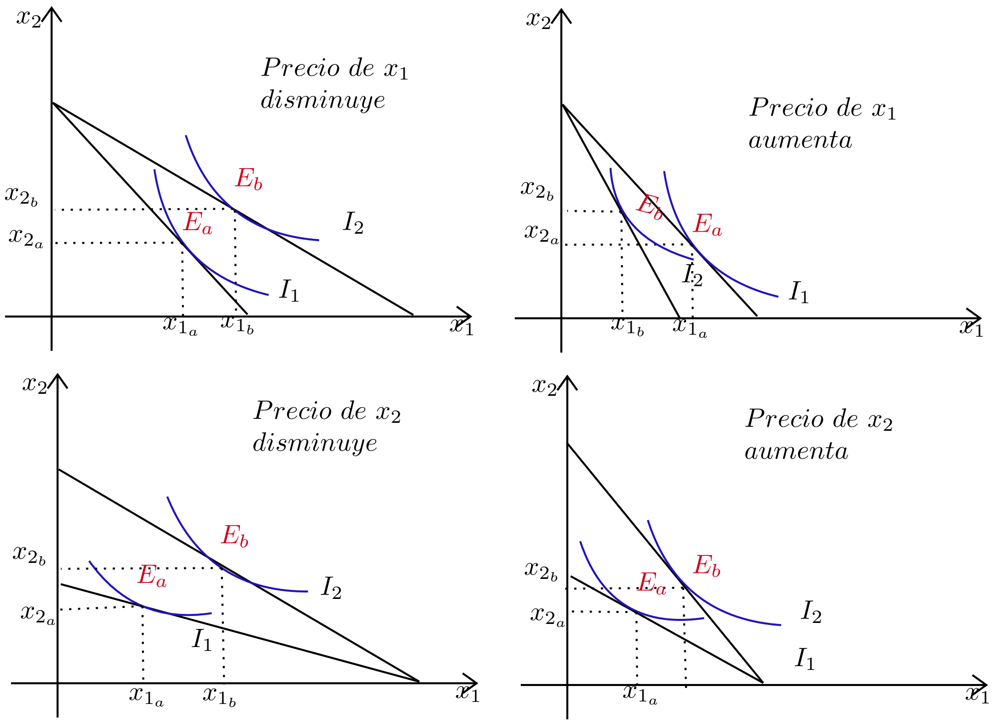
Se tiene una situación inicial como la que sigue:



Es decir, dada una restricción presupuestaria, unos precios relativos, un ingreso y unas ciertas preferencias representadas mediante una función de utilidad, se escoge una canasta o conjunto de consumo que sea tangente a la restricción presupuestaria. Ahora, ¿qué pasaría si el precio de un bien cambia? La respuesta es que si, simultáneamente, el precio de un solo bien cambia, habría un cambio en los precios relativos de los bienes en cuestión. Esto se traduce en un cambio de pendiente para la restricción presupuestaria.



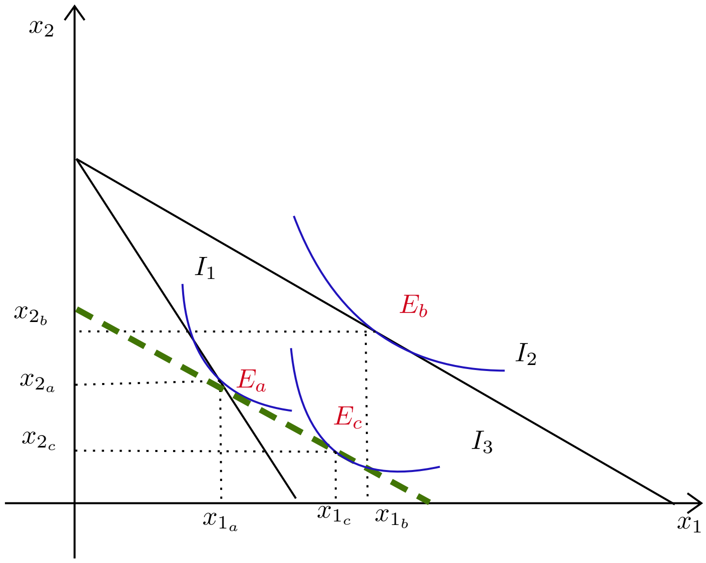
De esta manera, al cambiar la pendiente de la restricción presupuestaria, cambia el punto de tangencia entre esta curva y la pendiente de la curva de indiferencia, por lo cual, ha de encontrarse otra curva de indiferencia que sea tangente con la nueva restricción presupuestaria. Así:



De esta manera, el efecto sustitución se puede aislar ajustando el ingreso del agente, de tal manera que se puede permitir alcanzar (*afford*) la cesta inicialmente consumida. Nótese que dependiendo de la variación en el precio relativo de los bienes, el ajuste en el ingreso puede ser tanto un aumento como una disminución del mismo. De esta manera, una disminución en el precio de alguno de los bienes, permite adquirir más de ese bien, ante lo cual, el ajuste en el ingreso sería una disminución del mismo, pero si el precio de uno de los bienes aumenta, se puede comprar menos de este, haciendo necesario que el ajuste sea un aumento en el ingreso del mismo.

En el método de variación de Slutsky, se busca hacer un ajuste en el ingreso del agente para que este se pueda permitir una cierta canasta de consumo. En el caso particular de la variación compensada, se busca una variación en el ingreso tal que permita al agente consumir la canasta **inicial**. En el caso de la variación equivalente, se busca una variación en el ingreso tal que permita al agente consumir la canasta **final**.

Para el caso particular en el cual el precio del bien x_1 disminuye, la variación necesaria en el ingreso para que este siga permitiéndose alcanzar la canasta inicial, es una disminución del ingreso, la cual generaría una nueva restricción presupuestaria. Sin embargo, esta nueva restricción presupuestaria debe mantener la nueva relación de precios y ser tangente a la primera canasta consumida, puesto que se trata de una variación compensada. Esto se ve así:



Así, el cambio de x_{1_a} a x_{1_c} es el efecto sustitución del bien x_1. De x_{1_c} a x_{1_b}, es decir el efecto restante, es el efecto ingreso.

¿Cómo saber exactamente cuánto es la renta necesaria para hacer el ajuste o variación correspondiente? La clave para responder a esta pregunta radica en comprender la existencia de las dos restricciones presupuestarias. Así, se tiene una primera restricción presupuestaria de la forma $m_1 = p_1x_1 + p_2x_2$, y debido al cambio en el precio del bien 1, surge una nueva restricción presupuestaria que representa los nuevos precios relativos, y por lo tanto $m_2 = p_1'x_1 + p_2x_2$. Entonces, el ajuste necesario en el ingreso será igual a la diferencia entre ambas rentas. Así:

$$\begin{aligned}\Delta m = m_2 - m_1 = p_1x_1 + p_2x_2 - (p_1'x_1 + p_2x_2) \\ \Delta m = p_1x_1 + \cancel{p_2x_2} - p_1'x_1 - \cancel{p_2x_2} \\ \Delta m = p_1x_1 - -p_1'x_1 \\ \Delta m = x_1(p_1 - p_1') \\ \boxed{\Delta m = x_1 \cdot \Delta p_1}\end{aligned} \tag{5.1}$$

Análogamente sería el caso para el cual varíe el precio del bien x_2.

5.1.1. *Variación compensada (a la Slutsky)*

Definición 8. Cantidad de ingreso que habría que darle o quitarle al agente para que se pueda permitir adquirir el mismo conjunto (cesta) de consumo ante el cambio inicial. Se toman en cuenta los precios finales.

Ejemplo 7 [Variación compensada a la Slutsky]. Un agente tiene la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$. Los precios son $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$. Luego, el ingreso corresponde a $m = 100$. Si a partir de la posición inicial de equilibrio A, ahora p_1 disminuye a $p_1\prime = 1$, encuentre:

- El efecto sustitución y el efecto ingreso, para ambos bienes, para una variación compensada en el ingreso a la Slutsky.

En primer lugar, es necesario obtener las funciones de demanda marshallianas para ambos bienes. Note que para una función de utilidad de la forma $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$ se tiene que

$$TMS_{1,2} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x_1}}{1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = x_1^M$$

Ahora, corresponde averiguar la función de demanda del otro bien:

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 \Leftrightarrow m = \cancel{p_1}\left(\frac{p_2}{\cancel{p_1}}\right) + p_2 x_2$$

$$m = p_2 + p_2 x_2 \Leftrightarrow m = p_2(1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{m}{p_2} - 1 = x_2^M$$

Sabiendo las formas funcionales de las demandas, podemos determinar el nivel de consumo dados los precios iniciales (consumo inicial) y el nivel de consumo dados los precios finales (consumo final), para así poder determinar el nivel de consumo ajustado a la variación correspondiente.

$$x_1^M = \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow x_1^M = \frac{(4)}{(2)} \Leftrightarrow x_1^M = 2$$

$$x_2^M = \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow x_2^M = \frac{100}{4} - 1 \Leftrightarrow x_1^M = 24$$

$\boxed{\text{Conjunto de consumo inicial} = (2,24)}$

$$x_1^M = \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow x_1^M = \frac{(4)}{(1)} \Leftrightarrow x_1^M = 4$$

$$x_2^M = \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow x_2^M = \frac{100}{4} - 1 \Leftrightarrow x_1^M = 24$$

$\boxed{\text{Conjunto de consumo final} = (4,24)}$ Ahora, se procede a hacer el ajuste de acuerdo a la variación solicitada. Hay que hacer un ajuste en el ingreso del consumidor que le permita seguir adquiriendo exactamente la misma canasta del **consumo inicial**. Dado que uno de los bienes bajó su precio, la situación inicial del agente mejoró, por lo que para seguir obteniendo exactamente la misma canasta inicial, es esperado que el ingreso debería bajar. Así:

$$\Delta m = x_1 \cdot \Delta p_1 \Leftrightarrow \Delta m = 2 \cdot -1 \Leftrightarrow \Delta m = -2$$

$$m_{ajustada} = m + \Delta m \Leftrightarrow m_{ajustada} = 100 + (-2) \Leftrightarrow m_{ajustada} = 98$$

Sabiendo el nivel de renta necesario para hacer la variación correspondiente, se puede proceder a encontrar el conjunto de consumo tomando en cuenta la variación solicitada. De esta manera:

$$x_1^M = \frac{p_2}{p_1'} \Leftrightarrow x_1^M = \frac{(4)}{(1)} \Leftrightarrow x_1^M = 4$$

$$x_2^M = \frac{m_{ajustada}}{p_2} - 1 \Leftrightarrow x_2^M = \frac{98}{4} - 1 \Leftrightarrow x_1^M = \frac{47}{2}$$

$\boxed{\text{Conjunto de consumo compensado} = (4, \tfrac{47}{2})}$

Habiendo hecho esto, nada más queda determinar los efectos ingresos y sustitución.

Para encontrar el efecto sustitución, basta preguntarse: ¿cuánto cambió el consumo inicial de los bienes x_1 y x_2 versus el consumo compensado? En el caso del bien x_1 el consumo inicial era de 2 unidades, y el consumo compensado fue de 4, así $4 - 2 = 2$. En el caso del bien x_2, el consumo inicial era de 24, mientras que el consumo compensado final fue de $\frac{47}{2}$, por lo que el efecto sustitución sobre el bien x_2 es de $\frac{47}{2} - 24 = -\frac{1}{2}$.

Para encontrar el efecto ingreso, basta preguntarse: ¿cuánto cambió el consumo final de los bienes x_1 y x_2 versus el consumo compensado? En el caso del bien x_1 el consumo final era de 4 unidades, y el consumo compensado fue de 4, así $4 - 4 = 0$. En el caso del bien x_2, el consumo final era de 24, mientras que el consumo compensado final fue de $\frac{47}{2}$, por lo que el efecto sustitución sobre el bien x_2 es de $24 - \frac{47}{2} = \frac{1}{2}$.

Observe que para el efecto ingreso lo único que se hizo fue calcular .el resto"del efecto total. Es decir,

efecto total = efecto sustitución + efecto ingreso $\Leftrightarrow$ efecto total - efecto sustitución = efecto ingreso

.

5.1.2. Variación equivalente (a la Slutsky)

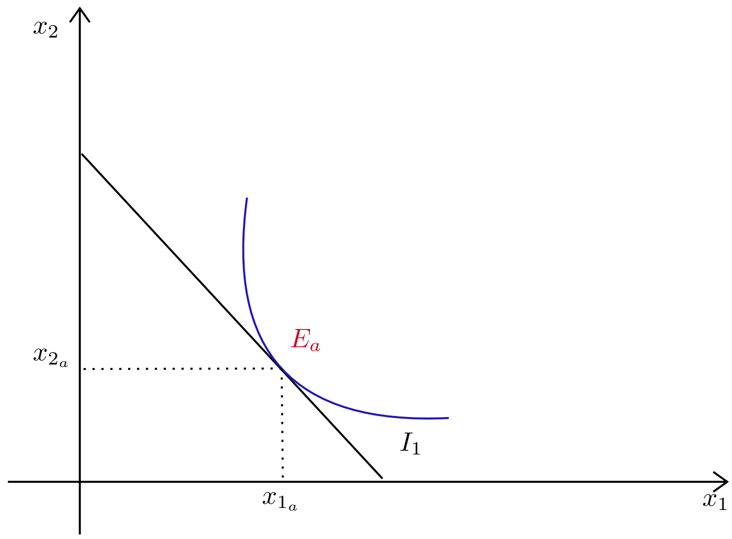
Definición 9. Cantidad de ingreso que habría que darle o quitarle al agente para que se pueda permitir adquirir el mismo conjunto (cesta) de consumo ante el cambio inicial. Se toman en cuenta los precios finales.

Ejemplo 8 [Variación equivalente a la Slutsky]. Un agente tiene la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$. Los precios son $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$. Luego, el ingreso corresponde a $m = 100$. Si a partir de la posición inicial de equilibrio A, ahora p_1 disminuye a $p_1\prime = 1$, encuentre:

- El efecto sustitución y el efecto ingreso, para ambos bienes, para una variación compensada en el ingreso a la Slutsky.

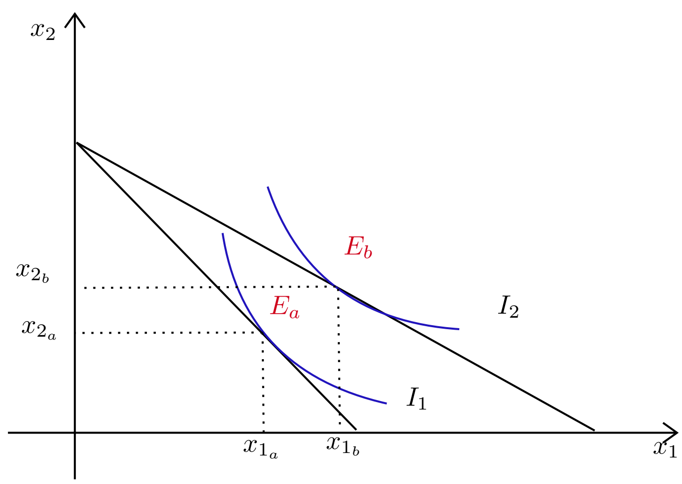
5.2. Abordaje según Hicks

Se tiene una situación inicial como la que sigue:



Es decir, dada una restricción presupuestaria, unos precios relativos, un ingreso y unas ciertas preferencias representadas mediante una función de utilidad, se escoge una canasta o conjunto de consumo que sea tangente a la restricción presupuestaria. Ahora, ¿qué pasaría si el precio de un bien cambia? La respuesta es que si, simultáneamente, el precio de un solo bien cambia, habría un cambio en los precios relativos de los bienes en cuestión. Esto se traduce en un cambio de pendiente para la restricción presupuestaria.

Para el caso particular en el cual el precio del bien x_1 disminuye, la variación necesaria en el ingreso para que este siga permitiéndose alcanzar la canasta inicial, es una disminución del ingreso, la cual generaría una nueva restricción presupuestaria. Sin embargo, esta nueva restricción presupuestaria debe mantener la nueva relación de precios y ser tangente a la primera canasta consumida, puesto que se trata de una variación compensada. Esto se ve así:

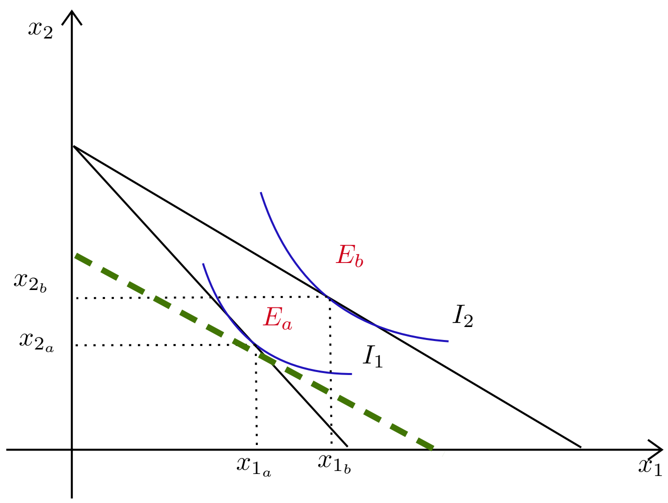


Así, el cambio de x_{1_a} a x_{1_c} es el efecto sustitución del bien x_1. De x_{1_c} a x_{1_b}, es decir el efecto restante, es el efecto ingreso.

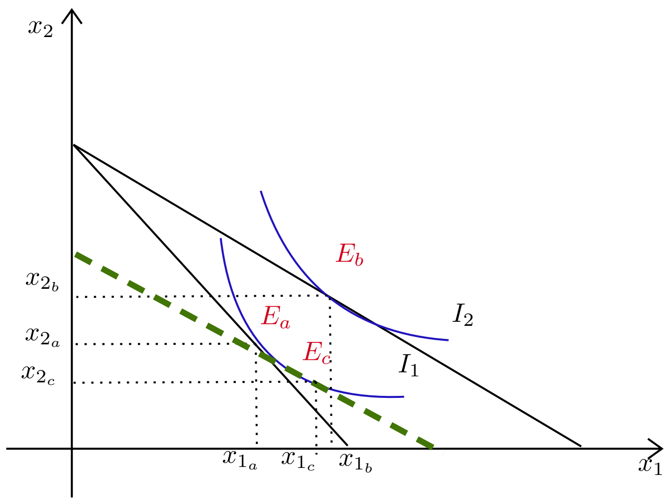
En este caso, para aislar el efecto sustitución efectivamente del efecto precios total, hay que preguntarse ¿cuál sería la canasta óptima de consumo para el agente si se enfrentara a un nuevo precio en uno de los bienes **pero sin experimentar cambio alguno en su ingreso real**? Es decir, que aquí se busca llevar al consumidor a **una curva de indiferencia** en lugar de una canasta, como en el caso del abordaje bajo Slutsky.

En el método de variación de Hicks, se busca hacer un ajuste en el ingreso del agente para que este se pueda permitir consumir en una cierta curva de indiferencia. En el caso particular de la variación compensada, se busca una variación en el ingreso tal que permita al agente consumir en la curva de indiferencia **inicial**. En el caso de la variación equivalente, se busca una variación en el ingreso tal que permita al agente consumir en la curva de indiferencia **final**.

Para el caso particular en el cual el precio del bien x_1 disminuye, la variación necesaria en el ingreso para que este siga permitiéndose alcanzar la canasta inicial, es una disminución del ingreso, la cual generaría una nueva restricción presupuestaria. Sin embargo, esta nueva restricción presupuestaria debe mantener la nueva relación de precios y ser tangente a la primera canasta consumida, puesto que se trata de una variación compensada. Esto se ve así:



Y así, el nuevo óptimo sería:



Gráficamente, el nuevo punto de equilibrio sería C, volviendo a la curva de indiferencia original, por lo que se trata de una variación compensada a la Hicks. Si se hubiese tratado de una variación equivalente a la Hicks, se hubiese tenido que ir a la curva de indiferencia final, es decir I_2.

5.2.1. Variación compensada (a la Hicks)

5.2.2. Variación equivalente (a la Hicks)

Ejemplo 9 [Variación equivalente a la Hicks]. Un agente tiene la función de utilidad $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$. Los precios son $p_1 = 2$ y $p_2 = 4$. Luego, el ingreso corresponde a $m = 100$. Si a partir de la posición inicial de equilibrio A, ahora p_1 disminuye a $p_1\prime = 1$, encuentre:

- El efecto sustitución y el efecto ingreso, para ambos bienes, para una variación equivalente a la Hicks.

En primer lugar, es necesario obtener las funciones de demanda marshallianas para ambos bienes. Note que para una función de utilidad de la forma $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$ se tiene que

$$TMS_{1,2} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x_1}}{1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = x_1^M$$

Ahora, corresponde averiguar la función de demanda del otro bien:

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \Leftrightarrow m = \cancel{p_1}\left(\frac{p_2}{\cancel{p_1}}\right) + p_2x_2$$

$$m = p_2 + p_2x_2 \Leftrightarrow m = p_2(1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{m}{p_2} - 1 = x_2^M$$

Sabiendo las formas funcionales de las demandas, podemos determinar el nivel de consumo dados los precios iniciales (consumo inicial) y el nivel de consumo dados los precios finales (consumo final), para así poder determinar el nivel de consumo ajustado a la variación correspondiente.

$$x_1^M = \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow x_1^M = \frac{(4)}{(2)} \Leftrightarrow x_1^M = 2$$

$$x_2^M = \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow x_2^M = \frac{100}{4} - 1 \Leftrightarrow x_1^M = 24$$

$\boxed{\text{Conjunto de consumo inicial} = (2{,}24)}$

$$x_1^M = \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow x_1^M = \frac{(4)}{(1)} \Leftrightarrow x_1^M = 4$$

$$x_2^M = \frac{m}{p_2} - 1 \Leftrightarrow x_2^M = \frac{100}{4} - 1 \Leftrightarrow x_1^M = 24$$

$\boxed{\text{Conjunto de consumo final} = (4{,}24)}$

Ahora, se procede a evaluar el conjunto de consumo final evaluado en la función de utilidad: $\boxed{u(4, 24) = \ln 4 + 24}$

Ahora, usando las demandas marshallianas encontradas, se evalúa en la función de utilidad: $u(p_1, p_2, m) = \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m_2}{p_1} - 1$ y se igualan:

$$\begin{aligned}
\ln 4 + 24 &= \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{m_2}{p_1} - 1 \\
\ln 4 - \ln \frac{4}{2} &= \frac{m_2}{p_1} - 1 - 24 \\
\ln 4 - \ln 2 &= \frac{m_2}{4} - 25 \\
\ln \frac{4}{2} + 25 &= \frac{m_2}{4} \\
\ln 2 + 25 &= \frac{m_2}{4} \\
4 \ln 2 + 100 &= m_2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Conjunto de consumo equivalente} = (2, \ln(2) + 24)}$

Para encontrar el efecto sustitución, basta preguntarse: ¿cuánto cambió el consumo final de los bienes x_1 y

x_2 versus el consumo compensado? En el caso del bien x_1 el consumo final era de 4 unidades, y el consumo equivalente fue de 2, así $4-2=2$. En el caso del bien x_2, el consumo final era de 24, mientras que el consumo equivalente final fue de $\ln 2+24$, por lo que el efecto sustitución sobre el bien x_2 es de $24-\ln 2+24=-\ln 2$.

Para encontrar el efecto ingreso, basta preguntarse: ¿cuánto cambió el consumo inicial de los bienes x_1 y x_2 versus el consumo compensado? En el caso del bien x_1 el consumo inicial era de 2 unidades, y el consumo equivalente fue de 2, así $2-2=0$. En el caso del bien x_2, el consumo inicial era de 24, mientras que el consumo equivalente final fue de $\ln 2+24$, por lo que el efecto sustitución sobre el bien x_2 es de $\ln 2+24-24=\ln 2$.

Ejercicio 29 [Tasas marginales de sustitución]. Encuentre la tasa marginal de sustitución para las siguientes funciones de utilidad utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

- $2x_1+3x_2$
- $4x_1+6x_2$
- ax_1+bx_2
- $2\sqrt{x_1}+x_2$
- $\ln x_1+x_2$
- $u(x_1)+x_2$
- x_1x_2
- $x_1^a x_2^b$
- $(x_1+2)(x_2+1)$
- $(x_1+a)(x_2+b)$
- $x_1^a+x_2^b$

Ejercicio 30 [Demandas marshallianas variadas]. Encuentre las funciones de demanda marshallianas para las siguientes funciones de utilidad utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

- $2x_1+3x_2$
- $4x_1+6x_2$
- ax_1+bx_2
- $2\sqrt{x_1}+x_2$
- $\ln x_1+x_2$
- $u(x_1)+x_2$
- x_1x_2
- $x_1^a x_2^b$
- $(x_1+2)(x_2+1)$
- $(x_1+a)(x_2+b)$
- $x_1^a+x_2^b$

Ejercicio 31 [Teoría del consumidor a prueba[5]]. Pedro tiene preferencias sobre dos bienes: comida x y asistir a los partidos de los Boston Celtics y. Sus preferencias están dadas por:

$$U(x,y)=x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$$

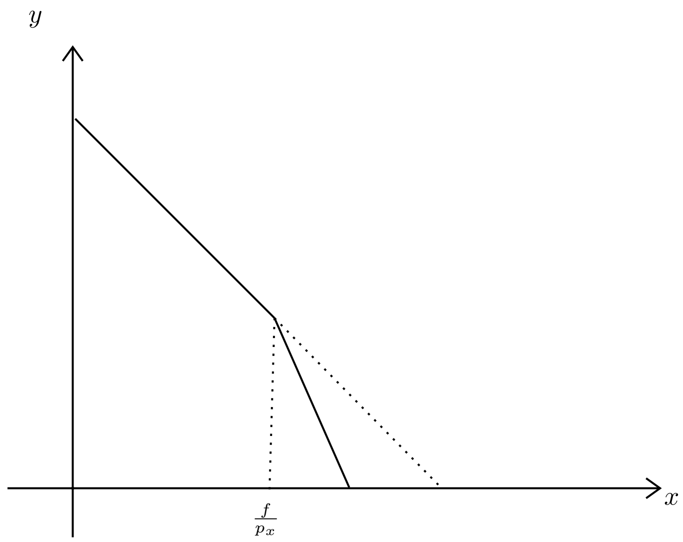
La comida tiene precio p_x y un ticket a un partido cuesta p_y. El ingreso de Pedro es m, y es elegible para cupones de alimentos por un monto de f. Los cupones sólo pueden usarse para comida. Asumimos que $f<3m$.

[5]Ejercicio tomado de Gruber (2023)

1. (3 Puntos) Escribe y grafica la restricción presupuestaria de Pedro.

   → La restricción presupuestaria está dada por:

$$\begin{cases} p_y y = m & \text{si } p_x x \leq f \\ p_x x + p_y y = m + f & \text{si } p_x x > f \end{cases}$$



2. (5 Puntos) Calcula la demanda de Pedro por comida y entradas, como función de los precios, ingreso y valor de los cupones.

   → Conjeturamos que $x > \frac{f}{p_x}$ porque las primeras unidades de comida son cubiertas por los cupones.

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{m+f}{p_x}, \qquad y = \frac{1}{4} \cdot \frac{m+f}{p_y}$$

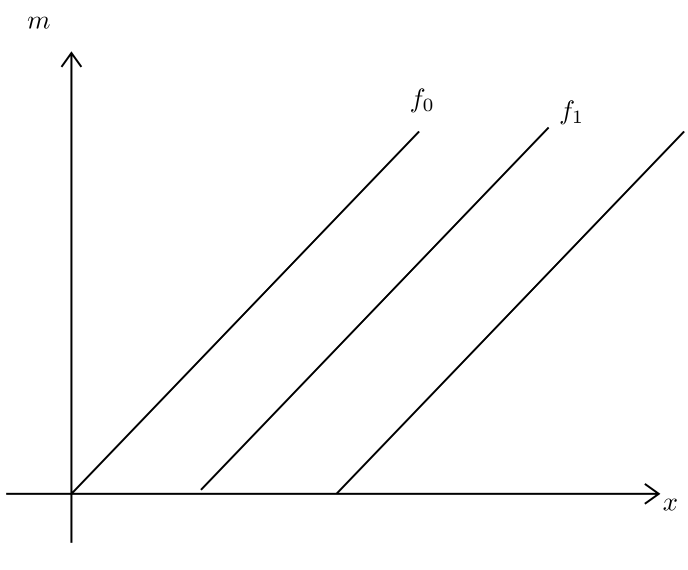
   Verificamos que efectivamente $p_x x > f$:

$$p_x x = \frac{3}{4}(m+f) > f \iff 3m > f$$

3. (5 Puntos) Grafica la curva de Engel para distintos valores de cupones, con $p_x = 1$. Explica cómo depende la curva del valor de los cupones.

   → La demanda cuando $p_x = 1$ es:

$$x = \frac{3}{4}(m+f) \Rightarrow m = \frac{4}{3}x - f$$



La curva de Engel es decreciente en f, porque cuanto mayor es el subsidio, menos ingreso se necesita para alcanzar un determinado consumo de x.

4. (10 Puntos) Calcula la nueva demanda de Pedro después de un aumento en p_x. Descompón el efecto total en sustitución e ingreso.

   $\rightarrow$ Sean (x, y) y (x', y') los consumos antes y después del cambio. Usamos que:

$$MRS = \frac{3y}{x} = \frac{p_x}{p_y}, \quad u(x, y) = u(x', y')$$

   Demanda óptima:

$$x = \frac{3(m+f)}{4p_x}, \qquad y = \frac{m+f}{4p_y}$$

   Inicialmente, $p_x = 1$, $p_y = 1$, $y = 1$, entonces:

$$u_i = x^{3/4}y^{1/4} = 900^{3/4}(1)^{1/4} = 653{,}85$$

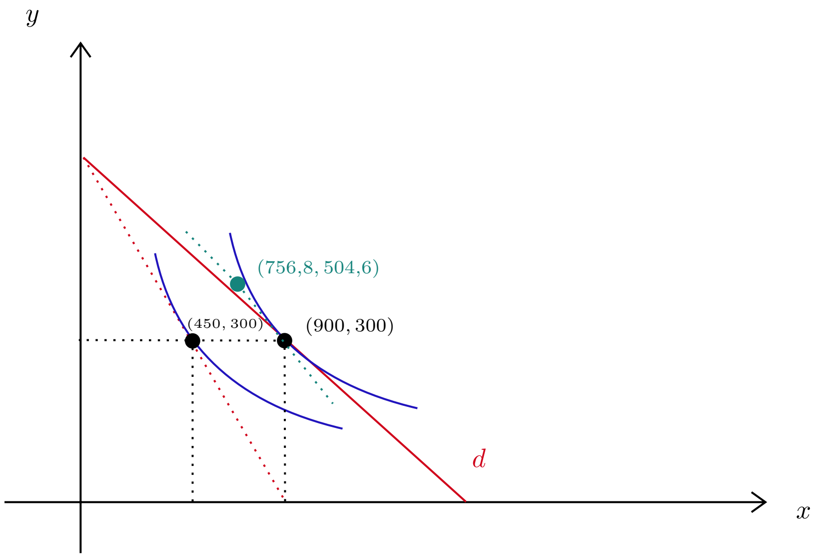
$$(x, y) = (900, 1), \quad (x', y') = (450, 300)$$

   Para hallar el punto compensado:

$$\left(\frac{3y}{2}\right) y^{1/4} = 683{,}85 \Rightarrow x \approx 756{,}8, \quad y \approx 504{,}6$$

   Cambios:

$$\text{Sustitución: } 900 - 756{,}8 = 143{,}2, \quad \text{Ingreso: } 756{,}8 - 450 = 306{,}8$$



5. (5 Puntos) Calcula el aumento en cupones requerido para que Pedro mantenga su utilidad tras el alza de precios.

   $\rightarrow$ El bienestar de Pedro se mantiene si puede consumir x', y' a los nuevos precios:

$$\Delta f = p_x' x' + p_y y' - m - f$$

6. (2 Puntos) Supón que en lugar de cupones, Pedro recibe un cheque de estímulo de tamaño s. ¿Cuál es la nueva demanda?

   $\rightarrow$ La nueva restricción presupuestaria es:

$$p_x x + p_y y = m + s \Rightarrow x = \frac{3(m+s)}{4p_x}, \quad y = \frac{1(m+s)}{4p_y}$$

7. (5 Puntos) ¿Qué tamaño debe tener el cheque de estímulo para que Pedro sea indiferente entre cupones y el cheque?

   $\rightarrow$ Como $3m > f$, el tamaño necesario del cheque debe ser $s = f$.

Capítulo 6

Elasticidades

Definición 10. Defínase elasticidad como el cambio porcentual de una variable ante un cambio porcentual de otra variable. Genéricamente, la elasticidad de x con respecto a y se define:

$$\eta_{x,y} = \frac{\%\Delta x}{\%\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{y}{x}$$

Note que una elasticidad es pues, una razón de cambios: el cambio porcentual de x entre el cambio porcentual de y. Sin embargo, suele suceder que las unidades en las que está expresada la variable x, no son las mismas unidades en que está expresada la variable y, por lo cual, dicha razón de cambios es ponderada por el recíproco de las variables.

Aprovechando que la elasticidad se puede entender como una razón de cambios, entonces puede replantearse el concepto de la elasticidad en términos más favorables para el cálculo diferencial. En particular, recuerde que una derivada puede entenderse como la pendiente de una recta tangente a una función. Entonces, en otras palabras, una derivada es una pendiente de algo. Y recuerde que la pendiente de una función es la razón del cambio en la elevación entre el cambio en desplazamiento, o sea, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, por lo cual, la razón de cambios de la elasticidad también se puede expresar mediante derivadas.

En particular, se quiere saber cuánto cambia una variable ante un cambio en otra variable y recordando siempre la ponderación que debe acompañar a esta expresión, puede entonces replantearse una elasticidad de la siguiente forma:

$$\eta_{x,y} = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{y}{x}$$

Nota 11. Es importante tener cuidado con la notación: según esto, la expresión $\eta_{x,y}$ se puede entender como la elasticidad de x con respecto a y. Esta definición indica **cuánto cambia x ante un cambio en y**. Mientras que $\eta_{y,x}$ indica la elasticidad de y con respecto a x y esta más bien indica **cuánto cambia y ante un cambio en x**.

Es decir, que el orden en la notación indica un tipo de elasticidad concreto. Así por ejemplo:

$$\eta_{x,y} = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{y}{x}$$

$$\eta_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$$

Esto quiere decir que:

$$\frac{1}{\eta_{y,x}} = \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta_{y,x}} = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta_{y,x}} = \eta_{x,y}$$

Dependiendo de las variables que se empleen en la expresión anterior, así se estará ante un tipo distinto de elasticidad.

A continuación, se presentar algunos de los tipos más comunes de elasticidades.

6.1. Elasticidad precio (propio)

Definición 11. Defínase la elasticidad precio (propio) de una expresión x_i como:

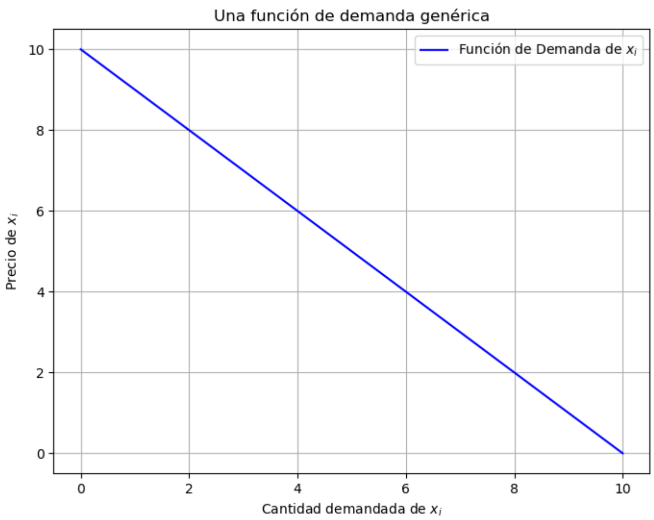
$$\eta_{x,p_{x_i}} = \frac{\partial x_i}{\partial p_{x_i}} \frac{p_{x_i}}{x_i}$$

A partir de esta definición, se suele hacer la siguiente categorización:

- Si $\eta_{x_i,p_{x_i}} > 0$ no se cumple la ley de la demanda $\rightarrow$ Bien Giffen

- Si $\eta_{x_i,p_{x_i}} < 0$ se cumple la ley de la demanda

Observe que la caracterización de la ley de la demanda resulta muy intuitiva estudiarla en términos de la elasticidad. Observe que las funciones de demanda son graficadas con una pendiente negativa, lo cual



simboliza la relación negativa entre cantidad demandada y precio. Por eso es que si $\eta_{x_i,p_{x_i}} < 0$ se dice que se cumple la ley de la demanda, porque entonces hay una relación inversamente proporcional entre las variables, en este caso, la cantidad demandada de x_i y el precio de esa mercancía p_{x_i}.

Esto quiere decir que:

- Si $\uparrow p_{x_i} \Rightarrow x_i \downarrow$ esto quiere decir que si el precio de x_i sube, disminuye la cantidad demandada de x_i.

- Si $\downarrow p_{x_i} \uparrow x_i \Rightarrow$ esto quiere decir que si el precio de x_i sube, disminuye la cantidad demandada de x_i.

Ejemplo 10 [Elasticidad de la función de utilidad Cobb-Douglas con dos bienes]. Tome el caso de la función de utilidad Cobb-Douglas $u(x,y) = x^\alpha y^\beta$. Esta función de utilidad genera las siguientes funciones de demanda marshallianas:

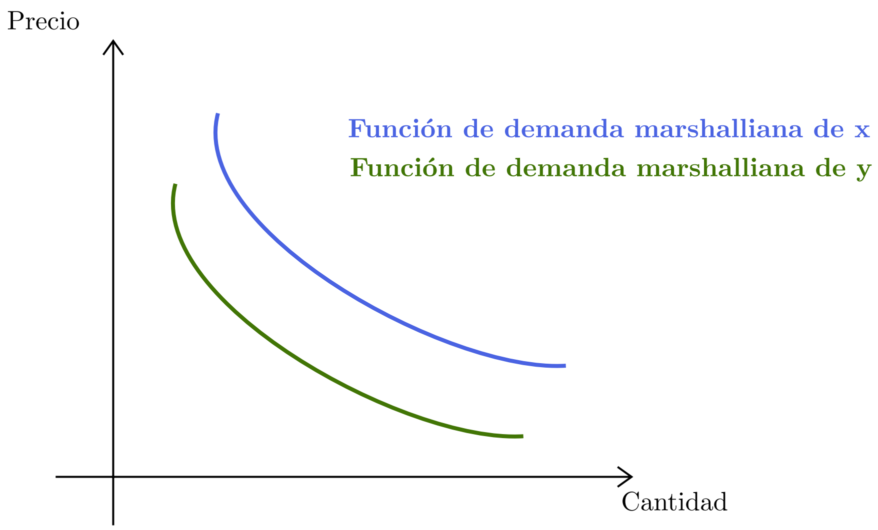
- $\dfrac{\alpha m}{p_x(\alpha+\beta)} = x^M$

- $\dfrac{\beta m}{p_y(\alpha+\beta)} = y^M$

De manera que, si se quisiera obtener la elasticidad precio del bien x, se tendría que:

$$
\begin{aligned}
\eta_{x,p_x} =& \frac{\partial x^M}{\partial p_x}\frac{p_x}{x^M} \\
\Leftrightarrow =& \frac{\partial}{\partial p_x}\left[\frac{\alpha m}{p_x(\alpha+\beta)}\right]\frac{p_x}{\frac{\alpha m}{p_x(\alpha+\beta)}} \\
=& \frac{\partial}{\partial p_x}\left[\frac{\alpha m p_x^{-1}}{(\alpha+\beta)}\right]\frac{p_x(p_x(\alpha+\beta))}{\alpha m} \\
=& \frac{-\alpha m p_x^{-2}}{(\alpha+\beta)}\frac{p_x^2(\alpha+\beta)}{\alpha m} \\
=& \frac{-\alpha m}{p_x^2(\alpha+\beta)}\frac{p_x^2(\alpha+\beta)}{\alpha m} \\
=& \frac{-\cancel{\alpha m}}{\cancel{p_x^2(\alpha+\beta)}}\frac{\cancel{p_x^2(\alpha+\beta)}}{\cancel{\alpha m}} \\
=& -1 < 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el bien x es un bien normal que cumple la ley de la demanda. Este razonamiento es análogo para el caso de y. Observe que la función de utilidad Cobb-Douglas genera funciones de demanda que cumplen con la ley de la demanda. Esto quiere decir que para una función de utilidad tipo Cobb-Douglas, se generan funciones de demanda marshallianas como las siguientes:



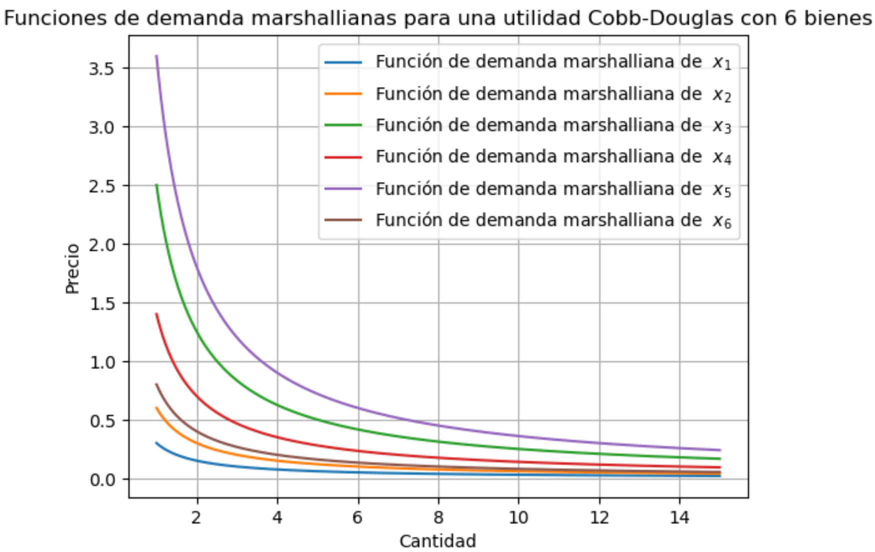
Esto no es más que el caso particular para $n = 2$ de la función de utilidad de Cobb-Douglas genérica en n bienes. Note que:

$$\frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_k} = x_j^M$$

Así:

$$\begin{aligned}
\eta_{x_j,p_{x_j}} &= \frac{\partial x_j^M}{\partial p_j}\frac{p_j}{x_j^M}\\
&= \frac{\partial}{\partial p_j}\left[\frac{\alpha_j m}{p_j\sum_{i=1}^{n}\alpha_k}\right]\frac{p_j}{\frac{\alpha_j m}{p_j\sum_{i=1}^{n}\alpha_k}}\\
&= \frac{\partial}{\partial p_j}\left[\frac{p_j^{-1}\alpha_j m}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_k}\right]\frac{p_j p_j\sum_{i=1}^{n}\alpha_k}{\alpha_j m}\\
&= \frac{-\alpha_j m}{p_j^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_k}\frac{p_j^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_k}{\alpha_j m}\\
&= \frac{-\cancel{\alpha_j m}}{\cancel{p_j^2\sum_{i=1}^{n}}\alpha_k}\frac{\cancel{p_j^2\sum_{i=1}^{n}}\alpha_k}{\cancel{\alpha_j m}}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Por ejemplo, si una función de utilidad tipo Cobb-Douglas $u(\vec{x}) = \Pi_{i=1}^{n}$ tuviera 6 bienes, sus funciones de demanda se verían algo así:



Ejercicio 32 [Elasticidad precio de una demanda inversa]. Obtenga la elasticidad precio de la siguiente función inversa de demanda:

$$P_d = -\frac{1}{2}Q_d + 30$$

Recuerde que la elasticidad precio se obtiene aplicando la derivada parcial de la función directa con respecto al precio y luego multiplicando por el recíproco. De esta forma, se procede a despejar la cantidad de la función inversa para así obtener la función de demanda directa:

$$\begin{aligned} P_d =& -\frac{1}{2}Q_d + 30 \\ \Leftrightarrow P_d - 30 =& -\frac{Q_d}{2} \\ \Leftrightarrow 2P_d - 60 =& -Q_d \\ \Leftrightarrow -2P_d + 60 =& Q_d \end{aligned}$$

Al tener la función de demanda directa, se puede proceder a aplicar la derivada para ver la razón de cambio:

$$\begin{aligned} \eta_{q,p} =& \frac{\partial q}{\partial p}\frac{p}{q} \\ =& \frac{\partial}{\partial p}\left[-2p + 60\right] \cdot \frac{p}{-2p + 60} \\ =& -2 \cdot \frac{p}{-2p + 60} \\ =& \frac{-2p}{-2p + 60} \end{aligned}$$

Ejercicio 33 [Elasticidad precio de una oferta inversa]. Obtenga la elasticidad precio de la siguiente función inversa de oferta:

$$P_s = 30Q_s$$

Recuerde que la elasticidad precio se obtiene aplicando la derivada parcial de la función directa con respecto al precio y luego multiplicando por el recíproco. De esta forma, se procede a despejar la cantidad de la función inversa para así obtener la función de demanda directa:

$$\begin{aligned} P_s =& 30Q_s \\ \Leftrightarrow \frac{P_s}{30} =& Q_s \end{aligned}$$

Al tener la función de oferta directa, se puede proceder a aplicar la derivada para ver la razón de cambio:

$$\begin{aligned} \eta_{q,p} =& \frac{\partial q}{\partial p}\frac{p}{q} \\ =& \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p}{30}\right] \cdot \frac{p}{\frac{p}{30}} \\ =& \frac{1}{30} \cdot \frac{30\cancel{p}}{\cancel{p}} \end{aligned}$$

Ejercicio 34 [El mercado de los cigarros y su elasticidad]. Suponga que, en el mercado de cigarros, se tiene una demanda inversa de cigarros dada por $P^D = -Q^D + 30$ y una oferta inversa de $P^O = \frac{1}{4}Q^O + 10$. Dado este escenario, el Gobierno considera que el consumo de cigarros, por parte de los fumadores, genera serias afectaciones en la salud de las otras personas.

- Calcule el valor de la elasticidad precio, tanto para la oferta como para la demanda, en el punto de equilibrio.

  Recuerde que la elasticidad precio de una función se encuentra de la siguiente forma:

  $$\eta_{q,p} = \frac{\partial q}{\partial p}\frac{p}{q}$$

  Por lo tanto, para el caso concreto, las funciones de oferta y demanda directas serían las siguientes:

  $$\begin{aligned} p^D =& -q^D + 30 \\ \Leftrightarrow q^D =& 30 - p^D \\ p^O =& \frac{1}{4}q^O + 10 \\ \Leftrightarrow 4p^O - 40 =& q^O \end{aligned}$$

Y de esta manera se puede proceder a encontrar las elasticidades precio. Para la demanda:

$$\begin{aligned}\eta_{q,p} =& \frac{\partial q}{\partial p}\frac{p}{q}\\ =& \frac{\partial}{\partial p}\left[30-p\right]\frac{p}{30-p}\\ =& -1\cdot\frac{p}{30-p}\\ =& \frac{-p}{30-p}\end{aligned}$$

En el caso de la oferta:

$$\begin{aligned}\eta_{q,p} =& \frac{\partial q}{\partial p}\frac{p}{q}\\ =& \frac{\partial}{\partial p}\left[4p-40\right]\frac{p}{4p-40}\\ =& 4\cdot\frac{p}{4p-40}\\ =& \frac{4p}{4p-40}\end{aligned}$$

Note que al tener una ecuación de oferta y una de demanda, se puede encontrar el equilibrio del mercado simplemente igualando ambas ecuaciones. Esto permitirá encontrar un precio y cantidad de equilibrio, los cuales se pueden evaluar en las funciones de elasticidades hayadas.

De esta manera, en el equilibrio:

$$\begin{aligned}P^O =& P^D \Leftrightarrow Q^O = Q^S\\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}q + 10 =& -q + 30\\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}q + q =& 30 - 10\\ \Leftrightarrow \frac{q+4q}{4} =& 20\\ \Leftrightarrow 5q =& 80\\ \Leftrightarrow q = 16\end{aligned}$$

Y así, el precio de equilibrio sería:

$$\begin{aligned}P^O =& 14Q^O + 10 \Rightarrow P^O = \frac{1}{4}(16) + 10 \Rightarrow P^O = 14\\ P^D =& -Q^D + 30 \Rightarrow Q^O = -(16) + 30 \Rightarrow P^D = 14\end{aligned}$$

Ahora, con la cantidad y precio de equilibrio, se pueden evaluar estos valores en las funciones de elasticidad antes encontradas. Primero, para la demanda:

$$\begin{aligned}\eta_{q,p} =& \frac{-p}{30-p}\\ \Leftrightarrow \eta_{q,p} =& \frac{-14}{30-14}\\ \Leftrightarrow \eta_{q,p} =& \frac{-7}{8}\end{aligned}$$

Y luego, para la oferta:

$$\begin{aligned}\eta_{q,p} =& \frac{4p}{4p-40}\\ \Leftrightarrow \eta_{q,p} =& \frac{4(14)}{4(14)-40}\\ \Leftrightarrow \eta_{q,p} =& \frac{7}{2}\end{aligned}$$

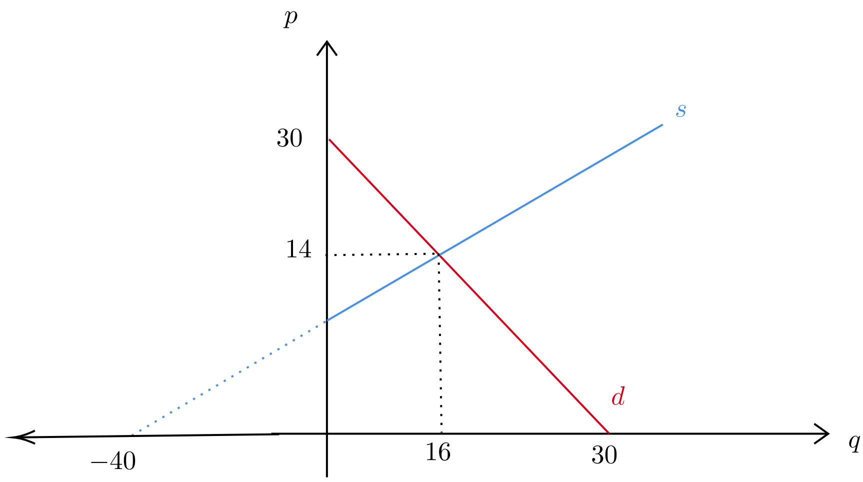
Ejercicio 35 [Equilibrio de mercado y elasticidades[1]]. Considere un mercado donde se tienen las siguientes ecuaciones de demanda y oferta:

$$Q_d = 30 - P_d$$
$$Q_s = 4P_s - 40$$

a) Grafique el mercado.

→ Estas corresponden a las curvas normales. Note, además, la relación entre cantidad demandada y precio, y la relación positiva entre cantidad ofrecida y precio. Calculamos las curvas inversas, necesarias para trazar las curvas en una gráfica con la cantidad en el eje xy el precio en el eje y

$$P_d = 30 - Q_d$$
$$P_s = \frac{Q_s}{4} + 10$$



b) Encuentre el equilibrio del mercado.

→ Se puede encontrar el equilibrio igualando tanto las curvas normales como las inversas. Se eliminan los subíndices ya que las cantidades y precio de equilibrio son las mismas para la demanda y oferta por definición de equilibrio.

$$30 - Q = \frac{Q}{4} + 10$$
$$\Rightarrow 20 = \frac{5Q}{4}$$
$$\Rightarrow Q^* = 16, P^* = 14$$

c) Calcule la elasticidad precio de la demanda y la elasticidad precio de la oferta.

→ Recuerde la fórmula de elasticidad precio: $\mathcal{E} = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = Q'(p) \cdot \frac{P}{Q}$
Para calcular la derivada es necesario utilizar la curva normal, y el precio y cantidad donde se evalúa la elasticidad es lógicamente el equilibrio.

- Elasticidad precio de la demanda:

$$Q_d = 30 - P_d$$
$$Q'_d = -1$$
$$\mathcal{E}^D = -1 \cdot \frac{14}{16} = -0,875$$
$$\Rightarrow \left|\mathcal{E}^D\right| = 0,875$$

[1]Ejercicio tomado de ACCG

Note que, por lo tanto, es inelástica.

- Elasticidad precio de la oferta:

$$Q_s = 4P_s - 40$$
$$Q_s' = 4$$
$$\mathcal{E}^S = 4 \cdot \frac{14}{16} = 3,5 = \left|\mathcal{E}^S\right|$$

Note que, por lo tanto, es elástica.

Ejercicio 36 [Comparación de elasticidades[2]]. Usando estas dos demandas inversas P_1 y P_2, conteste los siguientes enunciados:

$$P_1 = 2 - 5Q_1$$
$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{Q_2}}$$

a) Obtenga la función de elasticidad de cada curva.
→ Se obtiene primero la demanda directa y se emplea la siguiente fórmula:

$$\varepsilon = \frac{\partial Q}{\partial P}\frac{P}{Q}$$

Nota: Se busca la demanda directa dado que se quiere obtener la derivada de Q con respecto a P (como cambia la cantidad demandada ante un cambio en el precio)

$$Q_1 = \frac{2}{5} - \frac{P_1}{5}$$
$$Q_2 = \frac{1}{P_2^2}$$

Se obtienen las derivadas respectivas

$$\frac{\partial Q_1}{\partial P_1} = \frac{-1}{5}$$
$$\frac{\partial Q_2}{\partial P_2} = \frac{-2}{P_2^3}$$

Sustituyendo en la ecuación de elasticidad precio-demanda tanto la derivada encontrada como la función de demanda,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial Q_1}{\partial P_1}\frac{P_1}{Q_1}\\ &= \frac{-1}{5} \cdot \frac{P_1}{\frac{2-P_1}{5}}\\ &= \frac{-P_1}{2-P_1}\end{aligned}$$

Definiendo la elasticidad como $|\varepsilon|$,

$$|\varepsilon_1| = \frac{P_1}{2-P_1}$$

[2]Ejercicio tomado de ACCG

Se hace el mismo procedimiento para la otra demanda,

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{\partial Q_2}{\partial P_2}\frac{P_2}{Q_2}\\ &= \frac{-2}{P_2^3}\cdot\frac{P_2}{\frac{1}{P_2^2}}\\ &= -2\end{aligned}$$

Definiendo la elasticidad como $|\varepsilon|$,

$$|\varepsilon_2| = 2$$

b) Para todos los rangos de precios, compare las elasticidades de estas dos curvas de demanda e indique cuál es más elástica.

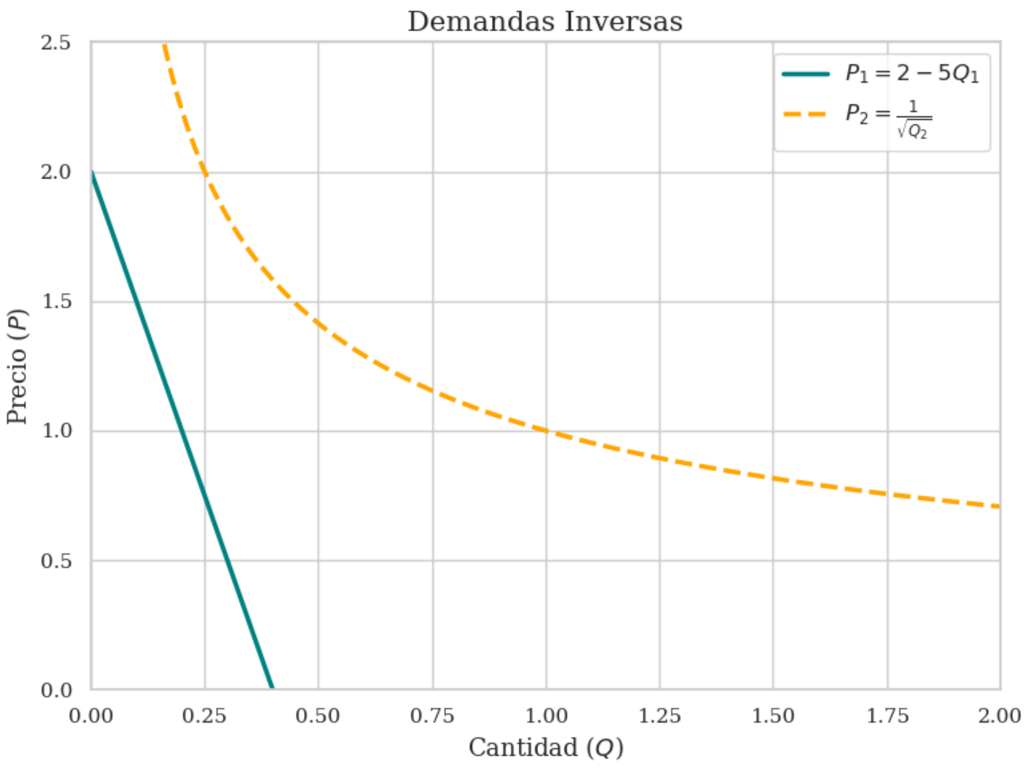
$\rightarrow$

Se busca el precio al cual dichas elasticidades se igualan:

$$\begin{aligned}|\varepsilon_1| &= |\varepsilon_2|\\ \frac{P}{2-P} &= 2\\ P &= 4-2P\\ 3P &= 4\\ P &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Note por lo tanto que si $P < \frac{4}{3}$, entonces $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$ y por lo tanto la segunda demanda es más elástica. Si, por el contrario, $2 > P > \frac{4}{3}$, entonces $|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2|$ y por lo tanto la primera demanda es más elástica. A un precio mayor que 2 la primera demanda no existe.

Gráficamente:



Demandas del ejercicio

6.2. Elasticidad precio cruzado

Definición 12. Defínase la elasticidad precio cruzado de una expresión x_i con respecto al precio de x_j como:

$$\eta_{x_i,p_{x_j}} = \frac{\partial x_i}{\partial p_{x_j}} \frac{p_{x_i}}{p_j}$$

A partir de esta definición, se suele hacer la siguiente caracterización:

- Si $\eta_{x_i,p_j} < 0$ entonces los bienes i y j son complementos perfectos .

  Esto quiere decir que si $\uparrow p_j \Rightarrow x_i \downarrow$ y si por el contrario $\downarrow p_j \Rightarrow x_i \uparrow$. En otras palabras: **existe una relación inversa entre la cantidad demandada del bien i y el precio del bien j**.

- Si $\eta_{x_i,p_j} > 0$ entonces los bienes i y j son sustitutos perfectos .

  Esto quiere decir que si $\uparrow p_j \Rightarrow x_i \uparrow$ y si $\downarrow p_j \downarrow x_i \uparrow$. En otras palabras: **existe una relación directa entre la cantidad demandada del bien i y el precio del bien j**.

Ejemplo 11 [Elasticidades precio de una función de utilidad Cobb-Douglas]. Tome el caso de la función de utilidad de complementos perfectos $u(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$. Esta función de utilidad genera las siguientes funciones de demanda marshallianas:

- $x^M = \dfrac{m}{p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y}$
- $y^M = \dfrac{m}{p_y + \frac{\alpha_y}{\alpha_x} p_x}$

De manera que, si se quisiera obtener la elasticidad precio del bien x, se tendría que:

$$\begin{aligned}
\eta_{x,p_y} =& \frac{\partial x^M}{\partial p_y} \frac{p_y}{x^M} \\
=& \frac{\partial}{\partial p_y} \left[\frac{m}{p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y} \right] \frac{p_y}{\frac{m}{p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y}} \\
=& \frac{\partial}{\partial p_y} \left[m \left(p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y \right)^{-1} \right] \frac{p_y \left(p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y \right)^{-1}}{m} \\
=& - \left[\cancel{m} \left(p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y \right)^{-2} \frac{\alpha_x}{\alpha_y} \right] \frac{p_y \left(p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y \right)^{-1}}{\cancel{m}} \\
=& - p_y \left(p_x + \frac{\alpha_x}{\alpha_y} p_y \right)^{-3} \frac{\alpha_x}{\alpha_y}
\end{aligned}$$

6.3. Elasticidad ingreso

Definición 13. Defínase la elasticidad ingreso de una expresión x_i como:

$$\eta_{x_i,m} = \frac{\partial x_i}{\partial m} \frac{m}{x_i}$$

A partir de esta definición, se suele hacer la siguiente caracterización:

- Si $\eta_{x_i,m} < 0$ entonces el bien i es un bien inferior .

  Esto quiere decir que si $\uparrow m \Rightarrow x_i \downarrow$ y si por el contrario $\downarrow m \Rightarrow x_i \uparrow$. En otras palabras: **existe una relación inversa entre la cantidad demandada del bien i y el ingreso**.

- Si $\eta_{x_i,m} > 0$ entonces el bien i es un bien normal .

  Esto quiere decir que si $\uparrow m \Rightarrow x_i \uparrow$ y si $\downarrow m x_i \uparrow$. En otras palabras: **existe una relación directa entre la cantidad demandada del bien i y el precio del bien j**.

Se suelen mencionar como ejemplos de bienes inferiores, el transporte público. A medida que las personas disponen de un mayor ingreso, es común que opten por tener su propio vehículo personal.

6.4. Elasticidad de sustitución

Definición 14. Defínase la elasticidad sustitución de una expresión x_i como:

$$\eta_{x_i,p_k} = \frac{\partial x_i}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_i}$$

A partir de esta definición, se suele hacer la siguiente caracterización:

- Si $\eta_{x_i,p_k} < 0$ x_i y x_k son bienes complementarios

  Esto quiere decir que si $\uparrow p_k \Rightarrow \downarrow x_k$

- Si $\eta_{x_i,p_k} > 0$ x_i y x_k son bienes sustitutos

  Esto quiere decir que si $\downarrow p_k \Rightarrow \uparrow x_k$

Observe que la elasticidad de sustitución plantea una especie de comparación entre dos bienes distintos entre sí: x_i y x_k. Observe que una elasticidad de sustitución η_{x_i,p_k} negativa quiere decir que existe una relación inversa entre la cantidad demandada de x_i y el precio del bien x_k, es decir, p_k. Por lo tanto, intuitivamente, se puede ver que en el caso de los bienes complementarios, al haber un cambio en el precio de uno de los bienes, se debe ajustar en la misma dirección la cantidad empleada de los otros bienes.

Caso contrario pasa con los bienes sustitutos: al ser bienes que se pueden reemplazar unos con otros, si uno cambia de precio se puede ajustar el consumo del otro bien pero en la dirección opuesta.

Nota 12. Piense por ejemplo en un caso algo extremo: si bajaran de precio los zapatos izquierdos, las personas no comprarían más zapatos izquierdos, porque requieren zapatos izquierdos y derechos en la misma proporción 1:1.

Pero, si subieran de precio los dulces de caramelo, existen muchos otros dulces que pueden sustituir a ese tipo particular de caramelos, y se podría bajar el consumo de los bienes de caramelo por otros que lo puedan sustituir.

La intuición está en recordar que los bienes complementarios se emplean o consumen en proporciones fijas, por lo cual los bienes se complementan entre sí, y no sirve alterar las proporciones en que se consumen estos. En cambio, en los bienes sustitutos, estos son fácilmente intercambiables unos por otros.

6.5. Ecuación de Slutsky

La ecuación de Slutsky es un abordaje algebraico al problema de separación e identificación de los efectos ingreso y sustitución. Para conocer este abordaje algebraico será útil haber aprendido sobre las demandas marshallianas y hicksianas y sus respectivas elasticidades.

En particular, es de utilidad recordar el concepto de la función de utilidad indirecta y la función de costo mínimo.

En primer lugar, con respecto a la función de utilidad indirecta se había dicho que la utilidad podía ser expresada en términos de los precios y el ingreso, lo cual se lograba mediante la función de utilidad indirecta. Esta función de utilidad indirecta se alcanza al evaluar los niveles óptimos de las variables de decisión (los niveles de consumo de cada mercancía) en la función objetivo, es decir, la función de utilidad.

Así, recuerde que:

$$\max_{x_1,x_2,\ldots,x_n} \quad u(\vec{X}) \tag{6.1}$$

$$\text{sujeto a} \quad m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{6.2}$$

$$\tag{6.3}$$

Y con esto se obtenían las siguientes condiciones de primer orden y sus respectivas funciones de holgura complementaria:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_1} - \lambda p_1 \leq 0 \qquad & x_1 \left[\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_1} - \lambda p_1\right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_2} - \lambda p_2 \leq 0 \qquad & x_2 \left[\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_2} - \lambda p_2\right] = 0 \\
& \vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_n} - \lambda p_n \leq 0 \qquad & x_n \left[\frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_n} - \lambda p_n\right] = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \Rightarrow m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq 0 \qquad & \lambda \left[m - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = 0
\end{aligned}$$

Pero la función de utilidad indirecta se obtiene de evaluar los niveles óptimos de las variables de decisión en la función objetivo, que es la función de utilidad, y de esta manera la función de utilidad indirecta es:

$$u = v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = v\left[x_1^M(m, \vec{p}), x_2^M(m, \vec{p}), \ldots, x_n^M(m, \vec{p})\right] = \psi(m, \vec{p})$$

Por lo que entonces al derivar la función de utilidad indirecta con respecto a sus parámetros de precios (teorema de la envolvente) se tiene que:

$$\frac{\partial v(\vec{p}, m)}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = -\lambda x_i$$

Mientras que si se vuelve a aplicar el mismo teorema pero ahora con respecto al parámetro del ingreso m, se tiene que:

$$\frac{\partial v(\vec{p}, m)}{\partial m} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = \lambda$$

Lo que es decir que:

$$\frac{\partial v(\vec{p}, m)}{\partial m} = \frac{\partial v(\vec{p}, m)}{\partial m} \Leftrightarrow -\lambda x_i = \lambda \Leftrightarrow x_i = -\frac{\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow x_i = \frac{\frac{\partial v(\vec{p}, m)}{\partial p_i}}{\frac{\partial v(\vec{p}, m)}{\partial m}}$$

Ejemplo 12 [Cumplimiento de la ecuación de Slutsky]. Considere la siguiente función de utilidad

$$u(\vec{X}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i$$

- Encuentre las funciones de demanda marshallianas

  Se tiene el problema:

  $$\max_{\vec{X}} u(\vec{X}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i \quad \text{s.a} \quad m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

  Se debe verificar la posibilidad de que haya soluciones de esquina:

  $$\begin{aligned}
  \lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_1} &= \lim_{x_1 \to 0} 1 = 1 \\
  \lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial u(\vec{X})}{\partial x_j} &= \lim_{x_1 \to 0} \frac{1}{x_j} = \infty
  \end{aligned}$$

  Es decir, que para el bien lineal x_1 se debe considerar la posibilidad de que haya una solución de esquina. Así:

- Solución interna

  Es el caso que entonces la restricción presupuestaria se cumple con igualdad.

  De esta forma, en el equilibrio debe ser que:

$$
\begin{aligned}
TMSS_{1j} =& TMSM_{1j} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{x_j}} =& \frac{p_1}{p_j} \\
\boxed{x_j^M = \frac{p_1}{p_j}}
\end{aligned}
$$

  Y evaluando en la restricción presupuestaria:

$$
\begin{aligned}
m =& \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\
\Leftrightarrow m =& p_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j x_j \\
\Leftrightarrow m =& p_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \cancel{p_j} \left(\frac{p_1}{\cancel{p_j}} \right) \\
\Leftrightarrow m =& p_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} p_1 \\
\Leftrightarrow m =& p_1 x_1 + (n-1)p_1 \\
\Leftrightarrow m - (n-1)p_1 =& p_1 x_1 \\
\Leftrightarrow \boxed{\frac{m-(n-1)p_1}{p_1} = x_1^M}
\end{aligned}
$$

- Solución de esquina

  En este caso, no se consumiría nada del bien lineal x_1, es decir:

$$\boxed{x_1^M = 0}$$

  Y para los bienes no lineales, se toman dos bienes cualesquiera j y k y en el óptimo debe ser el caso que:

$$
\begin{aligned}
TMSS_{j,k} =& TMSM_{j,k} \\
\frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_k}} =& \frac{p_j}{p_k} \\
\frac{x_k}{x_j} =& \frac{p_j}{p_k} \\
x_k =& \frac{p_j}{p_k} x_j
\end{aligned}
$$

Y evaluando en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned}
m =& \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\
\Leftrightarrow m =& p_1 \cancelto{0}{x_1} + \sum_{j=2}^{n} p_j x_j \\
\Leftrightarrow m =& \sum_{k=2}^{n} \cancel{p_k} \left(\frac{p_j \cdot x_j}{\cancel{p_k}} \right) \\
\Leftrightarrow m =& \sum_{k=2}^{n} p_j x_j \\
\Leftrightarrow m =& (n-1) p_j x_j \\
\Leftrightarrow & \boxed{\frac{m}{(n-1)p_j} = x_j^M}
\end{aligned}$$

- Encuentre las funciones de demanda hicksianas
  - Solución interna
    Considere la función de demanda marshalliana hallada anteriormente:

$$x_j^M = \frac{p_1}{p_j}$$

Y al evaluar esta función en la función de utilidad original:

$$\begin{aligned}
u(\vec{X}) =& x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i \\
x_1 =& u - \sum_{j=2}^{n} \ln x_j \\
x_1 =& u - \sum_{j=2}^{n} \ln \left(\frac{p_1}{p_j} \right) \\
x_1 =& u - \sum_{j=2}^{n} \left[\ln \left(\frac{p_1}{p_j} \right) \right] \\
x_1 =& u - \sum_{j=2}^{n} [\ln p_1 - \ln p_j] \\
x_1 =& u - \sum_{j=2}^{n} \ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_1^H = u - (n-1) \ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j}$$

  - Solución de esquina
    Dado que es un caso de solución de esquina, no se consumiría nada del bien lineal x_1, es decir:

$$x_1^M = 0$$

Y al evaluar en la función de utilidad original:

$$
\begin{aligned}
u(\vec{X}) &= \cancelto{0}{x_1} + \sum_{k=2}^{n} \ln x_k \\
u(\vec{X}) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{p_j x_j}{p_k}\right) \\
u(\vec{X}) &= \ln \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{p_j x_j}{p_k}\right) \\
u(\vec{X}) &= \ln\left(\frac{(p_j x_j)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n} p_k}\right) \\
e^{u(\vec{X})} &= e^{\ln\left(\frac{(p_j x_j)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n} p_k}\right)} \\
e^{u} &= \frac{(p_j x_j)^{n-1}}{\prod_{k=2}^{n} p_k} \\
e^{u} \cdot \prod_{k=2}^{n} p_k &= (p_j x_j)^{n-1} \\
\left(e^{u} \cdot \prod_{k=2}^{n} p_k\right)^{\frac{1}{n-1}} &= p_j x_j \\
\frac{\left(e^{u} \cdot \prod_{k=2}^{n} p_k\right)^{\frac{1}{n-1}}}{p_j} &= x_j \\
\Leftrightarrow \frac{u \prod_{k=2}^{n} p_k^{\frac{1}{n-1}}}{p_j} &= x_j^H
\end{aligned}
$$

- Compruebe el cumplimiento de la ecuación de Slutsky para el bien no lineal representativo

  Observe que para el caso concreto, al tratarse de una función de utilidad cuasilineal, se sabe que no hay efecto ingreso, y por lo tanto, verificar el cumplimiento de la ecuación de Slutsky se reduce a verificar la igualdad de las derivadas:

$$
\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i} = \frac{\partial x_i^H}{\partial m} - x_i^M \cancelto{0}{\frac{\partial x_i^M}{\partial m}}
$$

  De esta manera, observe que para el caso de la solución interna (es decir, sin considerar el caso de solución de esquina):

Ejemplo 13 [Cobb-Douglas n-bienes]. Recuerde que tras evaluar la función de demanda marshalliana en la función de utilidad original tipo Cobb-Douglas de n-bienes, se obtiene la siguiente función de utilidad indirecta:

$$v = \left[\frac{m}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}\right]^{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j} \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_j}$$

Ahora, si se quiere verificar las igualdades anteriormente descritas, observe que entonces se llega a que:

Ejercicio 37 [Propiedades de teoría del consumidor[3]]. Considere un individuo que consume del bien 1 y del bien 2; este individuo tiene una función de utilidad indirecta dada por:

$$v\left(m, p_1, p_2\right) = \ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1$$

1. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que maximiza la utilidad del individuo dado los precios y el ingreso.

   $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial p_1} &= \frac{1}{p_2}\cdot\frac{-p_2}{p_1^2} = \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{-p_2}{p_1^2} = \frac{-1}{p_1} \\
\frac{\partial V}{\partial m} &= \frac{1}{p_2} \\
X_1^{m,H} &= \frac{p_2}{p_1} \\
\frac{\partial V}{\partial p_2} &= \frac{1}{p_2}\cdot\frac{1}{p_1} - \frac{m}{p_2^2} = \frac{1}{p_2}\left(1 - \frac{m}{p_2}\right) \\
\frac{\partial V}{\partial m} &= \frac{1}{p_2} \\
X_2^M &= \frac{m}{p_2} - 1
\end{aligned}$$

2. Obtenga la función de mínimo gasto.

   $\rightarrow V = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{m}{p_2} - 1$

$$\begin{aligned}
u &= \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + \frac{G^*}{p_2} - 1 \\
G^* &= p_2 u + p_2 - p_2\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)
\end{aligned}$$

3. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que minimiza el gasto del individuo dado los precios y un nivel de utilidad.

   $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G^*}{\partial p_2} &= u + 1 - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - p_2\cdot\frac{\frac{1}{p_2}}{p_1}\cdot\frac{1}{p_1} = u + 1 - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - 1 \\
x_2^H &= u - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)
\end{aligned}$$

[3] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

4. Considerando la ecuación de Slutsky, obtenga el efecto total, efecto sustitución y efecto ingreso de un cambio en el precio del bien 2 sobre la demanda del bien 1.

$\rightarrow \frac{\partial x_1^H}{\partial P_1} = \frac{\partial x_1^m}{\partial P_1} + \frac{\partial x_1^m}{\partial m} \cdot \frac{\partial G^*}{\partial x_1}$

$$\underbrace{\quad}_{E.S}\underbrace{\quad}_{E.T}\underbrace{\quad}_{E.I}$$

$$x_1^{m_1,H} = \frac{p_2}{p_1}$$

ES:

$$\frac{\partial x_1^H}{\partial P_2} = \frac{1}{p_1} \text{ (bienes sustitutos)}$$

E.I:
$\frac{\partial x_1^m}{\partial m} = 0 \Rightarrow$ no hay efecto ingreso
ET:
$\frac{\partial X_1^M}{\partial P_2} = \frac{1}{p_1}$

5. Ayer el individuo tenía un ingreso de 100 y se enfrentaba a un precio del bien 1 igual al precio del bien 2 y este igual a 1 . Hoy, el individuo tiene un ingreso de 150 pero el precio del bien 1 aumento a 2 y el precio del bien 2 disminuyó a 0.5 . ¿El individuo está mejor, peor o igual? Justifique.

$\rightarrow$ Note que $v_0\,(m = 100, p_1 = p_2 = 1) = 99 < v_1 \left(m = 150, p_1 = 2, p_2 = \frac{1}{2}\right) \approx 297,61$
$\therefore$ El individuo está mejor hoy.

6. Obtenga la función de utilidad en términos de los bienes, es decir, $u\,(x_1, x_2)$.

$\rightarrow V = \ln(\underbrace{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}_{x_1^m} + \underbrace{\frac{m}{p_2} - 1}_{x_2^m}$

$$u\,(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$$

Considere la demanda del bien 2 (marshalliana y hicksiana) dada por:

$$x_2^M = \frac{m}{p_2} - 1 \quad x_2^H = u - \ln \frac{p_2}{p_1}$$

La ecuación de Slutsky es:

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} = \frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} + \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H$$

El término del lado izquierdo de la ecuación corresponde al efecto sustitución, corresponde al cambio en x_2 por un cambio en los precios relativos de los bienes. El primer término del lado derecho de la ecuación corresponde al efecto total y el segundo término corresponde al efecto ingreso, que es el cambio en la cantidad del bien x_2 por un cambio en el poder adquisitivo o ingreso real.

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} = -\frac{m}{p_2^2}$$

Si nos interesa el cambio en x_2 sólo por el efecto sustitución entonces lo podemos obtener como:

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} = -\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}}\frac{1}{p_1} = -\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{p_2}$$

Y el cambio por efecto ingreso corresponde a:

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = \frac{1}{p_2}\left[u - \ln\frac{p_2}{p_1}\right]$$

Observe que la suma del efecto sustitución con el efecto ingreso es el efecto total, este sería igual a:

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = -\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_2}\left[u - \ln\frac{p_2}{p_1}\right]$$

Quedando así,

$$\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H = -\frac{1}{p_2}\left[u + 1 - \ln\frac{p_2}{p_1}\right] \tag{1}$$

Observe que habíamos dicho que el efecto total es: $\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2} = -\frac{m}{p_2^2}$. Para que haya coincidencia en ambos resultados se debe de dejar la ecuación 1 en términos del ingreso por lo que se cambia la u por la utilidad indirecta para que la expresión quede en términos de los precios y el ingreso. La utilidad indirecta para este ejercicio correspondía a:

$$v(m, p_1, p_2) = \ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1$$

Así, la ecuación quedaría igual a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H &= -\frac{1}{p_2}\left[\ln\frac{p_2}{p_1} + \frac{m}{p_2} - 1 + 1 - \ln\frac{p_2}{p_1}\right] \\
\frac{\partial x_2^H}{\partial p_2} - \frac{\partial x_2^M}{\partial m} x_2^H &= -\frac{m}{p_2^2}
\end{aligned}$$

Este último resultado del efecto total es equivalente al resultado obtenido cuando se calculó de la forma $\frac{\partial x_2^M}{\partial p_2}$.

Ejercicio 38 [Propiedades de teoría del consumidor[4]]. Considere un individuo que consume del bien 1 y del bien 2; este individuo tiene una función de gasto mínimo dada por:

$$G(\bar{u}, p_1, p_2) = \bar{u}p_1 - \frac{p_1^2}{4p_2}$$

1. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que minimiza el gasto del individuo dado los precios y un nivel de utilidad.

2. Obtenga la función que indique el nivel máximo de utilidad que el individuo puede alcanzar dado su ingreso y los precios de mercado.

3. Obtenga la demanda del bien 1 y el bien 2 que maximiza la utilidad del individuo dado los precios y el ingreso.

4. Considerando la ecuación de Slutsky, obtenga el efecto total, efecto sustitución y efecto ingreso de un cambio en el precio del bien 1 sobre la demanda del bien 2.

[4]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

5. Ayer el individuo tenía un ingreso de 5 colones y se enfrentaba a un precio del bien 1 igual al precio del bien 2 y este igual a 1 . Hoy, el individuo tiene un ingreso de 7 pero el precio del bien 1 aumento a 2 y el precio del bien 2 disminuyó a 0.5 . ¿El individuo está mejor, peor o igual? Justifique.

6. Obtenga la función de utilidad en términos de los bienes; es decir, $u(x_1, x_2)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
&G^*(\bar{u}, p_1, p_2) = \bar{u}p_1 - \frac{p_1^2}{4p_2} \\
&x_1^H = \frac{\partial \theta^*}{\partial p_1} = \bar{u} - \frac{p_1}{2p_2} \\
&x_2^{H,m} = \frac{\partial \theta^*}{\partial p_2} = \frac{p_1^2}{4p_2^2} \\
&m = vp_1 - \frac{p_1^2}{4p_2} \\
&v = \frac{m}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2} \\
&x_1^m = -\frac{\partial v}{\frac{\partial v}{\partial m}} = \frac{\frac{m}{p_1^2} - \frac{1}{4p_2}}{\frac{1}{p_1}} = \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2} \\
&\frac{\partial x_2^H}{\partial p_1} = \frac{\partial x_2^m}{\partial p_1} + \frac{\partial x_2}{\partial m} \cdot \frac{\partial G^*}{\partial p_2} \\
&ES \\
&\frac{\partial x_2^H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2p_2^2} \\
&\frac{\partial x_2^m}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2p_2^2} \\
&\frac{\partial x_2^m}{\partial m} = 0 \\
&v_0(m = 5, p_1 = p_2 = 1) = 5,25 > v_1(m = 7, p_1 = 2, p_2 = 0,5) = 4,5
\end{aligned}
$$

$\therefore$ El individuo estaba mejor ayer.

$$
\begin{aligned}
&V = \frac{m}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2} \\
&\Rightarrow V = \underbrace{\frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}}_{X_1} + \frac{p_1}{4p_2} + \frac{p_1}{4p_2} \\
&\Rightarrow V = \underbrace{\frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}}_{X_1} + \underbrace{\frac{p_1}{2p_2}}_{X_2^{\frac{1}{2}}} \\
&U(X_1, X_2) = X_1 + X_2^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Otra forma de hacer el inciso 6:

$$
x_2^m = \frac{\rho_1^2}{4\rho_2^2} \quad x_1^m = \frac{m}{\rho_1} - \frac{\rho_1}{4\rho_2}
$$

Despejo p_2 en x_2^M y p_1 en x_1^M (o en este caso m en X_1^M porque pi está difícil).

$$
\rho_2 = \frac{\rho_1}{2x_2^{\frac{1}{2}}} \quad m = \rho_1 x_1 + \frac{\rho_1^2}{4\rho_2}
$$

Inyecto ambas ecuaciones en v, cambio v por u y simplifico al máximo.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{m}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{4\rho_2} \\
u &= \frac{\left(\rho_1 x_1 + \frac{\rho_1^2}{4\rho_2}\right)}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{4\frac{\rho_1}{2x_2^{\frac{1}{2}}}} = x_1 + \frac{\rho_1}{4\rho_2} + \frac{1}{2}x_2^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 39 [Propiedades de teoría del consumidor[5]]. La función de utilidad indirecta de un individuo es la siguiente:

$$
v(p_1, p_2, m) = \kappa \frac{m(p_1 + p_2)}{p_1 p_2}
$$

Donde p_i es el precio del bien i, m es su ingreso y $\kappa > 0$.

1. Obtenga las demandas ordinarias para cada uno de los bienes.
2. Obtenga la función de mínimo gasto.
3. Obtenga las demandas compensadas para cada uno de los bienes.
4. Determine el efecto total, ingreso y sustitución de un cambio en p_1 en la cantidad del bien 1.

Solución

$$
\begin{aligned}
V(p_1, p_2, m) &= K \cdot \frac{m(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} = \frac{Km}{p_2} + \frac{Km}{p_1} \\
u &= K\frac{G^*(p_1 + p_2)}{p_1 p_2} \\
G^* &= \frac{u p_1 p_2}{K(p_1 + p_2)} \\
X_1^M &= \frac{+(Km)}{K(p_1 + p_2)} = \frac{Kmp_2}{p_1 p_2} = \frac{mp_2}{p_1(p_1 + p_2)} \\
X_2^M &= \frac{mp_1 + p_2)}{p_2(p_1 + p_2)} \\
\frac{\partial G^*}{\partial p_1} &= \frac{up_2K(p_1 + p_2) - up_1p_2K}{K^2(p_1 + p_2)^2} \\
\frac{\partial G^*}{\partial p_1} &= \frac{up_2K(p_1 + p_2) - up_1p_2K}{K^2(p_1 + p_2)^2} \\
X_1^H &= \frac{up_2^2}{K(p_1 + p_2)^2} \\
X_2^H &= \frac{up_1^2}{K(p_1 + p_2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G^* &= p_1\frac{up_2^2}{k(p_1 + p_2)^2} + p_2\frac{up_1^2}{k(p_1 + p_2)^2} \\
G^* &= \frac{up_1p_2}{k(p_1 + p_2)^2}(p_2 + p_1)
\end{aligned}
$$

[5]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Ecuación Slutsky

$$
\begin{aligned}
&x_1^H\left(p_1,\ldots,p_n,u\right)=x_1^m\left(p_1,\ldots,p_n,G^*\left(p_1,\ldots,p_n,u\right)\right)\\
&\frac{\partial x_1^H}{\partial p_1}=\frac{\partial x_1^m}{\partial p_1}+\frac{\partial x_1^m}{\partial m}\cdot\frac{\partial G^*}{\partial p_1}\\
&\underbrace{\frac{\partial x_1^H}{\partial p_1}}_{E.S}=\underbrace{\frac{\partial x_1^m}{\partial p_1}}_{E.T}+\underbrace{\frac{\partial x_1^m}{\partial m}\cdot X_1^H}_{E.I}
\end{aligned}
$$

Efecto directo
Efecto en x_1 de un ΔP_1

$$
\begin{aligned}
X_1^M&=\frac{mp_2}{p_1\left(p_1+p_2\right)}\wedge\quad X_1^H=\frac{up_2^2}{k\left(p_1+p_2\right)^2}\\
ET&=\frac{-mp_2}{p_1^2\left(p_1+p_2\right)^2}\left(2p_1+p_2\right)\\
ES&=\frac{-up_2^2}{k\left(p_1+p_2\right)^3}\\
EI&=\frac{p_2}{p_1\left(p_1+p_2\right)}\frac{up_2^2}{k\left(p_1+p_2\right)^2}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 40 [Propiedades de teoría del consumidor[6]]. Considere la siguiente función de utilidad indirecta que presenta un individuo

$$
v\left(p_1,\cdots,p_n,m\right)=\left[\frac{m}{n}\right]^n\prod_{i=1}^n p_i^{-1}
$$

1. Obtenga las demandas ordinarias para cada uno de los bienes.

2. Obtenga la función de mínimo gasto.

3. Obtenga las demandas compensadas para cada uno de los bienes.

4. Determine el efecto total, ingreso y sustitución de un cambio en el precio del bien k en la cantidad del bien j.

Solución:

[6] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$
\begin{aligned}
x_j^m &= \frac{-\frac{\partial V}{\partial p_j}}{\frac{\partial V}{\partial m}} + \frac{\left(\frac{m}{n}\right)^n}{n \cdot p_j} \prod_{i=1}^{n} p_i{}^{-1} \left(\frac{m}{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} p_i{}^{-1} \\
V &= m^n \left(\frac{1}{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} p_i^{-1} \\
u &= G^n \left(\frac{1}{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} p_i^{-1} \\
G^{*^n} &= u n^n \prod_{i=1}^{n} p_i \\
G^* &= n u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}} \\
\frac{\partial G^*}{\partial p_j} &= x_j^H = \frac{1}{n} p_j^{-1} n u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}} \\
x_j^H &= p_j^{-1} u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

Ecuación Slutsky

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_i^H}{\partial p_k} &= \frac{\partial x_i^m}{\partial p_k} + \frac{\partial x_j^m}{\partial m} \cdot x_k^H \\
\frac{\partial x_i^H}{\partial p_k} &= \frac{1}{n} p_k^{-1} p_j^{-1} u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}} \\
\frac{\partial x_i^m}{\partial p_k} &= 0 \\
\frac{\partial x_j^m}{\partial m} \cdot x_k^H &= \frac{1}{n} p_j^{-1} p_k^{-1} u^{\frac{1}{n}} \left[\prod_{i=1}^{n} p_i\right]^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

6.6. Agregación de Engel

6.7. Agregación de Cournot

Ejercicio 41 [Cumplimiento de la agregación de Cournot]. Considere la siguiente función de utilidad tipo Cobb-Douglas

$$u = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

donde

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

- Encuentre la función de demanda marshalliana

  Se tiene el problema

$$\max_{\vec{X}} u = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{s.a} \quad m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$
$$\max_{\vec{X}} u = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^{\alpha_i} \cdot x_j^{\alpha_j} \quad \text{s.a} \quad m \geq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Y en el óptimo debe cumplirse que:

$$\frac{\frac{\alpha_j x_j^{\alpha_j}}{x_j} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^{\alpha_i}}{\frac{\alpha_k x_k^{\alpha_k}}{x_k} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} x_i^{\alpha_i}} = \frac{p_j}{p_k}$$
$$\frac{\frac{\alpha_j}{x_j} \cancel{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}}{\frac{\alpha_k}{x_k} \cancel{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}} = \frac{p_j}{p_k}$$
$$\frac{\alpha_j x_k}{\alpha_k x_j} = \frac{p_j}{p_k}$$
$$x_k = \frac{p_j \cdot \alpha_k x_j}{\alpha_j p_k}$$

Y evaluando en la restricción presupuestaria:

$$m = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$
$$\Leftrightarrow m = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{p_j \cdot \alpha_k x_j}{\alpha_j p_k} \right)$$
$$m = \sum_{k=1}^{n} \cancel{p_k} \left(\frac{p_j \cdot \alpha_k x_j}{\alpha_j \cancel{p_k}} \right)$$
$$m = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_j \alpha_k x_j}{\alpha_j}$$
$$m = \frac{p_j x_j}{\alpha_j} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$
$$\frac{\alpha_j m}{p_j \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}}_{1}} = x_j$$
$$\boxed{\frac{\alpha_j m}{p_j} = x_j^M}$$

- Encuentre la función de demanda hicksiana

  Partiendo de la función de demanda marshalliana y evaluando en la función de utilidad original, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
u &= \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_1} \\
u &= \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j m}{p_j}\right)^{\alpha_1} \\
u &= m^{\cancelto{1}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_1}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{v = m \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_1}}$$

Y por otro lado:

$$\boxed{c^* = u \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_1}}$$

Y por el lema de Shephard:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c^*}{\partial p_j} &= x_j^H \\
\frac{\partial}{\partial p_j}\left[u \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_j}\right] &= x_j^H \\
\frac{\partial}{\partial p_j}\left[u \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_j} \cdot \cdots \cdot \left(\frac{\alpha_n}{p_n}\right)^{\alpha_n}\right] &= x_j^H \\
u \cdot \alpha_j \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_j - 1} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} &= x_j^H \\
u \cdot \cancel{\alpha_j} \left(\frac{\alpha_j}{p_j}\right)^{\alpha_j} \left(\frac{p_j}{\cancel{\alpha_j}}\right) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{p_i}\right)^{\alpha_i} &= x_j^H
\end{aligned}
$$

- Verifique el cumplimiento de la agregación de Cournot

Ejercicio 42 [Estática comparativa de la teoría del consumidor[7]]. La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln(x_i - 1) \quad , \quad \forall x_j > 0 \quad , \quad j = 1, \cdots, n$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas de todos los bienes.

   $\rightarrow$ Se tiene que:

[7] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$TMS_{ij} = \frac{P_1}{P_j} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x_j - 1}} = \frac{P_1}{P_j} \Rightarrow x_j^{m,n} = \frac{P_1}{P_j} + 1$$

$$m = p_1 x_1 + (n-1)p_1 + \sum_{j=2}^{n} p_j$$

$$x_1^n = \frac{m}{P_1} - (n-1) - \frac{1}{P_1}\sum_{j=2}^{n} p_j$$

$$u = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln\left(\frac{p_1}{P_j}\right)$$

$$x_1^H = u - (n-1)\ln p_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln p_j$$

2. Determine cómo se distribuye el efecto ingreso y efecto sustitución entre el efecto total de un cambio en el precio del bien 1 sobre ambos tipos de bienes.

   $\rightarrow$ Observe que:

$$X_1^H(\vec{P}, u) = X_1^M\left(\vec{P}, G^*(\bar{u}, \vec{P})\right)$$

$$\frac{X_1^H}{\partial p_1} = \frac{\partial X_1^M}{\partial p_1} + \frac{\partial X_1^M}{\partial m}\frac{\partial G^*}{\partial p_1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^H}{\partial p_1}}_{E.S} = \frac{-(n-1)}{p_1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^M}{\partial p_1}}_{E.T} = \frac{-m}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^2}\sum_{j=2}^{n} p_j = \frac{-1}{p_1}\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_1^M}{\partial m} \cdot X_j^H}_{E.I} = \frac{1}{p_1} \cdot X_1^H$$

Observe que

$$\underbrace{\frac{x_1^H}{\partial p_1}}_{E.S} - \underbrace{\frac{\partial x_1^m}{\partial p_1}}_{E.T} = \frac{-(n-1)}{p_1} + \frac{1}{p_1}\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)$$

$$\frac{x_1^H}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1^m}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1}\underbrace{(\frac{m}{p_1} - (n-1) - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j)}_{x_1} = \frac{1}{p_1} \cdot x_1 = \underbrace{\frac{\partial x_1^m}{\partial m} \cdot x_j^H}_{E \cdot I}$$

$$\frac{E \cdot I}{E \cdot T} = -x_1\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)^{-1} \quad \wedge \quad \frac{ES}{E \cdot T} = (n-1)\left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1}\sum_{j=2}^{n} p_j\right)^{-1}$$

Cruzada:

$$
\begin{aligned}
X_j^{m,H} &= \frac{P_1}{P_j} + 1 \\
\frac{X_j^H}{\partial p_1} &= \frac{\partial X_j^m}{\partial p_1} + \frac{\partial X_j^m}{\partial m} \cdot \frac{\partial 6^*}{\partial p_1} \\
\underbrace{\frac{1}{p_j}}_{ES} &= \underbrace{\frac{1}{p_j}}_{ET} + \underbrace{0}_{EI}
\end{aligned}
$$

$\frac{E \cdot I}{E \cdot T} = 0 \quad \wedge \quad \frac{E \cdot S}{E \cdot T} = 1$

3. Demuestre que se cumple la Agreción de Cournot y la Agregación de Engel.
   $\rightarrow$ A continuación se demuestra el cumplimiento de:

   - Agregación Engel

$$
\begin{aligned}
m = p_1 x_1(\vec{P}, m) + \sum_{j=2}^{n} p_j x_j(\vec{P}, m) \\
1 = \frac{\partial m}{\partial m} = p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial m} + \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial m} \\
1 = p_1 \cdot \frac{1}{\phi_1} + \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot 0
\end{aligned}
$$

   - Agregación Cournot
     Para pi

$$
\begin{aligned}
m = p_1 x_1(\vec{P}, m) + \sum_{j=2}^{n} p_j x_j(\vec{P}, m) \\
\frac{\partial m}{\partial p_1} = 0 = x_1 + p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_1} \\
= x_1 - \left(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1} \sum_{j=2}^{n} p_j \right) + \sum_{j=2}^{n} p_j \cdot \frac{1}{p_j'} \\
0 = x_1 - \underbrace{(\frac{m}{p_1} - \frac{1}{p_1} \sum_{j=2}^{n} p_j - (n-1))}_{x_1}
\end{aligned}
$$

Para p_j

$$
\begin{aligned}
m &= p_1 x_1(\vec{P}, m) + p_j x_j(\vec{P}, m) + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n} p_k x_k(\vec{P}, m) \\
\frac{\partial m}{\partial p_j} &= p_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_j} + x_j + p_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial p_j} \\
&= p_1 \cdot \frac{-1}{p_1} + x_j - p_1 \cdot \frac{p_1}{p_j *} + \sum_{\substack{k=7 \\ k \neq j}}^{n} p_k \cdot 0 \\
0 &= x_j \underbrace{-1 - \frac{p_1}{p_j}}_{-x_j}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 43 [Estática comparativa de la teoría del consumidor[8]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.

   → Se tiene que:

$$\begin{aligned}
&u = \prod_{i=1}^{n} x_i \\
&TMS_{jk} = \frac{P_j}{P_k} \Rightarrow \frac{x_k}{x_i} = \frac{P_j}{P_k} \Rightarrow x_k = \frac{P_j}{P_k} \cdot x_j \\
&m = \sum_{k=1}^{n} p_j x_j \Rightarrow x_j = \frac{m}{nP_j} \\
&x_j(m, \vec{P}) = \frac{m}{nP_j}
\end{aligned}$$

2. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.

   → Y para minimizar el gasto:

$$\begin{aligned}
x_j =& \frac{u^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j} \\
x_j(\bar{u}, \vec{P}) =& \frac{u^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}
\end{aligned}$$

3. Encuentre la elasticidad de sustitución.

   → Se encuentra que:

$$\begin{aligned}
&O = \frac{\Delta v\left(\frac{X_k}{X_j}\right)}{\Delta / TMS_{jk}} = \frac{\partial\left(\frac{X_k}{X_j}\right)}{\partial TMS} \cdot \frac{TMS}{\left(\frac{X_k}{X_j}\right)} = \frac{\partial \ln \frac{X_k}{X_j}}{\partial \ln TMS} \\
&TMS_{jk} = \frac{X_k}{X_j} \\
&\ln TMS_{jk} = \ln \frac{X_k}{X_j} \Rightarrow \sigma = 1
\end{aligned}$$

   σ mide el grado de sustituibilidad entre bienes.

   Nota 13. Observe que para la Cobb-Douglas $\delta \in \mathbb{R}^{+}$porque pertenece a la familia CES.

4. Demuestre que la demanda marshalliana es homogénea de grado cero en precios e ingreso.

   → Si es homogénea de grado 0 en $m \wedge \vec{P}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow& X_j(\lambda m, \lambda \vec{P}) = \lambda^0 \cdot X_j(m, \vec{P}) \\
&X_j(m, \vec{P}) = \frac{m}{nP_j} \\
&X_j(\lambda m, \lambda \vec{P}) = \frac{\lambda m}{n \lambda P_j} = \frac{m}{nP_j} = x_j^m
\end{aligned}$$

[8] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

5. Demuestre que la demanda hicksiana es homogénea de grado cero en precios.

   $\rightarrow$ Si es homogénea de grado 0 en $\vec{P}$

$$\Rightarrow x_j(\bar{u}, \lambda\vec{P}) = \lambda^0 x_j(\bar{u}, \vec{P})$$

$$X_j(\bar{U}, \lambda\vec{P}) = \frac{U^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} (\lambda P_k)^{\frac{1}{n}}}{\lambda P_j} = \frac{U^{\frac{1}{n}} \prod_{i=1}^{n} \lambda^{\frac{1}{n}} P_i}{\lambda P_j} = \frac{\lambda}{\lambda} \frac{U^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j} = \lambda^0 \frac{U^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j} = X_j(\bar{U}, \vec{P})$$

6. Muestre que se cumple la simetría de Hicks.

   $\rightarrow$ Se sabe que: $x_j = \frac{u^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}$

$$x_j = \frac{u^{\frac{1}{n}} \cdot P_i^{\frac{1}{n}} \prod_{ki}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j} \wedge x_i = \frac{u^{\frac{1}{n}} \cdot P_j^{\frac{1}{n}} \prod_{kij}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_i}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial P_i} = \frac{1}{n} \cdot P_i^{-1} \frac{u^{\frac{1}{n}}}{P_j} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}} \quad \wedge \quad \frac{\partial x_i}{\partial P_j} = \frac{\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}} P_j^{-1}}{P_i} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}.$$

7. Dada la ecuación de Slutsky, obtenga el efecto ingreso y el efecto sustitución propia como proporción del efecto total.

   $\rightarrow$

$$X_j(m, \vec{P}) = \frac{m}{nP_j} \wedge \quad X_j(\bar{U}, \vec{P}) = \frac{u^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j} \quad \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{1}{P_j} \cdot X_j \qquad = \frac{-1}{P_j} X_j + \frac{1}{nP_j} X_j$$

$$\frac{\partial X_i^H}{\partial P_j} = \frac{\partial X_j^m}{\partial P_j} + \frac{\partial X_j^m}{\partial m} \cdot X_j^H$$

$$= \frac{1}{P_j}\left(-1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{ES}{ET} = \frac{-1}{n} + 1 = \frac{n-1}{n}$$

$$\frac{EI}{ET} = \frac{-1}{n} \quad v \quad \left(1 - \frac{ES}{ET}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

8. Calcule la descomposición de Slutsky (en términos de elasticidades propias).

   $\rightarrow$

$$x_j(m, \vec{P}) = \frac{m}{nP_j} \quad \wedge \qquad x_j(\bar{U}, \vec{P}) = \frac{u^{\frac{1}{n}} \prod_{k=1}^{n} P_k^{\frac{1}{n}}}{P_j}$$

$$\eta_{jj}^m = \frac{-1}{P_j} \cdot x_j \frac{P_1}{x_j} \qquad \eta_{jj}^H = \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{1}{P_j} \cdot x_j \cdot \frac{P_1}{x_j}$$

$$\eta_{ij}^m = -1 \qquad \eta_{jj}^H = \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

$$\prod_{ij}^{H} = n_{jj}^m + \frac{P_1 X_i}{m} \cdot n_{jm} \qquad \eta_{jm}^m = \frac{m}{np_j} \cdot \frac{1}{x_j}$$

$$\eta_{jm}^m = 1$$

$$\eta_{ij}^H = \eta_{jj}^m + \frac{P_1 x_i}{m} \cdot \eta_{jm}$$

$$\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1 + \underbrace{\frac{P_j x_j}{m}}$$

$$\frac{1}{n} - 1 = -1 + \frac{P_j}{m} \cdot \frac{m}{my_j} = -1 + \frac{1}{n}$$

9. Determine la veracidad de la siguiente proposición y justifique su respuesta: Se puede afirmar que la demanda hicksiana por el bien i es más elástica que la demanda marshalliana por el bien i.

   $\rightarrow$ Note que los bienes son bienes ordinarios porque $n_{ii} < 0$.
   Observe que $\eta_{im} > 0 \forall i$ por lo que el bien i es un bien normal por lo que

$$\underbrace{\eta_{ii}^H}_{-} = \underbrace{\eta_{ii}^M}_{-} + \underbrace{\frac{P_i x_i}{m} \eta_{im}}_{+} \Rightarrow \left|\eta_{ii}^H\right| < \left|\eta_{ii}^M\right| \text{ dado que } n_{ii}^H, \eta_{ii}^M < 0.$$

Por lo tanto, la proposición es falsa.
Por ejemplo, suponga $\frac{P_i x_i}{m}\eta_{im} = 1 \wedge \eta_{ii}^m = -5$
Eso implicaría que $n_{ii}^H = -4$ por lo que n_{ii}^H es más inelástica. (recuerde que para comparar elasticidades se toma el valor absoluto $|n_{ii}^m| > n_{ii}^H$).

10. Muestre que se cumple la agregación de Engel.

    → Vea que:

$$I = \sum_{j=1}^{n} \frac{P_j x_j}{m} \cdot n_{jm}$$
$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_j x_j}{m} \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_1}{m} \cdot \frac{P_1}{n \cdot v} = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

11. Muestre que se cumple la agregación de Cournot.

    → Observe que:

$$x_j(m, \vec{P}) = \frac{m}{nP_j}$$
$$m = P_j x_j + \sum_{i \neq j}^{n} P_i x_i$$
$$\frac{\partial m}{\partial P_j} = 0 = x_j + P_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial P_j} + \sum_{i \neq j}^{n} P_j \cdot \frac{\partial x^0}{\partial A_j}$$
$$x_j + P_j \frac{-1}{P_j} \cdot x_j = 0$$

Ejercicio 44 [Estática comparativa de la teoría del consumidor[9]]. Considere las preferencias por los bienes x_i de un consumidor que tiene una restricción presupuestaria.

$$U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

1. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que maximicen la utilidad dado el nivel de ingreso del individuo y precios de mercado.

   → Las funciones son:

$$TMS_{jk} = \frac{\frac{1}{x_j}}{\frac{1}{x_k}} = \frac{x_k}{x_j} = \frac{P_j}{P_k}$$
$$m = \sum_{j=1}^{n} P_k x_k \Rightarrow x_k = \frac{m}{nP_k}$$
$$u = \sum_{k=1}^{n} \ln \left[\frac{P_j x_j}{P_k}\right]$$

2. Encuentre las demandas para cada uno de los bienes tal que minimicen el gasto dado el nivel de utilidad que el individuo desea alcanzar y los precios de mercado.

   → Las funciones de demanda son:

[9]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$
\begin{aligned}
u &= n \ln P_j + n \ln x_j - \sum_{k=1}^{n} \ln P_k \\
\ln x_j &= \frac{u}{n} - \ln P_j + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln P_k \\
x_j &= \frac{e^{\frac{u}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln P_k}}{e^{\ln P_j}}
\end{aligned}
$$

3. Calcule la descomposición de Slutsky (en términos de elasticidades propias).

$\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
n_{jj}^{H} &= n_{jj}^{m} + \frac{P_j x_j}{m} \cdot n_{jm} \\
x_j &= \frac{m}{nP_j} \\
n_{jj}^{M} &= \frac{-1}{P_j} \cdot x_j \cdot \frac{P_j}{x_j} = -1 \\
n_{jm} &= 1 \\
\Rightarrow n_{jj}^{H} &= -1 + \frac{P_j x_j}{m}
\end{aligned}
$$

4. Calcule la descomposición de Slutsky (en términos de elasticidades cruzadas).

$$
\begin{aligned}
n_{jk}^{H} &= n_{jk}^{M} + \frac{P_k X_k}{m} \cdot n_{jm} \\
n_{jk}^{H} &= 0 + \frac{P_k X_k}{m} \\
n_{jk}^{H} &= \frac{P_k X_k}{m}
\end{aligned}
$$

5. Muestre que se cumple la agregación de Engel. Además, interpréte este resultado.

$$
\begin{aligned}
x_k &= \frac{m}{nP_k} \\
1 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{P_k x_j}{m} \eta_{jm} \\
\eta_{jm} &= \frac{\partial x_j}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_j} = \frac{1}{nP_j} \cdot \frac{m}{x_j} = 1 \\
1 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{P_1}{m} \cdot \frac{n}{nP_j} \\
1 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

6. Muestre que se cumple la agregación de Cournot. Además, interpréte este resultado.

$\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&0 = x_j + P_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial P_j} + \sum_{i \neq j}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial P_j} \\
&x_i = \frac{m}{nP_i} \\
&\frac{\partial x_i}{\partial P_j} = 0 \\
&\frac{\partial x_i}{\partial P_j} = \frac{-1}{P_j} \cdot x_j \\
&0 = X_j + P_j \cdot \frac{X_j}{P_j} = 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 45 [Estática comparativa de la teoría del consumidor[10]]. La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.

   $\rightarrow$

   $$\text{TMS } = \frac{uM_j}{uM_k} = \frac{\alpha_j x_j^{-1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}}{\alpha_k x_k^{-1} \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}} = \frac{p_j}{p_k} \Rightarrow \frac{x_k}{x_j} = \frac{\alpha_k p_j}{\alpha_j p_k} \qquad \text{(cond opt.)}$$

   Al inyectar la condición de optimalidad en la restricción presupuestaria se obtiene la demanda marshalliana:

   $$m = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k p_j x_j}{\alpha_j} \Rightarrow x_j = \frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{k=1}^{j} \alpha_k}$$

   Al inyectar la condición de optimalidad en la función de utilidad se obtiene la demanda hicksiana

   $$u = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k \rho_j}{\alpha_j \rho_k} x_j \right)^{\alpha_k} \Rightarrow u = \left(\frac{\rho_j x_j}{\alpha_j} \right)^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k} \right)^{\alpha_k} \Rightarrow x_j = \frac{\alpha_j u^{\frac{1}{\sum_{\alpha} \alpha_k}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\rho_k}{\alpha_k} \right)^{\frac{\alpha_k}{\sum_{k=1} \alpha_k}}}{\rho_j}$$

2. Demuestre que se cumple la agregación de Engel y la Agregación de Cournot.

   $\rightarrow$ A continuación se demuestra el cumplimiento de :

   - Agregación Engel

     $$
     \begin{aligned}
     &\frac{\partial m}{\partial m} = 1 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j(m, p_1, \cdots, p_n)}{\partial m} \\
     &x_j = \frac{\alpha_j m}{p_j \sum_{k=1}^{m} \alpha_k} \\
     &\frac{\partial x_j}{\partial m} = \frac{\alpha_j}{p_j \sum_{k=1}^{\alpha} \alpha_k} = \frac{1}{m} x_j \\
     &1 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{1}{m} x_j = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \frac{1}{m} \cdot m = 1
     \end{aligned}
     $$

[10] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

En elasticidades sería:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j (m, p_1, \cdots, p_n)}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_j} \cdot \frac{x_i}{m}$$
$$\Rightarrow 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j x_j}{m} \cdot n_{jm}$$

$$n_{jm} = \frac{\partial x_j}{\partial m} \cdot \frac{m}{x_j} = \frac{\partial \ln x_j}{\partial \ln m} = 1$$
$$\Rightarrow 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j x_j}{m} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = \frac{1}{m} \cdot m = 1$$

- Agregación Cournot

$$m = p_1 x_1 + \ldots + p_j x_j + \ldots + p_n x_n$$
$$\frac{\partial m}{\partial p_j} = 0 = p_i \frac{\partial x_1}{\partial p_j} + \ldots + x_j + p_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \ldots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial p_j}$$
$$0 = x_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot p_i$$
$$0 = x_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot p_i$$
$$0 = x_j + \frac{\partial x_j}{\partial p_j} \cdot p_j + \sum_{i \neq j}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \cdot p_i$$

$$X_i = \frac{\alpha_i m}{P_i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Cuando $i \neq j$: $\frac{\partial x_i}{\partial \rho_j} = 0$
Cuando $i = j$: $\frac{\partial x_j}{\partial p_j} = -\frac{\alpha_j m}{p_j^2 \sum_{k=1}^{m} \alpha_k} = \frac{-1}{p_j} \cdot x_j$
Entonces:

$$O = x_j + \frac{\partial x_j}{\partial p_j} \cdot p_j + \sum_{i \neq j}^{n} \frac{\partial x_i'}{\partial p_j} p_i'$$
$$O = x_j + \frac{-1}{p_j} \cdot x_j \cdot p_j = 0$$

En elasticidades sería:

$$\Rightarrow 0 = x_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_i$$
$$\Rightarrow 0 = x_j \frac{p_j}{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_i \cdot \frac{p_j}{m} \frac{x_i}{x_i}$$
$$\Rightarrow 0 = x_j \frac{p_j}{m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i x_i}{m} \cdot \eta_{ij}$$
$$0 = x_j \cdot \frac{p_j}{m} + \frac{p_j x_j}{m} \eta_{jj} + \sum_{i \neq j}^{n} \frac{p_i x_i}{m} \cdot \eta_{ij}$$

$$X_i = \frac{\alpha_i m}{Pi \sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\ln x_i &= \ln \alpha_i + \ln m - \ln p_i - \ln \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \\
n_{ij} &= \frac{\partial \ln x_i}{\partial \ln p_j} = 0 \\
n_{jj} &= \frac{\partial \ln x_j}{\partial \ln p_j} = -1
\end{aligned}$$

Así,

$$0 = x_j \cdot \frac{\rho_j}{m} + \frac{\rho_j x_j}{m} - 1 = 0$$

Ejercicio 46 [Estática comparativa de la teoría del consumidor[11]]. La función de utilidad de un individuo está en función de n bienes según la siguiente ecuación:

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_i)$$

1. Encuentre las demandas marshallianas y hicksianas para todos los bienes.

   $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
TMS_j k &= \frac{\prod_{i \neq j} (x_i - \alpha_i)}{\prod_{i \neq k} (x_i - \alpha_i)} = \frac{x_k - \alpha_k}{x_j - \alpha_j} = p_{\frac{1}{p_k}} \Rightarrow x_k = \frac{p_j}{p_k} (x_j - \alpha_j) + \alpha_k \\
m &= \sum_{k=1}^{n} \left[p_j (x_j - \alpha_j) + \alpha_k p_k \right] \\
m &= nP_j x_j - np_j \alpha_j + \sum_k \alpha_k p_k \\
x_j^n &= \frac{m + np_j \alpha_j - \sum_k \alpha_k p_k}{np_j} \\
U &= \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{p_j}{p_k} (x_j - \alpha_j) \right] \\
U &= p_j^n (x_j - \alpha_j)^n \prod_{k=1}^{n} p_k^{-1} \Rightarrow U^{\frac{1}{n}} \cdot \prod_{k=1}^{n} p_k^{\frac{1}{n}} = p_j (x_j - \alpha_j) \\
x_j^H &= \frac{U^{\frac{1}{n}} \cdot \prod_{k=1}^{n} p_k^{\frac{1}{n}}}{p_j} + \alpha_j
\end{aligned}$$

2. Demuestre que se cumple la agregación de Engel y la Agregación de Cournot.

[11] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
x_j^m &= \frac{m}{np_j} - \frac{\sum p_i\theta_i}{np_j} + \theta_j \\
x_j^m &= \frac{m}{np_j} - \frac{p_j\theta_j}{np_j} - \frac{\sum p_i\theta_i}{np_j} + \theta_j \\
1 &= \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^m}{\partial m} \\
\frac{\partial x_i^m}{\partial m} &= \frac{1}{np_j} \\
\Rightarrow 1 &= \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{1}{np_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = 1
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
m &= p_j x_j + \sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i x_i \\
0 &= x_j + p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \\
\frac{\partial x_j}{\partial p_j} &= -\frac{m}{np_j}^2 + \frac{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i\theta_i}{np_j^2} \\
x_i &= \frac{m}{np_i} - \frac{p_i\theta_i}{np_i} - \frac{\sum_{\substack{k\neq i\\ k=1}}^{n} p_k\theta_k}{np_i} + \theta_j \\
\frac{\partial x_i}{\partial p_j} &= \frac{\theta_j}{np_i} \\
0 &= x_j + p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_j} + \sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \\
0 &= x_j - \frac{m}{nP_j} + \frac{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i\theta_i}{nP_j} + \sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i \frac{\theta_j}{np_i} \\
0 &= x_j - \frac{m}{nP_j} + \frac{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i\theta_i}{nP_j} + \frac{n-1}{n}\theta_j
\end{aligned}
$$

La demanda era: $X_j = \frac{m}{nP_j} - \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i\theta_i}{np_j} + \theta_j$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{m}{np_j} - \frac{\sum p_i\theta_i}{np_j} + \theta_j - \frac{np_j}{n\mathbb{F}_j} + \frac{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i\theta_i}{nP_j} + \frac{n-1}{n}\theta_j \\
0 &= -\frac{\sum p_i\theta_i}{np_j} + \theta_j + \frac{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i\theta_i}{nP_j} + \frac{n-1}{n}\theta_j \\
&= -\frac{p_j\theta_j}{n\phi_j} - \frac{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_j\theta_i}{np_j} + \theta_j + \frac{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{n} p_i\theta_i}{nP_j} - \frac{n-1}{n}\theta_j \\
&= \frac{-\theta_j}{n} + \theta_j - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\theta_j \\
&= \frac{-\theta_j}{n} + \theta_j - \phi_j + \frac{1}{n}\theta_j = 0
\end{aligned}
$$

Parte II

Teoría de la Empresa

Capítulo 7

Comportamiento competitivo del productor

Las empresas están caracterizadas por tener a su disposición tecnologías de producción exógenamente definidas que les permite convertir insumos (*input*) en productos (*output*). En particular, las personas productoras competitivas se caracterizan por considerar que los precios que pagan por los insumos así como los precios que reciben por sus productos, están dados, y a partir de allí, toma una decisión sobre cuál plan de producción adoptar (una combinación que tecnológicamente de insumos que para producir una determinada cantidad de productos que sea asequible) para así <u>maximizar beneficios</u>. Es decir, que a diferencia de la teoría del consumidor, donde se asumía que la utilidad del agente dependía de elementos meramente subjetivos como los gustos y preferencias, en la producción se parte de un objetivo muy particular.
Nótese que se crea una especie de armonía teórica entre el comportamiento del consumidor y el comportamiento de las empresas. El agente que tiene una cierta utilidad que desea maximizar sujeta a su restricción presupuestaria, tiene un cierto ingreso. Dicho ingreso debe provenir de algún lado. Si el agente es un consumidor, debe ser que debe tener un ingreso del cual disponer para su consumo, por lo que suponemos que es a su vez un trabajador o inclusive un empresario.
Así, dadas sus preferencias y gustos subjetivos, deberá asegurarse el nivel de ingreso necesario para poder satisfacer dichos gustos. Por lo tanto, es de esperar que en su rol de empresario o trabajador querrá asegurarse el mayor ingreso posible.

Ejemplo 14 [Una aplicación de la teoría del consumidor]. Así, suponga un agente que tiene una utilidad u que depende de:

- Los bienes de consumo C
- El tiempo (de ocio)

Para empezar, suponga una economía de intercambio donde el agente puede intercambiar tiempo a cambio de bienes de consumo. El "precio"de los bienes de consumo es 1 y una hora de trabajo vale w unidades de consumo.
El agente dispone de un cierto tiempo (un día, 24 horas, etc.) que puede ser distribuido entre ocio (l) o trabajo (N^s) que sería el tiempo que intercambia al mercado. Por tanto, el agente tiene una restricción"temporal, que sería:

$$l + h = N^s$$

Lo cual señala que el tiempo del agente solamente se puede dedicar a trabajar o al ocio. Si el agente dedica tiempo al ocio, no gana ningún ingreso, pero si trabaja, recibe wN^s unidades de consumo (porque el precio del bien de consumo es 1 y no p_c por ejemplo). Luego, si el agente es empresario, también recibiría π unidades de consumo porque son los beneficios (ingresos menos gastos) que genera la empresa.
Así, la restricción presupuestaria de este agente sería:

$$C = wN^s + \pi$$

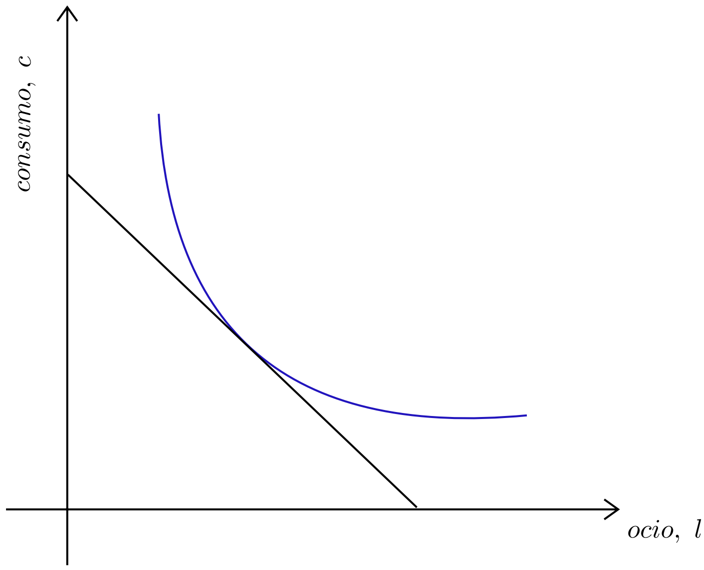
Lo cual podría replantearse como:

$$\begin{aligned} C &= wN^s + \pi \\ \Leftrightarrow C &= w(h - l) + \pi \\ \Leftrightarrow C + wl &= wh + pi \end{aligned}$$

Esta última reformulación de la restricción permite observar de manera explícita la igualdad entre ingresos y gastos.
Por lo tanto, se tendría un problema como el siguiente:

$$\max_{c,l} u(c,l) \quad s.t \quad C = w(h-l) + \pi$$

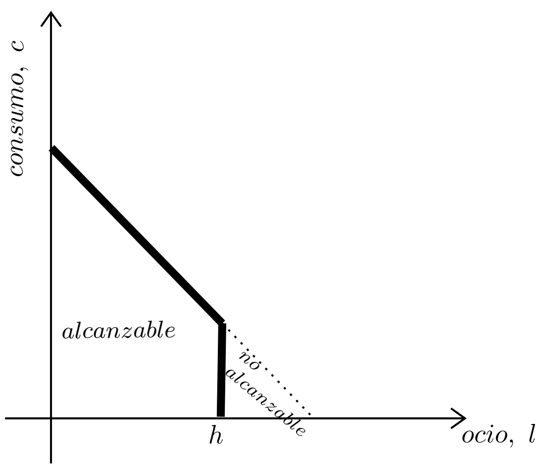
Ahora, si se asume que las preferencias son racionales y que además es creciente tanto para el consumo como para el ocio, es convexa y dos veces diferenciable, gráficamente el problema se ve algo así:



Sin embargo, si bien es cierto que matemáticamente sería posible destinar todo el tiempo disponible h al ocio, esto no es muy realista, puesto que nuestro agente no tendría ingreso alguno para sus bienes de consumo. Por tanto, además de la restricción presupuestaria, suele imponerse una restricción temporal adicional, según la cual se limita el tiempo del ocio. Así, el problema se replantea de la siguiente manera:

$$\max_{c,l} u(c,l) \quad s.t \quad \begin{cases} C = w(h-l) + \pi \\ l \leq h \end{cases}$$

Y la nueva restricción presupuestaria se vería así:



Y el lagrangiano asociado al problema sería:

$$\mathcal{L} = u(c,l) - \lambda \left[C - w(h-l) - \pi\right] + \mu(h-l)$$

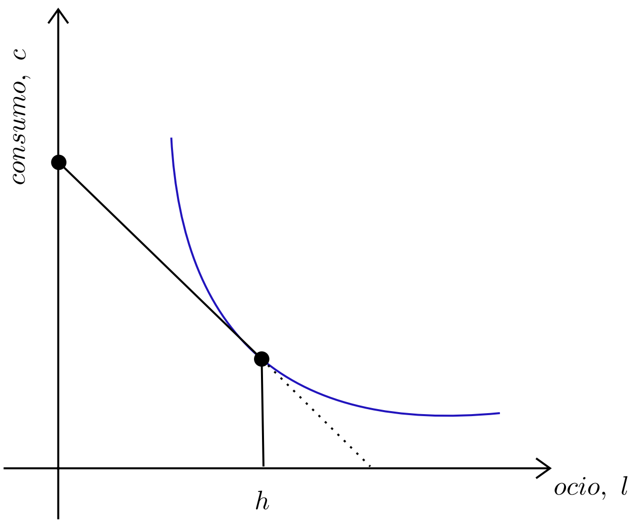
Para el caso particular, no interesa estudiar los casos donde el consumo o el ocio sean iguales a cero (soluciones de esquina). Las condiciones de primer orden serían:

$$\begin{aligned} UMg_c - \lambda &= 0 \\ UMg_l - -\mu &= 0 \\ C - w(h-l) - \pi &= 0 \\ \mu &\geq 0 \\ h - l &\geq 0 \end{aligned}$$

Y la condición de holgura sería:

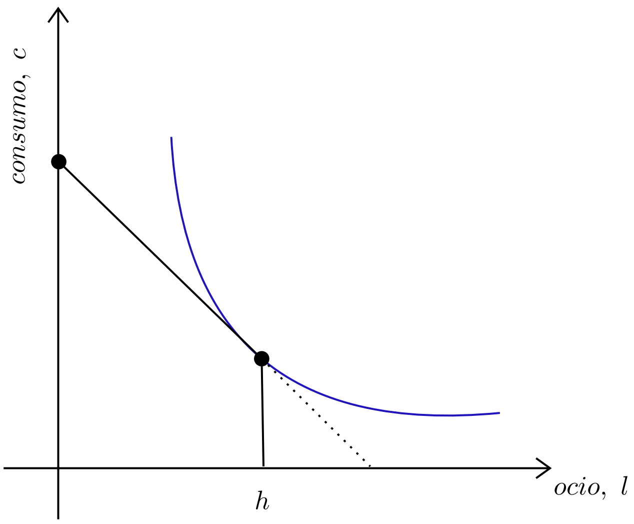
$$\mu(h-l) = 0$$

A partir de aquí, se estudian los posibles casos.
Caso 1: $l = h \wedge \mu = 0$
En este caso, dado que el tiempo total h es igual al ocio l, sería que el consumidor no trabaja. De esta manera, gráficamente se tendría lo siguiente:



Nótese que dado que $\mu = 0$ el precio sombra de la restricción con inequidad es nulo, por lo tanto, la restricción adicional no es vinculante para el consumidor, dado que, aunque no tuviera esa restricción adicional, no querría más ocio.

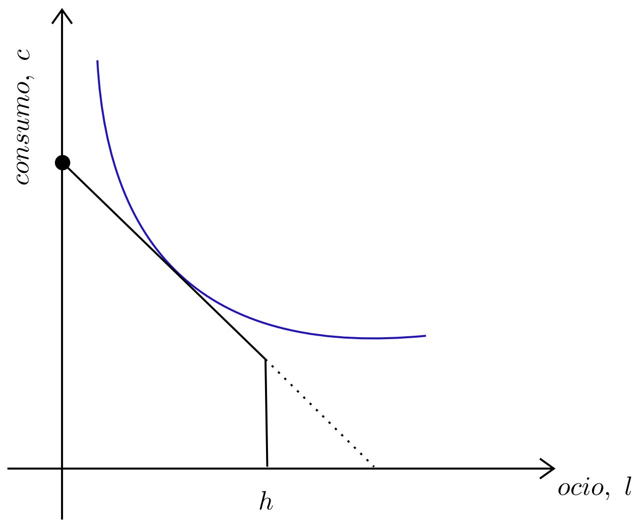
Caso 2: $l = h \wedge \mu > 0$
Al igual que el caso anterior, dado que el tiempo total h es igual al ocio l, sería que el consumidor no trabaja. De esta manera, gráficamente se tendría lo siguiente:



Entonces, ¿cuál sería la diferencia con respecto al caso anterior? $\rightarrow$ Note que ahora $\mu > 0$ por lo que el precio sombra de la restricción sobre el ocio es positiva, lo cual implica que dicha restricción sí es vinculante, y, de no existir dicha imposición, el agente querría tener más ocio.

Caso 3: $l < h \wedge \mu = 0$

Al igual que el caso anterior, dado que el tiempo total h es igual al ocio l, sería que el consumidor no trabaja. De esta manera, gráficamente se tendría lo siguiente:



Finalmente, queda por considerar el caso de solución interna, donde se consume antes de la restricción interpuesta sobre el ocio y donde el precio sombra sobre la restricción con inequidad es igual a cero y por lo tanto no es vinculante.

De esta manera, a partir de la teoría del consumidor, se ha logrado maximizar la oferta de trabajo del individuo representativo. Este avance representa el punto de partida de los microfundamentos en la teoría macroeconómica, sin embargo, de momento, lo que sigue ver es ahora el comportamiento de las empresas productoras.

Dichas empresas pueden producir bienes y servicios, sin embargo, para hacer esto requieren de insumos para poder producir (tales como el capital o el trabajo) y dichos insumos son convertidos en otros bienes o servicios mediante una función de producción.

A continuación entonces se plantean algunos de los supuestos básicos para entender la teoría de la producción o teoría de la empresa.

1. Las empresas son tomadoras de precios. Este supuesto de la empresa competitiva aplica tanto a los mercados de cada uno de los insumos que emplea en su proceso de producción así como para el mercado de los productos que produce.

2. La tecnología es dada exógenamente.

3. La empresa maximiza sus beneficios.

Capítulo 8

La función de producción

La producción es el proceso de transformar insumos (*input*) en producto o producción (*output*). La tecnología actual determinar y predispone las posibilidades de producción en una economía mediante la combinación de insumos en productos. La manera más convencional en que se suele representar dichas restricciones tecnológicas es mediante un conjunto de producción de la forma $Y \subset \mathbb{R}^m$, donde cada vector $y = (y_1, y_2..., y_m) \in Y$ es un plan de producción cuyos componentes o entradas representan las cantidades de varios insumos y productos.

La tecnología a disposición de las empresas para producir se suele representar en términos de una función de producción. Cuando sólamente se produce un único producto o output, por medio de varios insumos o input, la cantidad total producida suele representarse mediante y o por q, mientras que el vector de insumos empleados sería $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde cada x_j representa la cantidad empleada del insumo x_j. Debe ser que el vector de insumos así como la cantidad total producida, sean no negativos. Entonces: una función de producción es simplemente la descripción para cada vector de insumos, la cantidad total de output que puede ser producida.

8.1. Propiedades de la función de producción

Los supuestos que se hacen sobre la función de producción son los siguientes:

- Continua: la continuidad permite tener la seguridad de que pequeños cambios en el vector de insumos conllevan ligeros cambios en la cantidad total de producción.
- Estrictamente creciente: este supuesto es requerido para que al emplear más insumo resulte necesariamente en más producción.
- Estrictamente cuasicóncava en $\mathbb{R}^n_+$. Este supuesto es asumido porque la cuasiconcavidad implica la presencia de un cierto grado de complementariedad entre los factores para la producción.
- f(0) = 0. Esta condición símplemente indica que para poder producir una cantidad positiva de output, hace falta, como mínimo, una cantidad positiva de algún insumo(s).

Cuando la función de producción es diferenciable, la derivada parcial $\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_j}$ indica el producto marginal o productividad marginal del insumo o factor de producción x_j, y esto indica la tasa a la cual la producción cambia aunte un cambio en la cantidad empleada del insumo x_j. Si la función de producción es estrictamente creciente (tal y como en efecto se está suponiendo) debe ser que la productividad marginal de todos los insumos o factores de producción ha de ser positiva.

8.2. Un caso de dos variables

Para el caso de una función de producción dependiente únicamente de dos insumos, se tiene:

$$q = f(K, L) \tag{8.1}$$

En este caso particular, se puede asumir que los insumos son un stock capital (K) y un flujo de trabajo (L) empleado y q es la cantidad total producida.

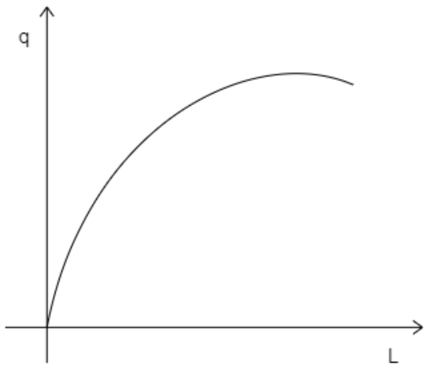


Figura 8.1: Función de producción creciente en el factor de producción trabajo

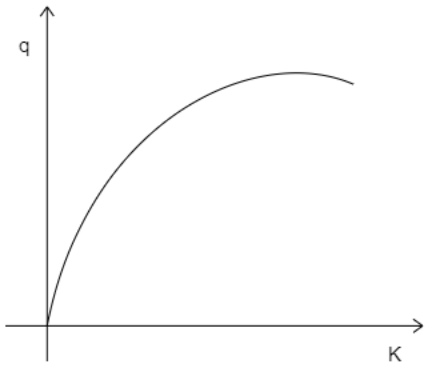


Figura 8.2: Función de producción creciente en el factor de producción capital

8.3. Conjuntos de producción

En general, suponga que en una economía existen n mercancías. Un plan de producción es un vectos $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}$ donde un producto (*output*) donde cada $y_k > 0$. Las posibilidades de producción de la empresa son descritas mediante un conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$, donde cualquier $y \in Y$ es un plan de producción asequible. Se suelen hacer dos grandes supuestos básicos sobre los conjuntos de producción en general:

- El conjunto de producción Y es no-vacío. De lo contrario, pues no habría conjunto que estudiar.
- El conjunto de producción Y es cerrado. Esto permitirá que sea más probable que exista un plan óptimo de producción.

Las propiedades más sustanciales e importantes sobre los conjuntos de producción **podrían** (ojo: no necesariamente será así!) ser los siguientes:

1. Libre disposición. El conjunto de producción satisface la libre disposición si $y \in Y$ implica que $y' \in Y$ para cada $y' \leq y$.
2. Condición de cierre. El conjunto de producción Y cumple con la propiedad de la condición de cierre si $0 \in Y$; es decir, si la empresa tiene la posibilidad de no utilizar insumos o recursos y no producir nada.
3. Retornos no crecientes a escala: El conjunto de producción Y tiene retornos no crecientes a escala si $y \in Y$ implica que $\alpha y \in Y \forall 0 \leq \alpha \leq 1$.
4. Retornos no decrecientes a escala. El conjunto de producción Y tiene rendimientos no decrecientes a escala si $y \in Y$ implica que $\alpha y \in Y \forall \alpha \geq 1$.
5. Retornos constantes a escala. El conjunto de producción Y tiene rendimientos constantes a escala si $y \in Y$ implica que $\alpha y \in Y \forall \alpha \geq 0$.

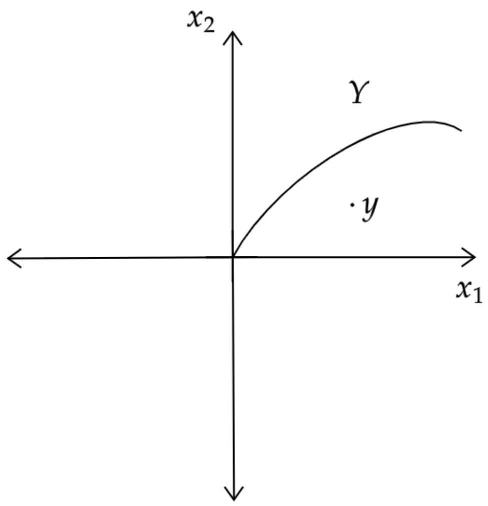


Figura 8.3: Un conjunto de producción

Definición 15. Rendimientos constantes a escala: sea $k \in \mathbb{N}$, la función $g : \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado m en $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$ si y solo si $g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m(x, y, z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad$ y $\quad z \in \mathbb{R}^k$.

$$m\lambda^{m-1}g(x, y, z) = g_x x + g_y y$$
$$m = 1$$
$$g(x, y, z) = g_x x + g_y y$$

6. Convexidad. Esta condición implica rendimientos no crecientes en la especialización"; es decir: que si existen dos planes de producción asequibles a la vez, que sean extremos entre sí, una combinación de estos dos planes también será asequible. Adicionalmente, si $0 \in Y$, entonces la convexidad implica retornos no crecientes a escala.

Una manera de representar los conjuntos de producción es mediante la función de producción $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en donde $T(y) \leq 0$ implica asequibilidad y $T(y) > 0$ implica que y es inasequible. La función de producción se puede pensar como una manera conveniente de representar un conjunto de producción. El conjunto de puntos "fronterizos" $\{y \in \mathbb{R}^n : T(y) = 0\}$ se conoce como la frontera de posibilidades de producción.

Cuando la función de producción es diferenciable, la tasa marginal de transformación o tasa marginal de sustitución técnica entre dos insumos, por ejemplo k, l se define:

$$TMST_{k,l} = \frac{\frac{\partial T(y)}{\partial y_l}}{\frac{\partial T(y)}{\partial y_k}}$$

Nota 14. Tratando de explicar el crecimiento de la economía de los países, Robert Solow (1956) propuso que la acumulación del capital de una economía seguía el siguiente comportamiento:

$$K_{t+1} - K_t = \underbrace{sF(K_t, E_t L_t)}_{S} - \delta K_t$$

Así, la diferencia entre el capital del período $t+1$ y el período t es igual a la inversión neta, y esta sería igual al ahorro - capital depreciado en el período t.
Nótese que el ahorro S es igual a una proporción constante s multiplicada por la función de producción.
En particular, esta función de producción depende del capital K_t y el trabajo multiplicado por la tecnología $E_t L_t$. Uno de los supuestos de la función de producción es que tiene rendimientos constantes a escala.
Así, viendo que la tecnología exhibía un comportamiento en el tiempo $E_{t+1} = (1 + g)E_t$ y la población en el tiempo $L_{t+1} = (1 + n)L_t$, para saber el impacto que tenía la acumulación del capital en el crecimiento de la economía, se querría dejar la función de producción en términos de unidades efectivas de trabajo, para así poder aislar efectivamente los efectos del capital.

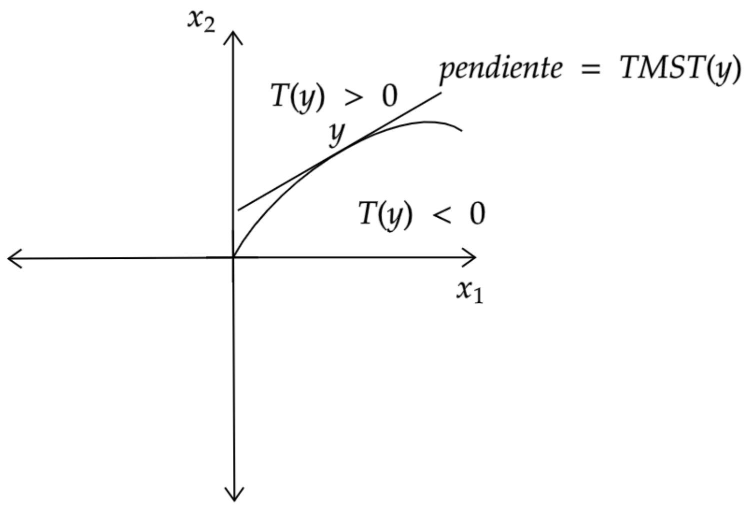


Figura 8.4: Conjuntos de producción asequibles e inasequibles y la tasa marginal de sustitución técnica

Por tanto, sabiendo que hay rendimientos constantes, la ecuación básica de acumulación de capital se podría replantear de la siguiente forma:

$$\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_tL_t} - \frac{K_t}{A_tL_t} = \frac{sF(K_t, A_tL_t)}{A_tL_t} - \frac{\delta K_t}{A_tL_t}$$

$$\text{*Sea } k_t^E = \frac{K_t}{A_tL_t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_tL_t} - k_t^E = sF\left(\frac{K_t}{A_tL_t}, \frac{A_tL_t}{A_tL_t}\right) - \delta k_t$$

$$*\lambda F(x,y,z) = F(\lambda x, \lambda y, z)$$

$$\boxed{A_{t+1} = (1+g)A_t}$$

$$\boxed{L_{t+1} = (1+n)L_t}$$

$$\Rightarrow A_{t+1}L_{t+1} = (1+g)(1+n)A_tL_t \Leftrightarrow \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} = (1+g)(1+n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}L_{t+1}} \cdot \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_tL_t} - k_t^E = sF(k_t^E, 1) - \delta k_t^E$$

$$\Leftrightarrow k_{t+1}^E(1+g)(1+n) - k_t^E = sf(k_t^E) - \delta k_t^E \qquad *\text{Sea } (1+z) = (1+n)(1+g)$$

$$\Leftrightarrow k_{t+1}^E(1+z) - k_t^E - zk_t^E = sf(k_t^E) - \delta k_t^E - zk_t^E \Rightarrow (1+z)(k_{t+1} - k_t) = sf(k_t^E) - (z+\delta)k_t^E$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \underbrace{k_{t+1}^E - k_t^E}_{\substack{\text{inversion}\\ \text{neta}}} = \frac{1}{1+z}\underbrace{\left[sf(k_t^E) - \underbrace{(z+\delta)k_t^E}_{\substack{\text{costos}\\ \text{reposición}}}\right]}_{\substack{\text{ahorro}\\ \text{neto}}}}$$

$zk_t^E \rightarrow$ lo que invierta para mantener el mismo nivel de capital por unidad de trabajo. Es el costo de mantener el mismo promedio de capital.

$\delta k_t^E \rightarrow$ costo de depreciación de capital.

$k_{t+1}^E - k_t^E \rightarrow$ inversión neta.

8.4. La complementariedad, la anticomplementariedad y la productividad media

Definición 16 [Producto marginal]. Defínase el producto marginal como el cambio adicional en la cantidad total producida ante un cambio en la cantidad empleada de un insumo z_j, de manera que:

$$PMg_{z_j} = \frac{\partial f(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_j} \tag{8.2}$$

Considere una función de producción $f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

Definición 17 [Factores complementarios]. Dícese que un factor de la producción es complementario si:

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} > 0 \tag{8.3}$$

Definición 18 [Factores anticomplementarios]. Dícese que un factor de la producción es anticomplementario si:

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} < 0 \tag{8.4}$$

Definición 19 [Productividad media]. Dícese que la productividad media de un factor de la producción es la razón entre la cantidad total producida y la cantidad (número de unidades) empleadas del insumo:

$$PMe_{z_i} = \frac{q}{\partial z_i} \tag{8.5}$$

Definición 20 [Elasticidad insumo-producto]. Defínase la elasticidad insumo-producto como el cambio porcentual en la cantidad total producida (q) ante un cambio porcentual en uno de los factores de la producción cualquiera x_j.

$$\mathcal{E}_{q,z_j} = \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial z_j}\frac{z_j}{q} \tag{8.6}$$

Nótese que la expresión de la elasticidad insumo producto es equivalente a:

$$\mathcal{E}_{q,z_j} = \frac{PMg_{z_j}}{PMe_{z_j}} \tag{8.7}$$

8.5. Producto marginal y producto medio

Observe la siguiente función de producción: Recuerde que la producción media de un insumo z_j es de la

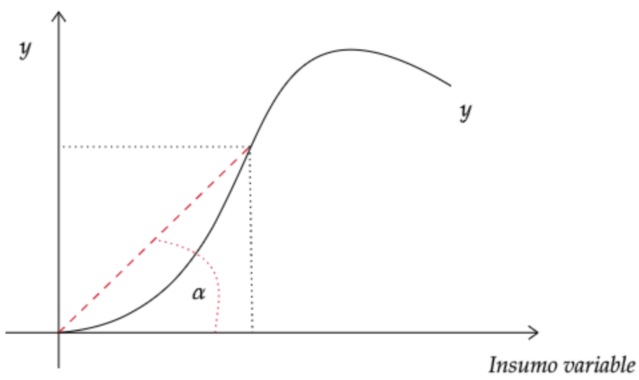


Figura 8.5: Una función de producción ondulada

forma $PMe = \frac{y}{z_j}$, de manera que, gráficamente, es la distancia desde 0 hasta y dividido entre la distancia que hay de 0 a z_j empleado, de manera que el producto medio puede tambiíen obtenerse como la tangente del ángulo α.

8.6. Etapas de la función de producción

- En la primera etapa de la función de producción el producto medio del insumo variable está aumentando.
- En la segunda etapa de la función de producción el producto medio del insumo variable empieza a disminuir en conjunto con el producto marginal, sin embargo el producto marginal sigue siendo positivo.
- En la tercera etapa de la función de producción el producto medio del insumo variable sigue disminuyendo, mientras que ahora el producto marginal es negativo, lo cual implica que la producción total también ha de estar disminuyendo.

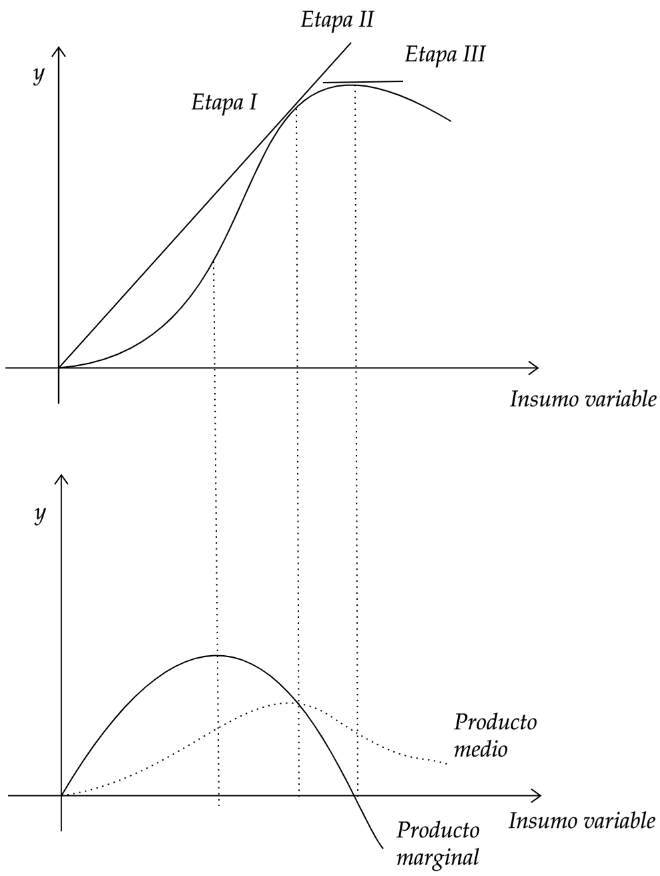


Figura 8.6: Las etapas de la función de producción

8.7. Corto plazo y largo plazo

Una distinción útil para clasificar a los diferentes factores de la producción, insumos o inputs, es mediante su capacidad de ser variados o no. Para estos efectos, se suele introducir una dimensión temporal, y a raíz de eso se habla de un corto plazo y un largo plazo.

En el corto plazo, es normal que existan factores de la producción que no pueden ser variados pero sí en el largo plazo. De esta manera, es irrelevante determinar con exactitud cuánto tiempo es çorto plazoε ”largo plazo”, sino que lo relevante es lo siguiente:

- Corto plazo: existe al menos un factor de la producción que no puede ser variado con facilidad (siempre existe la posiblidad de que ante cambios abruptos o sustanciales que hagan reconsiderar la disposición de estos factores).
- Largo plazo: es la situación bajo la cual todos los factores de producción son variables.

8.8. La ley de los rendimientos marginales decrecientes

Definición 21 [Ley de los rendimientos marginales decrecientes]. Mantiendo constante la tecnología y todos los insumos salvo uno, a medida que ese insumo variable aumente más allá de cierto punto, la tasa de incremento del nivel de producción final, empezará a disminuir. Es decir, a partir de cierto punto, el producto marginal del insumo empezará a disminuir.

Esta ley se cumple si:

1. Solamente se varía un insumo de la producción y todos los demás, simultáneamente, se mantienen constantes.

2. La tecnología no cambia.

3. Los coeficientes de producción son variables; es decir, no se está ante una función de proporciones fijas.

Esta "ley.es más una observación o afirmación empírica, y no un teorema derivado axiomáticamente.

Ejemplo 15 [Rendimientos a escala[1]]. Los rendimientos a escala señalan la homogeneidad de la función de producción; es decir, muestra qué sucede con la producción cuando se cambian los factores en la misma proporción.

Por ejemplo, considere la siguiente función de producción $y = x_1^2 x_2^2$; si se aumentan los factores en una proporción λ, se tiene:

$$(\lambda x_1)^2 (\lambda x_2)^2 = \lambda^2 x_1^2 \lambda^2 x_2^2 = \lambda^4 x_1^2 x_2^2 = \lambda^4 y$$

Note que el exponente de λ es mayor que 1; por lo tanto, la función de producción tiene rendimientos crecientes a escala. Es decir, al aumentar la proporción de los factores, la producción aumenta más que los factores.

Ahora, considere la siguiente función de producción $y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$; si se aumentan los factores en una proporción λ, se tiene:

$$(\lambda x_1)^{\frac{1}{2}} (\lambda x_2)^{\frac{1}{4}} = \lambda^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{4}} = \lambda^{\frac{3}{4}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}} = \lambda^{\frac{3}{4}} y$$

Note que el exponente de λ es menor que 1; por lo tanto, la función de producción tiene rendimientos decrecientes a escala. Es decir, al aumentar la proporción de los factores, la producción aumenta menos que los factores.

Por último, considere la siguiente función de producción $y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$; si se aumentan los factores en una proporción λ, se tiene:

$$(\lambda x_1)^{\frac{1}{2}} (\lambda x_2)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \lambda x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \lambda y$$

Note que el exponente de λ es igual que 1; por lo tanto, la función de producción tiene rendimientos constantes a escala. Es decir, al aumentar la proporción de los factores, la producción aumenta en la misma proporción que los factores.

Note, además, que para las funciones Cobb-Douglas es fácil conocer los rendimientos a escala, simplemente se debe observar la suma de los exponentes de los factores.

Considere la siguiente afirmación: *Üna empresa que enfrenta retornos a escala constantes conforme aumenta su producción, presenta curvas de costo marginal y de costo total promedio de largo plazo con pendiente cero".*

Indique si la afirmación es verdadera o falsa.

→ Si asumimos que la industria presenta costos constantes, la afirmación es verdadera; pues, una empresa que presenta rendimientos constantes a escala puede aumentar el producto aumentando en la misma proporción todos los insumos. Por lo tanto, si los costos de los factores son constantes la curva de costo total tendrá pendiente fija, lo que hace que la de costo marginal y costo promedio tengan pendiente cero.

Ejemplo 16 [Distintos tipos de tecnología]. Considere una firma en la cual el trabajo (ℓ) es el único factor variable. En esta pregunta se van a contrastar los siguientes dos tipos de 'mejoras tecnológicas:

[1]Ejercicio tomado de ACCG

- Tipo I: Cada unidad de trabajo ahora produce el doble de lo que producía anteriormente
- Tipo II: Cada unidad de producto ahora requiere la mitad de trabajo que se utilizaba antes

1. Si la función de producto total original era $q = 100\ell - \ell^2$, encuentre la nueva función de producción cuando ocurren mejoras tecnológicas del Tipo I. Llame a esta nueva función de producción q'.

   - Función de producción original
     Función de producción: $q = 100\ell - \ell^2$
     - Producto promedio

$$\begin{aligned} q_{me} =& \frac{1}{\ell} \cdot \left(100\ell - \ell^2\right) \\ =& 100 - \ell \end{aligned}$$

     - Producto marginal

$$\begin{aligned} PMg_{\ell} =& \frac{\partial q}{\partial \ell} \\ =& \frac{\partial}{\partial \ell}\left[100\ell - \ell^2\right] \\ =& 100 - 2\ell \end{aligned}$$

   - Función de producción q'
     Función de producción: $q = 2\left(100\ell - \ell^2\right)$
     - Producto promedio

$$\begin{aligned} q'_{me} =& \frac{1}{\ell} \cdot \left(200\ell - 2\ell^2\right) \\ =& 200 - 2\ell \end{aligned}$$

     - Producto marginal

$$\begin{aligned} PMg'_{\ell} =& \frac{\partial q}{\partial \ell} \\ =& \frac{\partial}{\partial \ell}\left[200\ell - 2\ell^2\right] \\ =& 200 - 4\ell \end{aligned}$$

2. Dibuje un gráfico comparativo con las dos funciones de producción en donde se muestren las curvas de Producto Total, Producto Promedio y Producto Marginal. (En total, tiene que dibujar dos gráficos que incluyan ambas funciones de producción)

   - Función original

$$q = 100\ell - \ell^2$$

   - Tipo I

   - Tipo II

3. Encuentre las ecuaciones de producto promedio y producto marginal para ambas funciones de producción

Ejercicio 47 [Rendimientos a escala[2]]. Considera una firma con la siguiente función de producción:

$$F(K, L) = L^{\alpha} K^{\beta}$$

donde α y β son números reales entre 0 y 1.

[2] Ejercicio tomado de Gruber (2023)

1. *(3 puntos)* ¿Cómo dependen los rendimientos a escala de esta función de producción de α y β?
   Solución: $\rightarrow$ Supón que la firma escala todos los insumos por un factor a, entonces la función de producción se convierte en:
$$F(aK, aL) = a^{\alpha+\beta} L^{\alpha} K^{\beta}$$
   La firma tendrá rendimientos crecientes a escala si $\alpha + \beta > 1$, rendimientos decrecientes si $\alpha + \beta < 1$, y rendimientos constantes a escala si $\alpha + \beta = 1$.

2. *(2 puntos)* Encuentra el producto marginal del trabajo y del capital, y la tasa marginal de sustitución técnica entre capital y trabajo.
   Solución: $\rightarrow$
$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}, \quad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = \beta L^{\alpha} K^{\beta-1}$$
$$MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\alpha K}{\beta L}$$

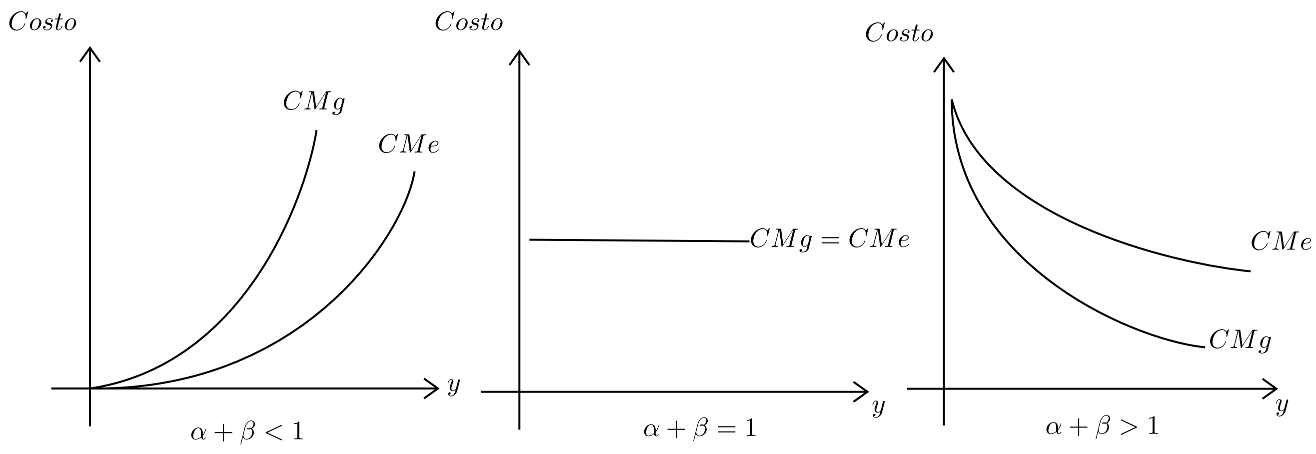
Supón que la curva de costo total de largo plazo para esta función de producción es:
$$c(q) = (\alpha + \beta) \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

3. *(5 puntos)* Deriva la curva de costo marginal de largo plazo y la curva de costo promedio de largo plazo para esta función.
   Solución: $\rightarrow$
$$MC(q) = \frac{dc}{dq} = (\alpha + \beta) \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{1}{\alpha+\beta} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$$
$$AVC(q) = \frac{c(q)}{q} = (\alpha + \beta) \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}$$

4. *(10 puntos)* Grafica y compara las curvas de costo marginal y costo promedio de largo plazo cuando $\alpha+\beta < 1$, $\alpha+\beta = 1$ y $\alpha+\beta > 1$. Tu gráfico no necesita estar a escala, pero debe ser cualitativamente correcto al comparar las curvas de costo promedio y marginal, y su dependencia con respecto a q. Proporciona una intuición, usando el concepto de rendimientos a escala.
   Solución: $\rightarrow$ Los rendimientos marginales a escala establecen una relación entre el aumento en los insumos y el aumento en el output. En particular:

   - Cuando $\alpha+\beta > 1$, hay rendimientos crecientes a escala: un aumento proporcional en los insumos lleva a un aumento más que proporcional en el output. Las curvas de costos promedio y marginales son decrecientes.
   - Cuando $\alpha+\beta < 1$, hay rendimientos decrecientes a escala: un aumento proporcional en los insumos lleva a un aumento menos que proporcional en el output. Las curvas de costos son crecientes.
   - Cuando $\alpha+\beta = 1$, hay rendimientos constantes a escala: un aumento proporcional en los insumos lleva a un aumento proporcional en el output. Las curvas de costos promedio y marginales son constantes e iguales.

   Esta relación entre rendimientos a escala y forma de las curvas de costo se refleja en que el comportamiento del costo marginal con respecto al costo promedio depende del exponente de q: si el exponente es negativo, los costos decrecen; si es positivo, los costos aumentan; y si es cero, los costos son constantes.



Ejemplo 17 [Etapas de la producción]. Una empresa posee la función de producción

$$y = \frac{-2}{3}L^3 + \frac{1}{2}KL^2$$

En el corto plazo el capital está fijo y es igual a 100 unidades. Calcule para el corto plazo:

- El nivel de trabajo donde empiezan los rendimientos marginales decrecientes

$$\begin{aligned}
y =& \frac{-2}{3}L^3 + \frac{1}{2}KL^2 \\
PMg_L =& \frac{\partial Y}{\partial L} \\
PMg_L =& \frac{\partial}{\partial L}\left[\frac{-2}{3}L^3 + \frac{1}{2}KL^2\right] \\
PMg_L =& \frac{-6}{3}L^2 + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}KL \\
PMg_L =& -2L^2 + KL
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max_L PMg_L \\
\Leftrightarrow &\max_L -2L^2 + KL \\
\frac{\partial}{\partial L}\left[-2L^2 + KL\right] =& 0 \\
-4L + K =& 0 \\
K =& 4L \\
\frac{K}{4} =& L \\
\frac{100}{4} =& L \\
25 =& L
\end{aligned}$$

- Determine el rango de cantidades de trabajo que corresponden a la segunda etapa de la producción

$$
\begin{aligned}
PMe_L =& \frac{Y}{L} \\
=& \frac{\frac{-2}{3}L^3 + \frac{1}{2}KL^2}{L} \\
=& \frac{-2}{3}L^2 + \frac{1}{2}KL \\
=& \frac{-2}{3}L^2 + \frac{50}{2}L \\
=& \frac{-2}{3}L^2 + \frac{100}{2}L \\
=& \frac{-2}{3}L^2 + 50L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \max_L PMe_L \\
\Leftrightarrow & \max_L \frac{-2}{3}L^2 + 50L \\
\frac{\partial}{\partial L}\left[\frac{-2}{3}L^2 + 50L\right] =& 0 \\
\frac{-4}{3}L + 50 = 0 & \\
50 =& \frac{4}{3}L \\
150 =& 4L \\
37{,}5 = L &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PMg_K =& 0 \\
\frac{\partial Y}{\partial K} =& 0 \\
\frac{\partial}{\partial K}\left[\frac{-2}{3}L^3 + \frac{1}{2}KL^2\right] = 0 & \\
\frac{1}{2}L^2 =& 0 \\
\frac{L^2}{2} =& 0
\end{aligned}
$$

Capítulo 9

La isocuanta

Considérese una función de producción de la forma $f\vec{X} = y$. Ahora, fíjese el nivel de producción y a un nivel constante arbitrario.

Definición 22 [Isocuanta]. Defínase una isocuanta como un conjunto de vectores de insumos que producen generan un nivel de producción constante y. Entonces, para un vector de insumos $\vec{X}$, la isocuanta a través de $\vec{X}$ es el conjunto de entradas en el vector $\vec{X}$ cuya combinación genera un nivel de producción constante y.

9.1. El caso de dos variables

Suponga nuevamente el caso de una función de producción con dos variables:

$$q = f(K, L)$$

La isocuanta correspondiente a esta función de producción sería:

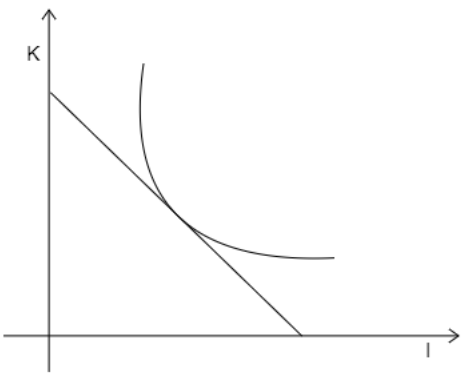


Figura 9.1: Una isocuanta para una función de producción de dos insumos

9.2. La tasa marginal de sustitución técnica

Una figura análoga a la tasa marginal de sustitución en la teoría del consumidor, es la tasa marginal de sustitución técnica:

Definición 23 [Tasa marginal de sustitución técnica]. Defínase la tasa marginal de sustitución técnica como la tasa a la que un insumo de la producción puede ser sustituido por otro manteniendo constante el nivel de producción, es decir, sin que varíe el nivel de producción. Matemáticamente, se define como la razón de los productos marginales entre dos insumos:

$$TMST_{j,k} = \frac{\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_j}}{\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial x_k}} \tag{9.1}$$

Geométricamente, puede pensarse en la tasa marginal de sustitución técnica como la pendiente de la isocuanta.

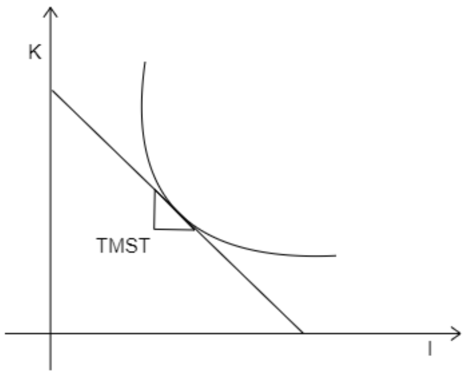


Figura 9.2: La tasa marginal de sustitución técnica para una función de producción de dos insumos

Capítulo 10

Maximización de la producción

Derivación general 7 [Maximización de la producción]. Se tiene el problema:

$$\begin{aligned} \max_{(z_1,z_2,...,z_n)} \quad & f((z_1,z_2,...,z_n)) \\ \text{sujeto a} \quad & C=\sum_{i=1}^{n} w_i z_i \end{aligned} \tag{10.1}$$

Y el respectivo lagrangiano sería:

$$\mathcal{L}=f(z_1,z_2,...,z_n)+\lambda(C-\sum_{i=1}^{n} w_i z_i)$$

Se plantean las condiciones de primer orden y sus respectivas condiciones de holgura complementaria:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_1}-\lambda w_1 \geq 0 \qquad & z_1[\frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_1}-\lambda w_1]=0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_2}-\lambda w_2 \geq 0 \qquad & z_2[\frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_2}-\lambda w_2]=0 \\
& \vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_n} \leq 0 \Rightarrow \frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_n}-\lambda w_n \geq 0 \qquad & z_n[\frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_n}-\lambda w_n]=0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \Rightarrow C-\sum_{i=1}^{n} w_i z_i \geq 0 \qquad & \lambda[C-\sum_{i=1}^{n} w_i z_i]=0
\end{aligned}$$

Es importante recordar que la expresión $\frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_j}$ no es más que la productividad marginal del insumo z_j.

Tomando la última condición de holgura complementaria:

Caso $\lambda=0$

Note que si $\lambda=0$, todas las productividades marginales serían negativas o 0, de manera que no se produciría nada, de manera que no puede ser que $\lambda=0$ y por ende tiene que ser que la función de costos se cumple con igualdad y se agotan todos los gastos.

Caso $\lambda \neq 0 \wedge$

Caso de solución interna (no solución de esquina)

Tomando un insumo cualquiera z_j, su condición de primer orden indica que:

$$\frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_j}=\lambda w_j \Rightarrow \frac{\frac{\partial f(z_1,z_2,...,z_n)}{\partial z_j}}{w_j}=\lambda \Rightarrow \frac{PMg_{z_j}}{w_j}=\lambda \tag{10.2}$$

Pero recuerde que $w_j=CMg_{z_j}$ Por tanto, tomando dos insumos cualesquiera j,k se obtiene que:

$$\lambda=\lambda \Rightarrow \frac{PMg_{z_j}}{CMg_{z_j}}=\frac{PMg_{z_k}}{CMg_{z_k}} \Rightarrow \frac{PMg_{z_j}}{PMg_{z_k}}=\frac{w_j}{w_k}$$

Caso de solución de esquina

Para el caso en que la función de producción admita solución de esquina tiene que ser que $PMg_{z_j} \leq w_j$, a partir de lo cual se tendría que proceder con el planteamiento de los distintos casos posibles.

Capítulo 11

La función de costos

Definición 24 [Función de costos]. La función de costos mide el costo mínimo de obtener un determinado nivel de producción, dados los precios de los factores. La función de costos indica las posibilidades económicas de la empresa.

$$C = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i \tag{11.1}$$

donde cada w_i representa una entrada del vector $\vec{W}$ de costos de los insumos y z_i representa cada entrada del vector de insumos empleados $\vec{Z}$.

11.1. Costo medio

Definición 25 [Costo medio]. Defínase el costo medio como:

$$CMe = \frac{C(w_1, w_2, ..., w_n)}{q} \tag{11.2}$$

11.2. Costo marginal

Definición 26 [Costo marginal]. Defínase el costo marginal como el cambio en los costos totales (función de costos) ante un cambio en la cantidad total producida (función de producción).

$$CMg = \frac{\partial C(w_1, w_2, ..., w_n)}{\partial q} \tag{11.3}$$

También cabe medir el costo marginal como el cambio en los costos totales (función de costos) ante un cambio en la cantidad empleada de un determinado insumo.

11.3. Propiedades de la función de costos

Se hacen los siguientes supuestos de la función de costos $C(\vec{w}, \vec{z})$:

- La función de costos es homogénea de grado 1 en $\vec{w}$ y creciente en q.
- La función de costos es una función cóncava de $\vec{w}$.
- Si la función de producción es cuasi-cóncava entonces la función de costos es una función convexa de q, lo cual implica que entonces los costos marginales son crecientes en q $\Rightarrow \frac{\partial C(\vec{w}, \vec{z})}{\partial q} > 0$.
- Se cumple el lema de Shepard.

11.4. Lema de Shepard

$$\frac{\partial c(\vec{w}, \vec{z})}{\partial w_i} = z_i(q, \vec{w}) \tag{11.4}$$

11.5. Minimización de los costos

Corolario 1 [Minimización de costos]. Se tiene el problema:

$$\begin{aligned} \min_{\vec{Z}} \quad & C(z_1, z_2, ..., z_n) \\ \text{sujeto a} \quad & q \leq f(z_1, z_2, ..., z_n) \end{aligned} \tag{11.5}$$

Y el respectivo lagrangiano sería:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i + \lambda(q - f(z_1, z_2, ..., z_n))$$

Se plantean las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} \leq 0 \Rightarrow w_1 - \lambda\left(\frac{\partial f\left(z_1, z_2, ..., z_n\right)}{\partial z_1}\right) \leq 0 \qquad & z_1\left[w_1 - \lambda\left(\frac{\partial f(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_1}\right)\right] \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} \leq 0 \Rightarrow w_2 - \lambda\left(\frac{\partial f\left(z_1, z_2, ..., z_n\right)}{\partial z_2}\right) \leq 0 \qquad & z_2\left[w_2 - \lambda\left(\frac{\partial f(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_2}\right)\right] \\
& \vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_n} \leq 0 \Rightarrow w_n - \lambda\left(\frac{\partial f\left(z_1, z_2, ..., z_n\right)}{\partial z_n}\right) \leq 0 \qquad & z_n\left[w_n - \lambda\left(\frac{\partial f(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_n}\right)\right] \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \geq 0 \Rightarrow f\left(z_1, z_2, ..., z_n\right) \geq 0 \qquad & \lambda\left[f\left(z_1, z_2, ..., z_n\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

Refiriéndose a la última condición de holgura complementaria:

Caso $\lambda = 0$

Note que si $\lambda = 0$ todas las remuneraciones a los factores $(w_1, w_2, ..., w_n)$ sería negativas o 0, de manera que si no se remunera ningún factor de la producción Z, (suponiendo que ningún factor es gratuito), no se produciría nada, de manera que tiene que ser que la función restricción (la función de producción se cumple con igualdad).

Caso $\lambda \neq 0 \wedge f(z_1, z_2, ..., z_n) = q$

Caso de solución interna (no solución de esquina)

Tómese un insumo cualquiera j:

$$w_j = \lambda \frac{\partial f(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_j} \Rightarrow \frac{w_j}{\frac{\partial f(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_j}} = \lambda \Rightarrow \frac{CMg_j}{PMg_{z_j}} = \lambda$$

Por tanto, para dos insumos cualesquiera j, k debe ser cierto que, en el óptimo:

$$\lambda = \lambda \Rightarrow \frac{CMg_{z_j}}{PMg_{z_j}} = \frac{CMg_{z_k}}{PMg_{z_k}} \Rightarrow \frac{PMg_{z_j}}{PMg_{z_k}} = \frac{w_j}{w_k}$$

Es decir que la condición de primer orden para cualquier insumo es que la remuneración a ese factor debe ser igual a la derivada parcial de la función de producción con respecto a ese insumo. Pero recuerde que:

$$\frac{\partial f(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_j} = PMg_{z_j}$$

Note que esta condición es la igualación de la derivada parcial de la función de costos con respecto al insumo z_j a su productividad marginal, pero recuerde que $\frac{\partial C(w_1, w_2, ..., w_n}{\partial z_j}$ no es más que el costo marginal del insumo z_j. Entonces, la condición de primer orden del insumo z_j indica que el costo marginal del insumo ha de ser igual a su productividad marginal.

Por lo tanto, el óptimo, para un insumo z_j:

$$CMg_{z_j} = PMg_{z_j} \tag{11.6}$$

Por ende, habiendo llegado a la anterior condición de optimalidad, se puede depejar para alguno de los insumos, evaluar en la función de producción y encontrar la demanda óptima para los insumos.
Solución de esquina
Para el caso en que la función de producción admita solución de esquina tiene que ser que $PMg_{z_j} \leq w_j$, a partir de lo cual se tendría que proceder con el planteamiento de los distintos casos posibles.

Ejemplo 18 [Costo mínimo necesario para producir]. Una empresa posee la siguiente función de producción

$$y = -L^3 + 6KL^2$$

Si el precio de ambos factores es igual a 2000. Determine:

- Si la empresa desea producir 94500 unidades de y, ¿cuál es el costo mínimo necesario para producir ese nivel de y?

$$\min_{L,K} CT = 2000L + 2000K \quad s.a \quad 94500 = -L^3 + 6KL^2$$

$$\begin{aligned}
TMST_{L,K} &= \frac{w}{r} \\
\frac{PMg_L}{PMg_K} &= \frac{w}{r} \\
\frac{-3L^2 + 12KL}{6L^2} &= \frac{w}{r} \\
\frac{3\cancel{L}(-L+4L)}{6L^{\cancel{2}}} &= \frac{w}{r} \\
\frac{2(-L+4K)}{3L} &= \frac{w}{r} \\
-L + 4K &= \frac{3Lw}{2r} \\
4K &= \frac{3Lw}{2r} + L \\
4K &= \frac{3Lw + 2rL}{2r} \\
4K &= \frac{L(3w+2r)}{2r} \\
K &= \frac{L(3w+2r)}{8r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= -L^3 + 6KL^2 \\
y &= -L^3 + 6\left(\frac{L(3w+2r)}{8r}\right)L^2 \\
y &= -L^3 + \frac{6L^3(3w+2r)}{8r} \\
8ry &= L^3\left(-1 + 6(3w+2r)\right) \\
\frac{8ry}{18w + 12r - 1} &= L^3 \\
\left(\frac{8ry}{18w + 12r - 1}\right)^{\frac{1}{3}} &= L
\end{aligned}$$

Ejemplo 19 [Funciones de costo]. Una empresa posee una función de producción dada por

$$y = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{3}}$$

Asuma que el costo por unidad de capital y mano de obra es igual a 1. Además, asuma que en el punto inicial, la cantidad de capital que se contrata es fija en el corto plazo e igual a 1.

- Encuentre la curva de costo promedio de corto y largo plazo.

  - Corto plazo
    Tomando $K = 1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} y =& L^{\frac{1}{2}}(1)^{\frac{1}{2}} \\ y =& L^{\frac{1}{2}} y^2 = \qquad L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CT =& L(1) + (1)(1) \\ =& y^2 + 1 \\ CMe =& \frac{CT}{y} \\ =& \frac{y^2+1}{y} \\ =& y + \frac{1}{y} \\ CV =& y^2 \\ CVMe =& y \end{aligned}$$

  - Largo plazo

Ejemplo 20 [Funciones de costo]. Considere una empresa que tiene la siguiente función de producción: $q = 2\sqrt{kl}$. A corto plazo la cantidad de capital es $k = 100$. La tarifa para alquiler de k es $r = 1$ y la tarifa salarial $w = 4$.

- Encuentre la función de costo total a corto plazo de la empresa. Encuentre la función de costo promedio a corto plazo. ¿Cuál es la función de costo marginal en el corto plazo?

$$\begin{aligned} q =& 2\sqrt{KL} \\ \Leftrightarrow q =& 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow q =& 2\,(100)^{\frac{1}{2}}\, L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{q}{2\,(10)} =& L^{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2\,(10)}\right)^2 =& L \\ \Leftrightarrow \frac{q^2}{20^2} =& L \\ \Leftrightarrow \frac{q^2}{400} =& L \end{aligned}$$

  - Costo total

$$\begin{aligned} CT =& \left(\frac{q^2}{400}\right) \cdot 4 + 100 \\ =& \frac{q^2}{100} + 100 \end{aligned}$$

  - Costo medio

$$\begin{aligned} CMe =& \frac{\frac{q^2}{100} + 100}{q} \\ =& \frac{q}{100} + \frac{100}{q} \end{aligned}$$

	CT	CMe	CMg
25	106.25	4.25	0.5
50	125	2.5	1
100	200	2	2
200	500	2.5	4

- Costo marginal

$$\begin{aligned} CMg =& \frac{\partial CT}{\partial q} \\ =& \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{q^2}{100} + 100\right] \\ =& \frac{2q}{100} \\ =& \frac{q}{50} \end{aligned}$$

- ¿Cuál es el monto de cada costo para la empresa si produce 25,50, 100 y 200 unidades del bien?

tablaejercicio.png

- Suponiendo que la empresa opera en el largo plazo, ¿cómo debe elegirse el capital y el trabajo para minimizar el costo total?

$$\min_{L,K} Y = 2K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} TMST_{L,K} =& TMSM_{L,K} \\ \frac{K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{-1}{2}}}{K^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{1}{2}}} =& \frac{w}{r} \\ \frac{K}{L} =& \frac{4}{1} \\ K =& 4L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y =& 2(4L)^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \\ Y =& 4L^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}} \\ Y =& 4L \\ \frac{Y}{4} =& L \\ \cancel{4}\left(\frac{Y}{\cancel{4}}\right) =& K \Rightarrow Y = K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CT =& \left(\frac{Y}{\cancel{4}}\right)\cancel{4} + Y \\ =& 2Y \end{aligned}$$

Ejercicio 48 [Producción a corto plazo[1]]. Una empresa tiene la siguiente función de producción:

$$y = 10L^2K$$

Donde L es la cantidad de trabajadores y K es la cantidad de capital. El precio de cada trabajador es w y el precio de cada unidad de capital es r. Se conoce que $(w = 3000)$ y $(r = 60000)$. [13]

a) Determine cuánto es el menor costo posible de producir $(y = 40000)$.

Primeramente, se plantea la minimización del costo total y se sustituye ($y = 40000$).

$$\min_{L,K}\{CT\} \text{ s.a. } 40000 = 10L^2K$$
$$\min_{L,K}\{rK + wL\} \text{ s.a. } 40000 = 10L^2K$$

Posteriormente, se utiliza la condición de optimalidad.

$$TMST = \frac{w}{r}$$
$$\frac{20LK}{10L^2} = \frac{3}{60}$$

Se despeja K de la condición de optimalidad.

$$K = \frac{L}{40}$$

Se sustituye K en la restricción tecnológica ($10L^2K = 40000$).

$$10L^2\left(\frac{L}{40}\right) = 40000$$

Se despeja L y se obtiene:

$$L \approx 54,29$$

Se sustituye el resultado anterior en ($K = L/40$).

$$K \approx 1,36$$

Finalmente, se sustitiuyen los valores de L y K en la función de costo total.

$$CT = [(60000)(1,36)] + [(3000)(54,29)]$$
$$C^* = 244470$$

Donde C^* es el menor costo necesario para producir $(y = 40000)$.

b) A corto plazo el factor fijo es el capital y la cantidad de este corresponde a lo encontrado en el inciso anterior. Si la empresa desea producir $(y = 50000)$, cuánto sería el costo de producir ese nivel de y.

En este caso, se puede partir de la función de producción.

$$y = 10L^2K$$
$$50000 = 10L^2(1,36)$$
$$L =\approx 60,63$$

Se sustituye el nuevo valor de L en la función de costo total y se obtiene el nuevo costo mínimo.

$$CT = [(60000)(1,36)] + [(3000)(60,63)]$$
$$C^* = 263490$$

[1]Ejercicio tomado de ACCG

Ejercicio 49 [Costos y beneficios en un mercado competitivo[2]]. Un mercado competitivo cuenta con las siguientes características: [15]

- Demanda de mercado: $Q_d = 6000 - 100P$
- Oferta de mercado: $Q_s = 1200P$
- Costo de las empresas: $C(q) = 700 + \frac{q^2}{200}$

a) Calcule el costo fijo (CF), costo variable (CV), costo variable medio (CVMe) y costo marginal (CM).

$\rightarrow$ Se sabe que el costo total es la suma del costo fijo y el costo variable ($CT = CF + CV$). Por lo tanto, a partir de la función de costos se puede deducir lo siguiente.

$$C(q) = 700 + \frac{q^2}{200}$$
$$CF = 700$$
$$CV = \frac{q^2}{200}$$

Se utilizan estos datos para calcular el costo variable medio y el costo marginal a continuación.

$$CVMe = \frac{CV}{q} \rightarrow CVMe = \frac{\left(q^2/200\right)}{q} \rightarrow CVMe = \frac{q}{200}$$
$$CM = \frac{\partial C(q)}{\partial q} \rightarrow CM = \frac{q}{100}$$

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio del mercado.

Se iguala ($Q_d = Q_s$) y se despeja P.

$$6000 - 100P = 1200P$$
$$P^* = \frac{60}{13}$$

Se sustituye P^* y se sustituye la curva de oferta o demanda.

$$Q_s = 1200P$$
$$Q = 1200\frac{60}{13}$$
$$Q^* = \frac{72000}{13}$$

c) Obtenga la producción (q) y los beneficios a corto plazo de cada empresa (π_i).

$\rightarrow$ Producción por empresa: Se puede calcular la producción (q) para una empresa representativa, ya que los costos son los mismos.

Para obtener la producción por empresa se utiliza el costo marginal, el cual se calculó en el inciso (a).

$$CM = \frac{q}{100}$$

En un mercado competitivo el costo marginal es igual al precio ($CM = P$) y en el inciso (b) se encontró que $P^* = \frac{60}{13}$.

[2]Ejercicio tomado de ACCG

Al igualar los resultados anteriores:

$$\begin{aligned} CM &= P \\ \frac{q}{100} &= \frac{60}{13} \\ q &= \frac{6000}{13} \end{aligned}$$

Beneficios por empresa:

Los beneficios (π_i) se pueden calcular para una empresa representativa también. Los beneficios se pueden expresar por medio de la siguiente ecuación:

$$\pi_i = IT - C(q)$$

IT son los ingresos totales, los cuales son el producto del precio y la cantidad por empresa.

$$\pi_i = (P^* q) - \left[700 + \left(\frac{q^2}{200}\right)\right]$$

Al sustituir $P^* = \frac{60}{13} \wedge q = \frac{6000}{13}$.

$$\begin{aligned} \pi_i = \left[P^* \left(\frac{6000}{13}\right)\right] - \left[700 + \frac{(6000/13)^2}{200}\right] \\ \pi_i = \frac{61700}{169} \approx 365,09 \end{aligned}$$

d) ¿Cuál es el precio mínimo al que existe oferta?

Se estudió que el costo marginal y el costo variable medio de la primera unidad de producción son iguales, por lo que se pueden igualar estas ecuaciones para encontrar q y posteriormente, el precio mínimo ($P_{\min}$).

$$\begin{aligned} CM &= CVMe \\ \frac{q}{100} &= \frac{q}{200} \rightarrow q = 0 \end{aligned}$$

En un mercado competitivo el precio es igual al costo marginal. Por lo tanto, se realiza el siguiente procedimiento para encontrar el precio mínimo.

$$\begin{aligned} P = CM &\rightarrow P = \frac{q}{100} \\ P_{\text{mín}} = \frac{0}{100} &\rightarrow P_{\text{mín}} = 0 \end{aligned}$$

e) Muestre que para este mercado competitivo a largo plazo se cumple la siguiente ecuación:

$$P = \frac{700}{q} + \frac{q}{200}$$

Al observar la ecuación se puede deducir que el primer componente corresponde a CFMe ($CFMe = \frac{700}{q}$) y el segundo componente representa el CVMe ($CVMe = \frac{q}{200}$).

Por lo tanto, se demostrará que a largo plazo se cumple:

$$P = CFMe + CVMe$$

A largo plazo en un mercado competitivo, los beneficios son nulos ($\pi = 0$).

$$\begin{aligned} \pi &= IT - C(q) = 0 \\ \pi &= (P^* q) - C(q) = 0 \end{aligned}$$

Dado que los costos totales son la suma de los costos fijos y los costos variables, se realiza la siguiente sustitución:

$$(P^*q) - (CF + CV) = 0$$
$$P^* = \frac{CF + CV)}{q}$$

Al aplicar la definición de $CFMe \wedge CVMe$:

$$P = CFMe + CVMe$$

En el caso de este ejercicio:

$$P = \frac{700}{q} + \frac{q}{200}$$

Ejercicio 50 [Curvas de costos de corto y largo plazo[3]]. Una empresa tiene una función de producción representada por $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}}$.
Esta empresa puede contrastar toda la mano de obra que desee un salario $w = 2,700$, y todo el capital que desee a una tasa de interés de 20 % (o sea, $r = \frac{1}{5}$). [18]

1. Calcule las funciones de costo marginal y de costo medio de largo plazo. Dibuje en un gráfico las curvas encontradas (preste atención a la forma matemática de estas curvas).
   → La función a minimizar de la empresa es la siguiente:

$$\min_{L,K} CT = wL + rK$$
$$\text{s.t. } y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}}$$

Se plantea el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda \left(y - L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right)$$

Obteniendo las ecuaciones de primer orden:

$$[L] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda \left(\frac{1}{4} \cdot L^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right) = 0 \Rightarrow \lambda = 4w \left(L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{1}{2}} \right)$$
$$[K] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = w - \lambda \left(\frac{1}{2} \cdot L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{1}{2}} \right) = 0 \Rightarrow \lambda = 2r \left(L^{-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right)$$

Igualando ambas condiciones

$$4w \left(L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{1}{2}} \right) = 2r \left(L^{-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right)$$

Despejando,

$$\frac{2w}{r} = \frac{K}{L}$$

Nótese que esta condición viene de la siguiente condición de optimalidad:

$$TMST = \frac{PM_L}{PM_K} = \frac{w}{r}$$

Sustituyendo los valores para w y r,

[3]Ejercicio tomado de ACCG

$$\frac{K}{L} = 27,000 \Rightarrow K = 27,000L$$

Sustituyendo dentro de la función de producción:

$$\begin{aligned}
y &= L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \\
y &= L^{\frac{1}{4}} (27,000L)^{\frac{1}{2}} \\
y &= (900 \cdot 30)^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{4}} \\
y &= 30^{\frac{3}{2}} \cdot L^{\frac{3}{4}} \\
L^{\frac{3}{4}} &= 30^{-\frac{3}{2}} y \\
L^* &= 30^{-2} y^{\frac{4}{3}} \\
L^* &= \frac{y^{\frac{4}{3}}}{900}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la condición de optimalidad

$$\begin{aligned}
K &= 27,000L \\
K &= \frac{27,000 y^{\frac{4}{3}}}{900} \\
K^* &= 30 y^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la función de costos

$$CT = wL + rK = \frac{2,700 y^{\frac{4}{3}}}{900} + \frac{30 y^{\frac{4}{3}}}{5} = 9 y^{\frac{4}{3}}$$

Derivando para obtener la función de costo marginal

$$CMg = \frac{9 \cdot 4}{3} y^{\frac{1}{3}} = 12 y^{\frac{1}{3}}$$

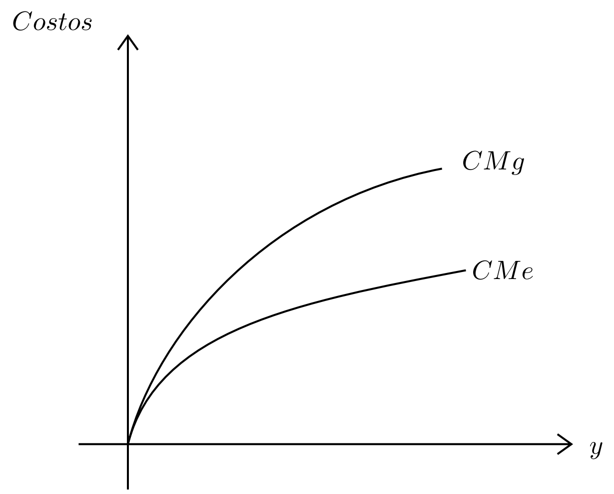
la función de costos medio es

$$CMe = \frac{9 y^{\frac{4}{3}}}{y} = 9 y^{\frac{1}{3}}$$

Para graficar dichas funciones, se obtienen las primeras dos derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{dCMg}{dy} &= 4 y^{-\frac{2}{3}} > 0 \\
\frac{d^2CMg}{dy^2} &= \frac{-8}{3} y^{-\frac{5}{3}} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dCMe}{dy} &= 3 y^{-\frac{2}{3}} > 0 \\
\frac{d^2CMe}{dy^2} &= -2 y^{-\frac{5}{3}} < 0
\end{aligned}$$



2. Si el precio del bien de largo plazo fuera $P = 3$, encuentre cuál es el nivel óptimo de trabajo (L) y de capital (K) de la empresa.
   $\rightarrow$ En el largo plazo se sabe que P = CMg.

$$
\begin{aligned}
3 &= 12y^{\frac{1}{3}} \\
\frac{1}{4} &= y^{\frac{1}{3}} \\
&= y^{\frac{1}{3}} \\
y^* &= \frac{1}{4^3} \\
y^* &= \frac{1}{64}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo los valores para $L^* \wedge K^*$:

$$
\begin{aligned}
K^* &= 30y^{\frac{4}{3}} = \frac{30}{64^{\frac{4}{3}}} = \frac{30}{4^4} = \frac{15}{128} \\
L^* &= \frac{y^{\frac{4}{3}}}{900} = \frac{1}{64^{\frac{4}{3}} \cdot 900} = \frac{1}{230,400}
\end{aligned}
$$

3. Para el nivel de capital (K) encontrado en el punto b, encuentre las curvas de corto plazo de costo medio, costo variable medio y costo marginal y dibújelas junto con las curvas encontradas en el punto a.
   $\rightarrow$ En el corto plazo, se toma el capital es un costo fijo. Si $K^* = \frac{15}{128}$

$$
y = L^{\frac{1}{4}} \left(\frac{15}{128} \right)^{\frac{1}{2}}
$$

Se despeja L:

$$
L = y^4 \cdot \left(\frac{128}{15} \right)^2
$$

El costo variable medio está dado por:

$$
CVMe = \frac{wL}{y} = \frac{2700 \cdot y^4 \cdot \left(\frac{128}{15}\right)^2}{y} = 196,608y^3
$$

El costo total está dado por

$$\begin{aligned} CT &= rK + wL \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{15}{128}\right) + 2,700L \\ &= \frac{3}{128} + 196,608y^4 \end{aligned}$$

El costo medio y el costo marginal están dado por las siguientes ecuaciones:

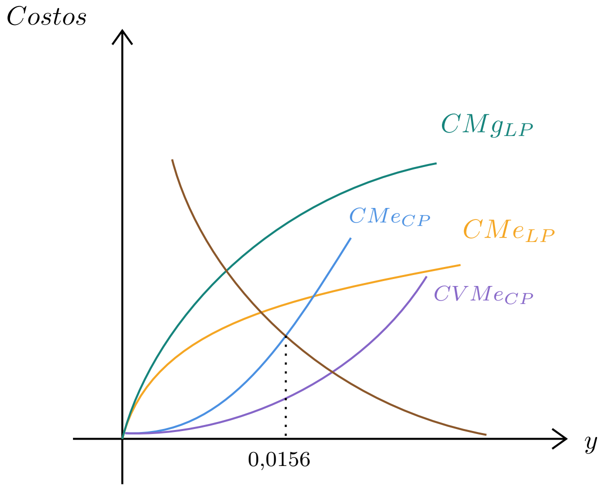
$$\begin{aligned} CMe &= \frac{CT}{y} = \frac{\frac{3}{128} + 196,608y^4}{y} = \frac{3}{128y} + 196,608y^3 \\ CMg &= \frac{dCT}{dy} = 786,432y^3 \end{aligned}$$

Note que el CMg es positivo y creciente. El CVMe también es positivo y creciente.

$$\begin{aligned} \frac{dCMg}{dy} &= 3 \cdot 786,432y^2 > 0 \\ \frac{d^2CMg}{dy^2} &= 6 \cdot 786,432y > 0 \\ \frac{dCVMe}{dy} &= 3 \cdot 196,608y^2 > 0 \\ \frac{d^2CVMe}{dy^2} &= 6 \cdot 196,608 > 0 \end{aligned}$$

Para el costo medio, buscamos primero el punto mínimo:

$$\begin{aligned} \frac{dCMe}{dy} &= \frac{-3}{128y^2} + 3 \cdot 196,608y^2 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{3}{128} = 393,216y^4 \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{64} \approx 0,0156 \end{aligned}$$



Ejercicio 51 [Minimización de costos para obtener la curva de oferta a corto plazo[4]]. na empresa representativa en un mercado competitivo tiene una función de producción igual a:

$$q_i(K, L) = \frac{1}{2}(K - 16)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(L - 16)^{\frac{1}{2}}$$

[4]Ejercicio tomado de ACCG

donde K y L son las cantidades de capital y trabajo utilizadas, respectivamente. Encuentre la curva de oferta de corto plazo de esta empresa si la unidad de capital y de trabajo cuesta 1000 colones y se emplean 20 unidades de capital.

→ A continuación los pasos para encontrar la función de oferta a corto plazo:

1. Se despeja L de la función de producción.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}(K-16)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(L-16)^{\frac{1}{2}} \\ Q - \frac{1}{2}(K-16)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(L-16)^{\frac{1}{2}} \\ 2Q - (K-16)^{\frac{1}{2}} &= (L-16)^{\frac{1}{2}} \\ L &= \left[2Q - (K-16)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + 16 \end{aligned}$$

2. Paso 2: Se sustituye L en la función de costo total y también los valores $(K = 20) \wedge (r = 1000) \wedge (w = 1000)$. La función de costos totales es la siguiente:

$$CT = rK + wL$$

Se realizan las sustituciones anteriores y se simplifica.

$$\begin{aligned} CT &= (1000)(20) + (1000)\left[\left(2Q - (K-16)^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 16\right] \\ CT &= 20000 + (1000)\left[2Q - (20-16)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + 16000 \\ CT &= 36000 + (1000)(2Q-2)^2 \end{aligned}$$

3. Paso 3: Se calcula el costo marginal.
Se sabe que $CM = (\partial CT/\partial Q)$.

$$\begin{aligned} CM &= 1000 \cdot 2 \cdot (2Q-2) \cdot 2 \\ CM &= 8000(Q-1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la curva de oferta a corto plazo es la siguiente:

$$\begin{aligned} CM = P &= 8000(Q-1) \\ P &= 8000(Q-1) \end{aligned}$$

Ahora solo falta saber a partir de cuál precio empieza la oferta, recordemos que solo existe oferta cuando $CM > CVMe$. Sabemos que el CM es creciente y que el CVMe es:

$$CT = 4000q^2 - 8000q + 40000$$

El costo variable es:

$$\begin{aligned} CV = w \cdot L = 1000\left((2q-2)^2 + 16\right) &= 4000q^2 - 8000q + 20000 \\ CVMe = \frac{CV}{q} &= 4000q - 8000 + \frac{20000}{q} \end{aligned}$$

El mínimo CVMe es donde CM = CMVe:

$$\begin{aligned} 8000q - 8000 &= 4000q - 8000q + \frac{20000}{q} \\ &\Rightarrow q = \sqrt{5}, P = 9888,54 \end{aligned}$$

Entonces, la oferta existe desde $P = 9888,54$.

Ejercicio 52 [Maximización de ganancias para obtener la curva de oferta a largo plazo[5]]. → Se busca maxi-

[5]Ejercicio tomado de ACCG

mizar las ganancias:

$$\max_{x_1,x_2} \pi = py - CT$$

Y se resuelve la maximización sin restricción:

$$\begin{aligned}
L &= pf\left(x_1,x_2\right) - w_1x_1 - w_2x_2 \\
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= p\frac{\partial f}{\partial x_1} - w_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= p\frac{\partial f}{\partial x_2} - w_2 = 0 \\
p * PM_1 &= w_1 \\
p * PM_2 &= w_2 \\
TMST &= \frac{p * PM_1}{p * PM_2} = \frac{w_1}{w_2}
\end{aligned}$$

Por ejemplo: $y = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$:

$$\begin{aligned}
L &= px_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}} - w_1x_1 - w_2x_2 \\
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}px_2^{\frac{1}{4}}x_1^{\frac{-1}{2}} - w_1 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{1}{4}px_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{-3}{4}} - w_2 = 0
\end{aligned}$$

De la primera derivada parcial:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2}px_2^{\frac{1}{4}}x_1^{\frac{-1}{2}} = w_1$$

Para retornar a y, se multiplica y divide por x_1:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}p\left(x_1^{\frac{-1}{2}}x_2^{\frac{1}{4}}\right)\frac{x_1}{x_1} &= w_1 \\
\frac{py}{2x_1} &= w_1 \\
x_1^* &= \frac{py}{2w_1}
\end{aligned}$$

Análogamente, de la segunda derivada parcial

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{4}px_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{-3}{4}} = w_2$$

Para retornar a y, se multiplica y divide por x_2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}p\left(x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{-3}{4}}\right)\frac{x_2}{x_2} &= w_2 \\
\frac{py}{4x_2} &= w_2 \\
x_2^* &= \frac{py}{4w_2}
\end{aligned}$$

Ahora, se inyectan las demandas de los insumos condicionadas a los precios y salarios en la función de producción.

$$y = x_1^{*\frac{1}{2}} x_2^{*\frac{1}{4}}$$
$$y = \left(\frac{py}{2w_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{py}{4w_2}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$y = \frac{(py)^{\frac{3}{4}}}{(2w_1)^{\frac{1}{2}} (4w_2)^{\frac{1}{4}}}$$
$$y^{\frac{1}{4}} = \frac{p^{\frac{3}{4}}}{(2w_1)^{\frac{1}{2}} (4w_2)^{\frac{1}{4}}}$$
$$y = \frac{p^3}{(2w_1)^2 (4w_2)}$$

Se asume que w_1 y w_2 son fijos:

$$y = \frac{p^3}{16w_1^2 w_2}$$

Como en competencia perfecta se produce únicamente en la segunda etapa, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- $p > \text{mín}\, CVP$
- $y \geq 0$

Vea ahora un ejemplo donde se da la curva de costos totales y se puede aplicar un proceso más directo: Sea $q = \frac{1}{2}(K-16)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(L-16)^{\frac{1}{2}}$ y ambos salarios para los insumos es 1000 .

Nota 15. Es importante destacar que en funciones de producción de este tipo donde no se puede factorizar, se debe analizar distintos valores de Ky L para ver cómo se comportan los rendimientos a escala.

$$\frac{PM_L}{PM_K} = \frac{\frac{1}{4}(L-16)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{1}{4}(K-16)^{\frac{-1}{2}}} = \frac{(K-16)^{\frac{1}{2}}}{(L-16)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1000}{1000} = \frac{w}{r}$$
$$(K-16)^{\frac{1}{2}} = (L-16)^{\frac{1}{2}}$$
$$K = L$$
$$q^* = (L-16)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow L - 16 = q^2 \Rightarrow L = q^2 + 16$$

Recordando la función de costos totales:

$$CT = wl + rK = 1000L + 1000K = 2000L = 2000\left(q^2 + 16\right) = 2000q^2 + 32000$$

Vea que todos los costos totales corresponden a costos variables, lo cual tiene sentido ya que estamos en el largo plazo.

$$CM = 4000q$$

$$P = 4000q$$
$$CVP = 2000q + \frac{32000}{q}$$

Debemos encontrar el mínimo del costo variables promedio para saber dónde existe la oferta. Para ellos tenemos dos opciones equivalentes: derivar e igualar a cero o encontrar la intersección con el Costo Marginal.

Derivar e igualar a cero:

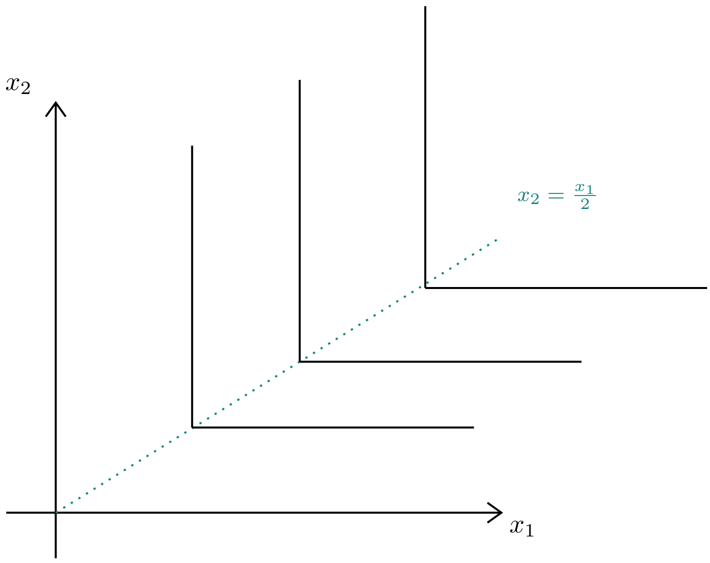
$$2000 - \frac{32000}{q^2} = 0 \Rightarrow q^2 = 16 \Rightarrow q = 4$$

La oferta existe a partir de $q = 4$.

Ejercicio 53 [La oferta de una empresa con tecnología de proporciones fijas[6]]. Considere la siguiente función de producción con tecnología de proporciones fijas o complementos perfectos: $y = \min\{x_1, 2x_2\}$. Además, se sabe que los costos de los insumos son: $w_1 = 10$ y $w_2 = 20$. Grafique las isocuantas y encuentre y grafique la función de oferta.

→ Para graficar las isocuantas conviene trazar los rayos de relevancia para esta función de producción, donde los argumentos del mínimo son iguales:

$$2x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2}$$



Note que se va a producir donde $x_1 = 2x_2$, esto resulta intuitivo ya que sino incurriría en costos innecesarios.
Ahora, para producir y se pueden dar dos posibilidades:
Posibilidad 1,

$$y = x_1 \Rightarrow x_1 = y$$

Posibilidad 2,

$$y = 2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y}{2}$$

Planteemos la función de costos:

$$CT = 10x_1 + 20x_2$$

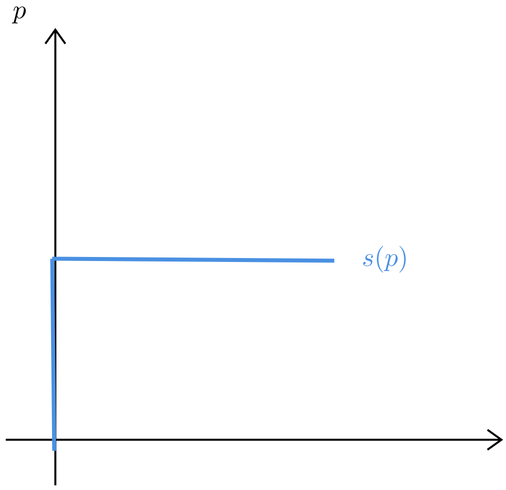
Al poner en términos de y,

$$\Rightarrow CT = 10y + 20\frac{y}{2}$$
$$\Rightarrow CT = 20y$$

El costo marginal es:

$$CM = \frac{dCT}{dy} = 20$$

[6]Ejercicio tomado de ACCG



Por lo tanto, la función de oferta es:

$$y = \begin{cases} 0 \text{ si } p < 20 \\ [0, \infty] \text{ si } p \geq 20 \end{cases}$$

Note que el costo medio es $CM_e = 20$, lo cual no es mayor al CM por lo que la oferta sí existe.

Ejercicio 54 [Mejoras tecnológicas, costos y curva de oferta a largo plazo[7]]. Considere la siguiente función de producción:

$$y = (L-4)^{(1/3)}(K-4)^{(1/3)} \quad ; K, L > 4$$

El costo del capital y trabajo es igual a 1. Ocurre un cambio tecnológico en el que se puede producir el triple con la misma cantidad de insumos.
a) Calcule la nueva función de producción, después de la mejora tecnológica.

→ La función de producción después de la mejora tecnológica es la siguiente:

$$\begin{aligned} y' = 3y \Rightarrow y' &= 3 \cdot \left[(L-4)^{(1/3)}(K-4)^{(1/3)}\right] \\ y' &= 3(L-4)^{(1/3)}(K-4)^{(1/3)} \end{aligned}$$

b) Grafique la función de producción antes y después de la mejora tecnológica. Asuma que la cantidad de capital es constante e igual a 12 .

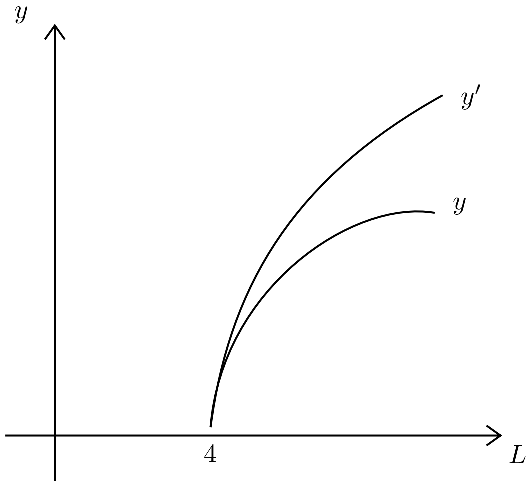
→ Función de producción antes de la mejora tecnológica:

$$y = 2 \cdot (L-4)^{(1/3)}$$

Función de producción después de la mejora tecnológica:

$$y = 6 \cdot (L-4)^{(1/3)}$$

[7]Ejercicio tomado de ACCG



c) Utilice la función de producción con la mejora tecnológica para:
I) Dibujar la curva de costo variable medio de corto plazo si ($K = 12$).
$\rightarrow$ Se utiliza:

$$y = 3(L - 4)^{(1/3)}(K - 4)^{(1/3)}$$

Se sustituye ($K = 12$) en la función de producción y se despeja L :

$$y = 6(L - 4)^{(1/3)} \Rightarrow L = \left(\frac{y}{6}\right) + 4$$

Se sustituye $\left(L = \left(\frac{y}{6}\right) + 4\right)$ y $(w = 1)$ en la función de costo variable medio.

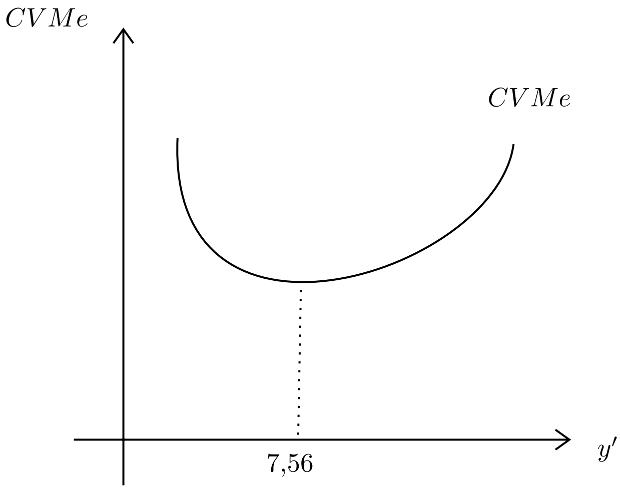
$$CVMe = \frac{wL}{y} \Rightarrow CVMe = \frac{\left(\frac{y^3}{216}\right) + 4}{y}$$

$$CVMe = \frac{y^2}{216} + \frac{4}{y}$$

Se calcula el punto mínimo del costo variable medio:

$$\left(\frac{\partial CVMe}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow y = 6 \cdot 2^{(1/3)} \approx 7,56 \tag{15}$$

A continuación se realiza el gráfico de a función de CVMe.



II) Obtener la curva de oferta a largo plazo.
→ Se parte de la condición de optimalidad.

$$TMST = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{PM_L}{PM_K} = \frac{w}{r}$$
$$\frac{\left\{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3 \cdot \frac{(K-4)^{(1/3)}}{(L-4)^{(2/3)}}\right\}}{\left\{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3 \cdot \frac{(L-4)^{(1/3)}}{(K-4)^{(2/3)}}\right\}} = \frac{w}{r}$$
$$\frac{(K-4)}{(L-4)} = \frac{1}{1} \Rightarrow (K = L)$$

Se sustituye ($K = L$) en la función de producción:

$$y = 3(L-4)^{(1/3)}(K-4)^{(1/3)}$$
$$y = 3(L-4)^{(1/3)}(L-4)^{(1/3)}$$

Se despeja L :

$$y = 3 \cdot (L-4)^{(2/3)} \Rightarrow L^* = \left(\frac{y}{3}\right)^{(3/2)} + 4$$

Dado que $(K = L)$:

$$K^* = \left(\frac{y}{3}\right)^{(3/2)} + 4$$

Se sustituyen los precios de los insumos y $(L^* \wedge K^*)$ en la función de costo total:

$$CT = wL + rK \Rightarrow CT = 2L$$
$$CT = 2 \cdot \left[\left(\frac{y}{3}\right)^{(3/2)} + 4\right]$$

Se calcula el costo marginal:

$$CM = \frac{\partial CT}{\partial y} = \frac{3y^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}$$
$$CM = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, la curva de oferta inversa a largo plazo es la siguiente:

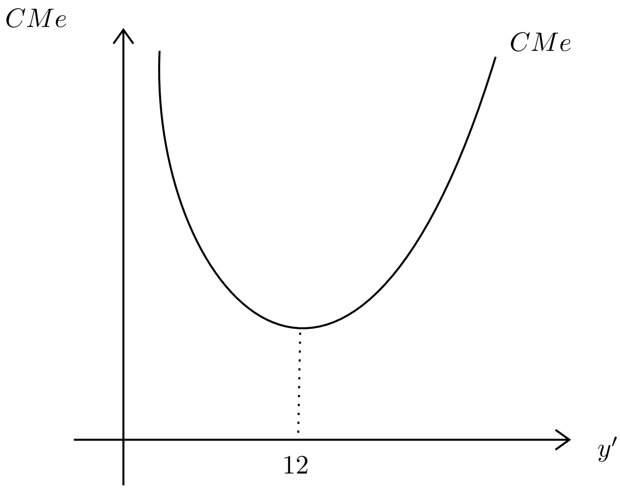
$$P = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot y^{\frac{1}{2}}; y \geq 12$$

III) Dibujar la curva de costo medio de largo plazo.
→ Se calcula el costo medio:

$$CMe = \frac{CT}{y} \Rightarrow CMe = \frac{2 \cdot y^{(1/2)}}{3^{(3/2)}} + \frac{8}{y}$$

El punto mínimo del costo medio es el siguiente:

$$\left(\frac{\partial CMe}{\partial y}\right) = 0 \Rightarrow y = 12$$



En el primer fragmento de la curva (hasta antes del 12) hay economías de escala, mientras que en el segundo fragmento (después del 12) hay deseconomías de escala.

Ejercicio 55 [Curvas de oferta de corto y largo plazo[8]]. Una empresa tiene una función de producción representada por $y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}}$.
Esta empresa puede contrastar toda la mano de obra que desee un salario $w = 2,700$, y todo el capital que desee a una tasa de interés de 20 % (o sea, $r = \frac{1}{5}$). [18]

1. Calcule las funciones de costo marginal y de costo medio de largo plazo. Dibuje en un gráfico las curvas encontradas (preste atención a la forma matemática de estas curvas).
$\rightarrow$ La función a minimizar de la empresa es la siguiente:

$$\min_{L,K} CT = wL + rK$$
$$\text{s.t. } y = L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}}$$

Se plantea el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda \left(y - L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right)$$

Obteniendo las ecuaciones de primer orden:

$$[L] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w - \lambda \left(\frac{1}{4} \cdot L^{-\frac{3}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right) = 0 \Rightarrow \lambda = 4w \left(L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{1}{2}} \right)$$
$$[K] : \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = w - \lambda \left(\frac{1}{2} \cdot L^{\frac{1}{4}} K^{-\frac{1}{2}} \right) = 0 \Rightarrow \lambda = 2r \left(L^{-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right)$$

Igualando ambas condiciones

$$4w \left(L^{\frac{3}{4}} K^{-\frac{1}{2}} \right) = 2r \left(L^{-\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \right)$$

Despejando,

$$\frac{2w}{r} = \frac{K}{L}$$

Nótese que esta condición viene de la siguiente condición de optimalidad:

$$TMST = \frac{PM_L}{PM_K} = \frac{w}{r}$$

[8]Ejercicio tomado de ACCG

Sustituyenod los valores para w y r,

$$\frac{K}{L} = 27,000 \Rightarrow K = 27,000L$$

Sustituyendo dentro de la función de producción

$$\begin{aligned}
y &= L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{2}} \\
y &= L^{\frac{1}{4}} (27,000L)^{\frac{1}{2}} \\
y &= (900 \cdot 30)^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{4}} \\
y &= 30^{\frac{3}{2}} \cdot L^{\frac{3}{4}} \\
L^{\frac{3}{4}} &= 30^{-\frac{3}{2}} y \\
L^* &= 30^{-2} y^{\frac{4}{3}} \\
L^* &= \frac{y^{\frac{4}{3}}}{900}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la condición de optimalidad

$$\begin{aligned}
K &= 27,000L \\
K &= \frac{27,000y^{\frac{4}{3}}}{900} \\
K^* &= 30y^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la función de costos

$$CT = wL + rK = \frac{2,700y^{\frac{4}{3}}}{900} + \frac{30y^{\frac{4}{3}}}{5} = 9y^{\frac{4}{3}}$$

Derivando para obtener la función de costo marginal

$$CMg = \frac{9 \cdot 4}{3} y^{\frac{1}{3}} = 12y^{\frac{1}{3}}$$

la función de costos medio es

$$CMe = \frac{9y^{\frac{4}{3}}}{y} = 9y^{\frac{1}{3}}$$

Para graficar dichas funciones, se obtienen las primeras dos derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{dCMg}{dy} &= 4y^{-\frac{2}{3}} > 0 \\
\frac{d^2CMg}{dy^2} &= \frac{-8}{3} y^{-\frac{5}{3}} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dCMe}{dy} &= 3y^{-\frac{2}{3}} > 0 \\
\frac{d^2CMe}{dy^2} &= -2y^{-\frac{5}{3}} < 0
\end{aligned}$$

2. Si el precio del bien de largo plazo fuera $P = 3$, encuentre cuál es el nivel óptimo de trabajo (L) y de capital (K) de la empresa.

3. Para el nivel de capital (K) encontrado en el punto b, encuentre las curvas de corto plazo de costo medio, costo variable medio y costo marginal y dibújelas junto con las curvas encontradas en el punto a.
   → En el largo plazo se sabe que P = CMg.

$$\begin{aligned} 3 &= 12y^{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{4} &= y^{\frac{1}{3}} \\ &= y^{\frac{1}{3}} \\ y^* &= \frac{1}{4^3} \\ y^* &= \frac{1}{64} \end{aligned}$$

   Sustituyendo los valores para $L^* \wedge K^*$:

$$\begin{aligned} K^* &= 30y^{\frac{4}{3}} = \frac{30}{64^{\frac{4}{3}}} = \frac{30}{4^4} = \frac{15}{128} \\ L^* &= \frac{y^{\frac{4}{3}}}{900} = \frac{1}{64^{\frac{4}{3}} \cdot 900} = \frac{1}{230,400} \end{aligned}$$

4. Se realiza inicialmente un análisis de largo plazo.
   → En el corto plazo, se toma el capital es un costo fijo. Si $K^* = \frac{15}{128}$,

$$y = L^{\frac{1}{4}} \left(\frac{15}{128}\right)^{\frac{1}{2}}$$

   Se despeja L,

$$L = y^4 \cdot \left(\frac{128}{15}\right)^2$$

   El costo variable medio está dado por

$$CVMe = \frac{wL}{y} = \frac{2700 \cdot y^4 \cdot \left(\frac{128}{15}\right)^2}{y} = 196,608y^3$$

   El costo total está dado por

$$\begin{aligned} CT &= rK + wL \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{15}{128}\right) + 2,700L \\ &= \frac{3}{128} + 196,608y^4 \end{aligned}$$

   El costo medio y el costo marginal están dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} CMe &= \frac{CT}{y} = \frac{\frac{3}{128} + 196,608y^4}{y} = \frac{3}{128y} + 196,608y^3 \\ CMg &= \frac{dCT}{dy} = 786,432y^3 \end{aligned}$$

   Note que el CMg es positivo y creciente. El CVMe también es positivo y creciente.

$$
\begin{aligned}
\frac{dCMg}{dy} &= 3 \cdot 786,432y^2 > 0 \\
\frac{d^2CMg}{dy^2} &= 6 \cdot 786,432y > 0 \\
\frac{dCVMe}{dy} &= 3 \cdot 196,608y^2 > 0 \\
\frac{d^2CVMe}{dy^2} &= 6 \cdot 196,608 > 0
\end{aligned}
$$

Para el costo medio, buscamos primero el punto mínimo:

$$
\begin{aligned}
\frac{dCMe}{dy} &= \frac{-3}{128y^2} + 3 \cdot 196,608y^2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{3}{128} = 393,216y^4 \\
&\Rightarrow y = \frac{1}{64} \approx 0,0156
\end{aligned}
$$

Ejercicio 56 [Curvas de oferta de corto y largo plazo[9]]. Una empresa opera en un mercado de competencia perfecta. [22]
La empresa tiene la función de producción: $Y = 20L^{2/5}K^{1/5}$
L es el factor de trabajo y K es el factor capital. Los precios de L y K son 100 y 10 respectivamente.

En el corto plazo la empresa tiene un nivel de K igual a 32 unidades:

a) Determine la función de la oferta de corto plazo de la empresa especificando las condiciones que permiten definirla. Represente en un gráfico las funciones de: costo marginal, costo variable medio y costo total medio.

→ A corto plazo tenemos que $w = 100, r = 10$ y $\bar{K} = 32$. Entonces podemos despejar L de la función de producción a corto plazo:

$$
\begin{aligned}
Y &= 20L^{2/5}(32)^{1/5} \\
\Rightarrow Y &= 20L^{2/5}(2) \\
\Rightarrow Y &= 40L^{2/5} \\
\Rightarrow L &= \left(\frac{Y}{40}\right)^{5/2}
\end{aligned}
$$

Ahora, podemos escribir la función de costo total en términos de la producción Y:

$$
\begin{aligned}
CT &= wL + rK \\
\Rightarrow CT &= 100L + 320 \\
\Rightarrow CT = 100 &\left(\frac{Y}{40}\right)^{5/2} + 320
\end{aligned}
$$

El costo marginal es la derivada del costo total con respecto a la producción:

$$
\begin{aligned}
CM &= 100\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{Y}{40}\right)^{5/2-1}\left(\frac{1}{40}\right) \\
\Rightarrow CM &= \frac{25}{4}\left[\frac{Y}{40}\right]^{3/2} \approx 0,025Y^{3/2}
\end{aligned}
$$

El costo marginal es la curva de oferta inversa siempre que se cumplan las condiciones para el corto plazo: que el costo marginal sea creciente, $Y \geq 0$ y $CM > \text{mín}\, CVMe$.

[9]Ejercicio tomado de ACCG

Calculemos las curvas de costo variable medio:

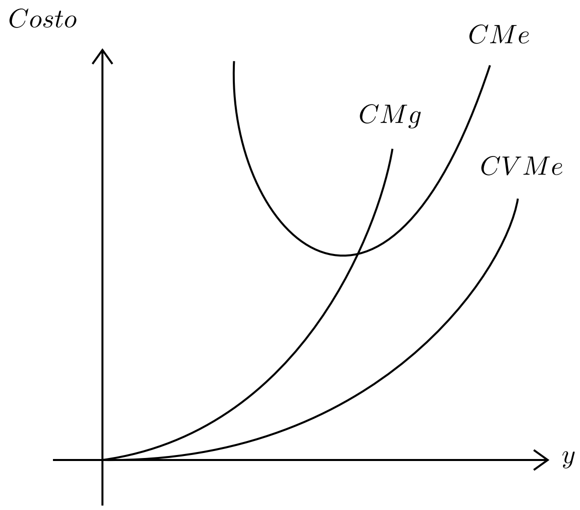
$$\begin{aligned} CV &= wL \\ \Rightarrow CV &= 100\left(\frac{Y}{40}\right)^{5/2} \\ \Rightarrow CVMe &= 100\frac{Y^{3/2}}{40^{5/2}} \approx 0,0099Y^{3/2} \end{aligned}$$

La curva de costo medio:

$$CMe = \left(\frac{1}{Y}\right)100\left(\frac{Y}{40}\right)^{5/2} + \frac{320}{Y}$$

$$\Rightarrow 100\frac{Y^{3/2}}{40^{5/2}} + \frac{320}{Y} \approx 0,0099Y^{3/2} + \frac{320}{Y}$$

La gráfica:



Entonces la curva de oferta inversa es:

$$P = 0,025Y^{3/2}, Y \geq 0$$

La curva de oferta normal es:

$$Y = \left[\frac{P}{0,025}\right]^{2/3}, P \geq 0$$

b) Determine la función de la oferta de largo plazo de la empresa especificando las condiciones que permiten definirla. Represente en un gráfico las funciones de: costo marginal y costo medio.

→ En el largo plazo, tanto L como K son variables. Sabemos que la condición óptima de la empresa es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{PM_L}{PM_K} &= \frac{w}{r} \\ \Rightarrow \frac{20\left(\frac{2}{5}\right)L^{2/5-1}K^{1/5}}{20L^{2/5}\left(\frac{1}{5}\right)K^{1/5-1}} &= \frac{100}{10} \\ \Rightarrow \frac{2K}{L} &= 10 \\ \Rightarrow K &= 5L \end{aligned}$$

Ahora, podemos utilizar esta condición para obtener L en términos de Y y luego obtener la función de costo total en términos de Y también:

$$\begin{aligned} Y &= 20(L)^{2/5}(5L)^{1/5} \\ \Rightarrow Y &= 20L^{3/5}(5)^{1/5} \\ L^{3/5} &= \frac{Y}{20(5)^{1/5}} \\ L &= \left[\frac{Y}{20(5)^{1/5}}\right]^{5/3} \\ L &= \frac{1}{251,98}Y^{5/3} \end{aligned}$$

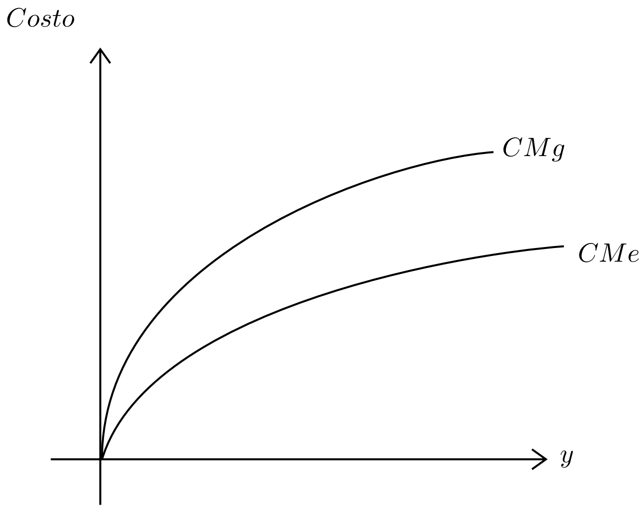
$$\begin{aligned} CT &= wL + rK \\ \Rightarrow CT &= 100L + 10(5L) \\ \Rightarrow CT &= 150\left(\frac{1}{251,98}\right)Y^{5/3} \\ \Rightarrow CT &\approx 0,595Y^{5/3} \\ CM = 0,595\left(\frac{5}{3}\right)Y^{2/3} &\approx 0,992Y^{2/3} \end{aligned}$$

El costo marginal es la curva inversa de oferta si cumple con las siguientes condiciones a largo plazo: que el costo marginal sea creciente, $Y \geq 0$ y que $CM > \text{mín}\, CMe$.

El costo medio es:

$$CMe = \frac{CT}{Y} = 0,595Y^{2/3}$$

La gráfica es:



Entonces la curva de oferta inversa es:

$$P = 0,992Y^{2/3}, Y \geq 0$$

La curva de oferta normal es:

$$Y = \left[\frac{P}{0,992}\right]^{3/2}, P \geq 0$$

Ejercicio 57 [Función de costos: conceptual [10]]. Para cada uno de los siguientes enunciados, indica si son Verdaderos o Falsos. Justifica tu respuesta.

1. *(3 puntos)* El costo promedio en el corto plazo es siempre al menos tan grande como el costo promedio en el largo plazo (es decir, si x es el costo en el corto plazo e y en el largo plazo, entonces $x \geq y$).
Solución: → Verdadero. El costo en el corto plazo es mayor o igual al del largo plazo porque el productor no puede optimizar todos los insumos para minimizar costos de producción. En otras palabras, el costo de corto plazo siempre es alcanzable en el largo plazo, pero en el largo plazo la firma tiene más grados de libertad para minimizar los costos.

2. *(3 puntos)* Una firma con rendimientos constantes a escala en el corto plazo también debe tener rendimientos constantes a escala en el largo plazo.
Solución: → Falso. En el corto plazo, al menos un factor de producción, como el capital, es fijo. Bajo estas condiciones, la firma puede mostrar rendimientos constantes a escala. Sin embargo, en el largo plazo, todos los factores son variables, lo cual puede dar lugar a rendimientos crecientes o decrecientes a escala, no necesariamente constantes.

3. *(3 puntos)* En un mercado competitivo, las firmas maximizan beneficios eligiendo el precio que iguala su costo marginal.
Solución: → Falso. En un mercado perfectamente competitivo, las firmas no eligen el precio; lo toman como dado. Maximizan beneficios ajustando la cantidad producida de modo que el precio del mercado iguale su costo marginal.

4. *(3 puntos)* Si la función de producción de una firma exhibe rendimientos constantes a escala, entonces tiene rendimientos marginales decrecientes en todos los factores de producción.
Solución: → Falso. Considera el caso de sustitución perfecta, donde la función de producción es $F(L, K) = L+K$. Esta función exhibe rendimientos constantes a escala, pero ambos factores tienen también rendimientos marginales constantes.

5. *(3 puntos)* Una firma con rendimientos crecientes a escala tiene costos marginales decrecientes.
Solución: → Verdadero. A medida que aumenta la producción, las firmas se vuelven más eficientes, lo que conduce a una disminución en los costos marginales.

Ejercicio 58 [Costos de corto y largo plazo[11]]. Considera una firma con la siguiente función de producción:

$$F(L, K) = L^{\frac{2}{3}} K^{\frac{1}{3}}$$

donde L denota trabajo y K denota capital.

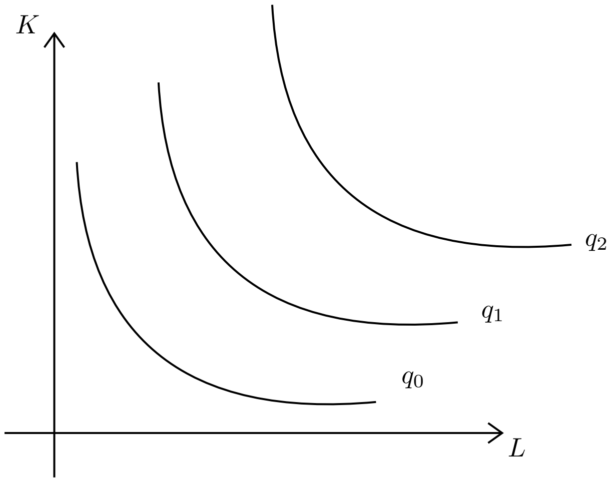
1. *(5 puntos)* Encuentra el producto marginal del trabajo y del capital, y la tasa marginal de sustitución técnica para la firma.
Solución: →

$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{2}{3} L^{-\frac{1}{3}} K^{\frac{1}{3}}, \quad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{1}{3} L^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{2}{3}}$$

$$MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{2K}{L}$$

2. *(5 puntos)* Dibuja y rotula el mapa de isoquantas.
Solución: → (Aquí debe ir un gráfico de isoquantas convexas al origen, con niveles de producción $q_0 < q_1 < q_2$.)

[10] Ejercicio tomado de Gruber (2023)
[11] Ejercicio tomado de Gruber (2023)



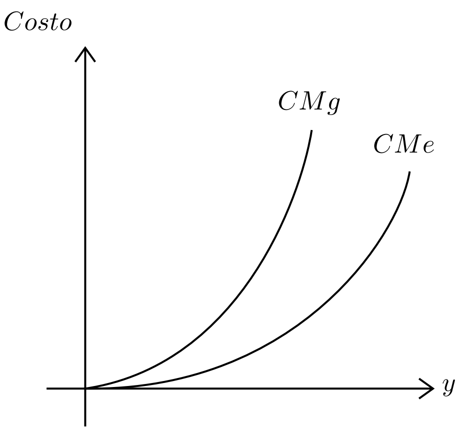
Supón que el salario es $w = 1$ y el costo del capital es $r = 3$. Supón que en el corto plazo, la firma mantiene fijo el capital en $K = 1$.

3. *(5 puntos)* Deriva la curva de costo total de corto plazo como función de la cantidad q.
Solución: → Si $K = 1$, entonces $L = q^3$ y la curva de costo total es:

$$c(q) = 3 + q^3$$

4. *(5 puntos)* Deriva la curva de costo marginal de corto plazo y la curva de costo variable promedio, y gráficas ambas. Tu gráfico no necesita estar a escala pero debe ser cualitativamente correcto.
Solución: →

$$MC(q) = 3q^2, \quad AVC(q) = q^2$$



5. *(5 puntos)* ¿Cuál es la curva de oferta de corto plazo de la firma? ¿Para qué precios producirá una cantidad positiva?
Solución: → La curva de oferta de corto plazo de la firma es:

$$p = MC(q) = 3q^2$$

Dado que $p = MC(q) > AVC(q)$, la firma siempre elegirá producir a cualquier precio.

6. *(5 puntos)* Como mostramos en la pregunta 3, la curva de costo total de largo plazo para una función del tipo:

$$c(q) = (\alpha + \beta) \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Deriva la curva de costo total de largo plazo para $F(K, L) = L^{\frac{2}{3}} K^{\frac{1}{3}}$. ¿Es esta curva de costo total en el largo plazo mayor, menor o igual que la curva de costo en el corto plazo cuando $K = 1$?
Solución: → Aquí $\alpha = \frac{2}{3}$ y $\beta = \frac{1}{3}$, entonces la curva de costo total de largo plazo es:

$$c(q) = \frac{2}{3}(3w)^{\frac{1}{3}}(3r)^{\frac{2}{3}} q^2 = 2w^{\frac{1}{3}} r^{\frac{2}{3}} q^2$$

La curva de costo de largo plazo es menor o igual a la curva de corto plazo en todos los puntos, ya que la firma elige insumos de forma óptima en el largo plazo, mientras que en el corto plazo uno de los factores (el capital) está fijo. Es estrictamente menor a menos que el nivel de demanda óptimo en el largo plazo sea precisamente $K = 1$.
Esto se puede demostrar comparando:

$$2w^{\frac{1}{3}}r^{\frac{2}{3}}q^2 \leq wq^3 + r$$

Lo cual se cumple cuando:

$$\frac{w}{r} = \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{K} \Rightarrow \text{Sustituyendo } \frac{w}{r} = \frac{L}{K} \Rightarrow K = 1$$

Ejercicio 59 [Costos de corto plazo[12]]. Considera una firma con la siguiente función de producción:

$$F(L, K) = AL^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$$

donde A es una variable exógena que representa tecnología.

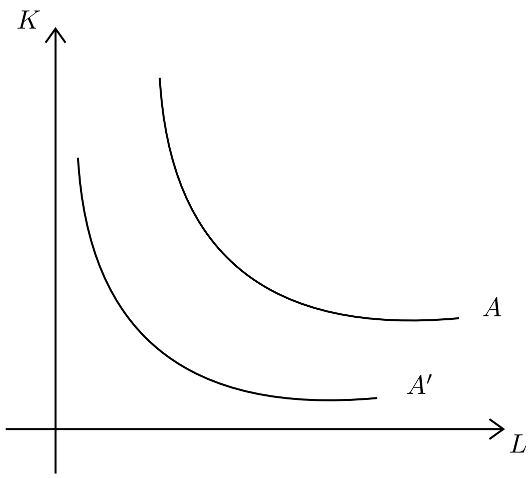
1. *(5 puntos)* Encuentra el producto marginal del trabajo y del capital, y la tasa marginal de sustitución técnica (MRTS) para la firma. ¿Cómo afecta un aumento en A, que representa un progreso tecnológico, al producto marginal del trabajo, del capital y al MRTS?
Solución: $\rightarrow$

$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{2}{3}AL^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}, \quad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{1}{3}AL^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}$$

$$MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{2K}{L}$$

Las mejoras tecnológicas aumentan por igual tanto el producto marginal del trabajo como el del capital, mientras que la MRTS permanece constante.

2. *(5 puntos)* Dibuja y compara las isoquantas para un nivel de producción $q = 30$, con $A = 1$ y $A' = 2$. Explica la intuición detrás del cambio en las isoquantas.
Solución: $\rightarrow$ Las isoquantas se desplazan hacia adentro, tanto en el eje x como en el eje y, indicando que la misma producción puede lograrse con menores cantidades de trabajo y capital. Esto refleja el avance tecnológico de $A = 1$ a $A' = 2$. Si la tecnología continúa mejorando, las isoquantas se acercarán más al origen. En términos intuitivos, esto significa que una mayor tecnología permite un uso más eficiente de recursos para lograr el mismo nivel de output.



Ahora considera una firma con la siguiente función de producción:

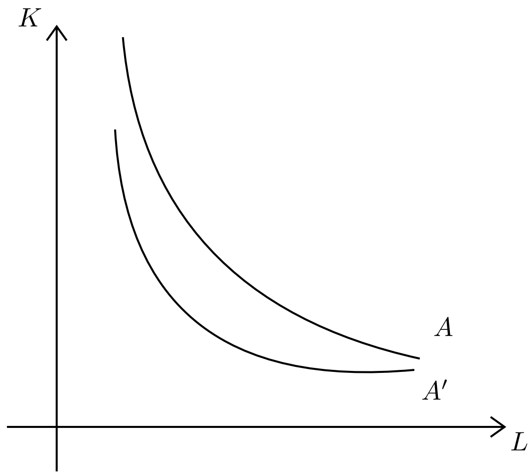
$$F(L, K) = (L + A)^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$$

3. *(5 puntos)* Encuentra el producto marginal del trabajo y del capital, y la tasa marginal de sustitución técnica. ¿Cómo afecta un aumento en A, que representa un progreso tecnológico, a cada uno de ellos? ¿En qué se

[12] Ejercicio tomado de Gruber (2023)

diferencia esto del inciso 1?
Solución: →
$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{2}{3}(L+A)^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}, \quad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{1}{3}(L+A)^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}$$
$$MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{2K}{L+A}$$
Las mejoras tecnológicas aumentan el producto marginal del trabajo y del capital, pero la tasa MRTS disminuye, ya que ahora depende de A. En particular, conforme aumenta A, la firma está menos dispuesta a sustituir capital por trabajo.

4. *(5 puntos)* Dibuja y compara las isoquantas para $q = 30$ con $A = 1$ y $A' = 2$. Explica la intuición detrás del cambio observado.
Solución: → Las isoquantas se desplazan una unidad a la izquierda, indicando que la misma producción puede lograrse con una unidad menos de trabajo manteniendo constante el capital. Esto se debe al avance tecnológico de $A = 1$ a $A' = 2$. Intuitivamente, esto sugiere que el progreso tecnológico reduce la necesidad de trabajo, manteniendo constante el uso de capital. Aquí, el impacto sobre el trabajo es mayor que sobre el capital.



5. *(5 puntos)* ¿Cuál de las dos funciones de producción es más compatible con la siguiente situación: un fabricante de autos puede usar robots para reemplazar trabajadores en la fábrica? Justifica tu respuesta.
Solución: → La segunda función. En este caso, los robots sustituyen a los trabajadores, por lo tanto el efecto tecnológico se incorpora de manera aditiva en el trabajo.

Ejercicio 60 [Teoría de la empresa a corto plazo[13]]. Tienes una fábrica de helados y empleas tanto capital K como trabajo L para producir helado. El capital está fijo en el corto plazo en $\bar{K}$, donde $0 < \bar{K} < 1$. Tu función de producción es:
$$F(L, \bar{K}) = \log(1+L) + \log(1+\bar{K})$$
donde log es el logaritmo natural, i.e., $\log x = y \iff x = e^y$. Recuerda que $\log(1) = 0$.

Supón que no tienes capital en el corto plazo, así que $K = 0$.

1. (3 Puntos) Encuentra la función de costos de corto plazo como función de $w, r, \bar{K}$ y q.
→ La demanda por trabajo en el corto plazo es $L^{SR}(q) = e^q - 1$, así que la función de costos de corto plazo es:
$$C^{SR}(q) = r\bar{K} + w(e^q - 1) = w(e^q - 1)$$
2. (5 Puntos) Encuentra el costo marginal y el costo medio de corto plazo. Si la firma decide producir, ¿cuánto producirá como función del precio?
→ Las curvas de costo marginal y promedio son:
$$MC(q) = \frac{dC^{SR}(q)}{dq} = we^q, \quad AC(q) = \frac{C^{SR}(q)}{q} = \frac{we^q - w}{q}$$
Si la firma decide producir, producirá:
$$p = we^q$$

[13] Ejercicio tomado de Gruber (2023)

3. (7 Puntos) Supón ahora que $\bar{K}$ puede elegirse para minimizar costos dado un nivel de producción. Supón que $w = r = 1$. Resuelve la función de costos de largo plazo y la curva de oferta de largo plazo.
   $\rightarrow$ Cuando la firma minimiza costos:

$$MRTS = -\frac{1}{1+L} \cdot \frac{1+K}{1} = -\frac{w}{r} \Rightarrow 1 + K = \frac{w}{r}(1+L)$$

   Sustituyendo en la función de producción:

$$\log(1+L) + \log\left(\frac{w}{r}(1+L)\right) = q \Rightarrow 2\log(1+L) = q + \log\left(\frac{r}{w}\right) \Rightarrow L = \sqrt{\frac{r}{w}}e^{\frac{q}{2}} - 1 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{w}{r}}e^{\frac{q}{2}} - 1$$

   Sustituyendo en la función de costos:

$$C(q) = 2\sqrt{wr}e^{\frac{q}{2}} - (w+r)$$

   Cuando $w = r = 1$, entonces:

$$C(q) = 2\left(e^{\frac{q}{2}} - 1\right)$$

Capítulo 12

Las economías de escala

Definición 27 [Economía de escala]. Defínase una economía de escala como una situación en la que el costo medio decrece a medida que aumenta la cantidad producida:

$$\frac{\partial CMe}{\partial q} < 0 \tag{12.1}$$

Es decir, si el costo total aumenta en menos proporción que la producción total se está frente a una economía de escala.

Definición 28 [Deseconomía de escala]. Defínase una deseconomía de escala como una situación en la que el costo medio crece a medida que aumenta la cantidad producida:

$$\frac{\partial CMe}{\partial q} > 0 \tag{12.2}$$

Es decir, si el costo total aumenta en mayor proporción que la producción total se está frente a una deseconomía de escala.

Definición 29 [Elasticidad costo total].

$$\mathcal{E}_{CT} = \frac{\partial CT}{\partial q}\frac{q}{CT} \tag{12.3}$$

Nótese que la expresión de la elasticidad costo total es equivalente a:

$$\mathcal{E}_{CT} = \frac{CMg}{CMe} \tag{12.4}$$

Nótese entonces que:

- Si $CMg < CMe$, el costo total aumenta menos que proporcionalmente con respecto a la producción total y por tanto habría una economía de escala.
- Si $CMg > CMe$, el costo total aumenta más que proporcionalmente con respecto a la producción total y por tanto habría una deseconomía de escala.

De esta manera, ocurre que bajo unos rendimientos crecientes, al magnificar los insumos de producción de un factor λ, los costos de producción crecen en menos de un factor λ, por lo que al haber rendimientos crecientes, se configuran economías de escala, mas no ocurre lo contrario: economías de escala no necesariamente generan rendimientos crecientes. Es posible que los productores varíen las proporciones en que utilicen los insumos y que los rendimientos también varíen en otras proporciones.

Capítulo 13

La función de beneficios

Definición 30 [Ingresos económicos]. Para efectos de definir la función de beneficios económicos, defínase los ingresos como el resultado de la producción alcanzada multiplicada por el precio al cual dicha producción es vendida:

$$Ingresos = p \cdot q \tag{13.1}$$

donde $q = f(z_1, z_2, ..., z_n)$.

Definición 31 [Beneficios económicos]. Defínase el beneficio económico como la diferencia entre el ingreso que recibe una firma (empresa) y los costos en los que incurre esta.

$$\pi = pq - C(w_1, w_2, ..., w_n) \tag{13.2}$$

Nota: no confundir beneficios contables y beneficios económicos. A las personas economistas les suele interesar la figura de los beneficios económicos y no tanto los contables.

Por tanto, el problema de maximizar los beneficios económicos de la empresa pueden expresarse de la siguiente manera: [Maximización de los beneficios]

$$\max_{q} \quad pq - C(q, \vec{w}, \vec{z}) \tag{13.3}$$

Note que derivando con respecto a q se obtiene la siguiente condición de primer orden:

$$p - \frac{\partial C(q, \vec{w}, \vec{z})}{\partial q} = 0$$

$$p = \frac{\partial C(q, \vec{w}, \vec{z})}{\partial q} \tag{13.4}$$

Esto, en efecto, demuestra que bajo un mercado de competencia perfecta el precio ha de ser igual al costo marginal, lo cual no es más que una reformulación de la condición de arbitraje que exige que $IMg = CMg$. Ahora, planteando el problema de una forma más general:

$$\max_{\vec{Z}} \quad p \cdot f(z_1, z_2, ..., z_n) - C(w_1, w_2, ..., w_n; z_1, z_2, ..., z_n) \tag{13.5}$$

Entonces se obtienen las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
p\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_1} - \frac{C(\partial \vec{w}), \vec{z}}{\partial z_1} \leq 0 \Rightarrow \qquad & p\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_1} \leq \frac{C(\partial \vec{w}), \vec{z}}{\partial z_1} \\
p\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_2} - \frac{C(\partial \vec{w}), \vec{z}}{\partial z_2} \leq 0 \Rightarrow \qquad & p\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_2} \leq \frac{C(\partial \vec{w}), \vec{z}}{\partial z_2} \\
& \vdots \\
p\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_n} - \frac{C(\partial \vec{w}), \vec{z}}{\partial z_n} \leq 0 \Rightarrow \qquad & p\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_n} \leq \frac{C(\partial \vec{w}), \vec{z}}{\partial z_n}
\end{aligned}$$

Capítulo 14

La dualidad del problema de la empresa

Note que tras la resolución del problema de la maximización de la producción y el problema de la minimización de costos, se llegó a la misma condición de optimalidad, por lo que se puede concluir que tanto el problema de la maximización de la producción como la minizamición de los costos son problemas equivalentes.

Es por esta razón de que se habla de una dualidad en el problema de la firma. Dado que se parte del supuesto que las empresas tienen un comportamiento maximizador, pueden adecuar su conducta para estos fines de manera equivalente mediante cualquiera de estos dos problemas.

Para efectos prácticos, en algunas ocasiones será más sencillo recurrir a uno u otro problema dependiendo de las funciones en cuestión, pero el resultado será equivalente.

Capítulo 15

Los mercados de competencia perfecta

Definición 32 [Mercado de competencia perfecta]. Defínase un mercado de competencia perfecta como aquel en el cual los agentes se comportan como precio-aceptantes, es decir, que consideran los precios como dados y que no tienen alguna posibilidad de injerencia en este mediante su comportamiento.

La particularidad esencial a considerar en los mercados de competencia perfecta, es que para los oferentes (productores), en el óptimo, debe cumplirse la condición de arbitraje. Es decir, que los productores producirán hasta el punto en que $IMg = CMg$, dado que bajo cualquier otro supuesto, será posible mejorar cambiando la decisión de producción:

- $IMg > CMg$: la última unidad producida aporta más a los ingresos que a los costos, de manera que aún se puede obtener ganancias produciendo más.
- $IMg < CMg$: la última unidad producida aporta más a los costos que a los ingresos, de manera que aún se puede obtener ganancias produciendo menos.
- $IMg = CMg$: la última unidad producida aporta lo mismo a los costos que a los ingresos.

Sin embargo, bajo el supuesto de un mercado de competencia perfecta, el precio está dado y es fijo, no varía, de modo que $p = IMg$, y por ende en el óptimo el productor ofrecerá unidades hasta el punto que $p = CMg$.

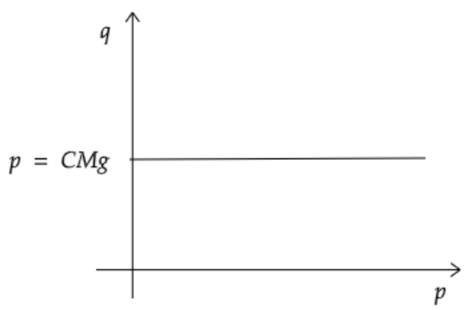


Figura 15.1: Oferta de una empresa en un mercado de competencia perfecta

Note que entonces se generan tres grandes posibilidades:

$$q* = \begin{cases} +\infty & si \quad p > CMg \\ \in [0, \infty[& si \quad p = CMg \\ 0 & si \quad p < CMg \end{cases}$$

Ejemplo 21 [Funciones de producción]. Una empresa se enfrenta a la función de producción $Q(L, K) = L^{\alpha}K^{\beta}$, donde α y β son parámetros positivos. Luego, L y K son los insumos que la empresa emplea y r y w son los costos respectivos de dichos insumos, los cuales se adquieren en un mercado competitivo.

1. Encuentre la función de CTde la empresa en términos de parámetros y de Q.
   Primeramente, se debe maximizar la cantidad de producción sujeta a una restricción de costos, en donde ambos insumos son variables de decisión de la empresa. Es decir:

$$\max_{L,K} Q(L,K) \quad s.a \quad CT = wL + rK$$
$$\mathcal{L} = L^{\alpha}K^{\beta} + \lambda(CT - wL - rK)$$

Y las condiciones de primer orden serían:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= 0 \Leftrightarrow \alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} - \lambda w = 0 \Rightarrow & \frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{w} &= \lambda \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= 0 \Leftrightarrow L^{\alpha}\beta K^{\beta-1} - \lambda r = 0 \Rightarrow & \frac{L^{\alpha}\beta K^{\beta-1}}{r} &= \lambda \end{aligned}$$

Luego, tiene que ser que $\lambda = \lambda$, por lo que:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta w} &= \frac{L^{\alpha}\beta K^{\beta-1}}{r} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha L^{\alpha-1} \cdot r}{\beta w L^{\alpha}} &= \frac{K^{\beta-1}}{K^{\beta}} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha L^{\alpha-1-\alpha} \cdot r}{\beta w} &= K^{\beta-1-\beta} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha \frac{1}{L} \cdot r}{\beta w} &= \frac{1}{K} \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha r}{\beta w L} &= \frac{1}{K} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta w L}{\alpha r} &= K \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en la función de producción:

$$\begin{aligned} Q &= L^{\alpha}K^{\beta} \\ Q &= L^{\alpha}\left(\frac{\beta w L}{\alpha r}\right)^{\beta} \\ Q &= L^{\alpha} \cdot L^{\beta}\left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\beta} \\ Q &= L^{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\beta} \\ Q \cdot \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\beta} &= L^{\alpha+\beta} \\ \left(Q \cdot \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} &= L^{*} \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta w L^*}{\alpha r} &= K^* \\
\frac{\beta w \left(\left(Q \cdot \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right)}{\alpha r} &= K^* \\
\frac{\beta w Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{\alpha r} &= K^* \\
\frac{\beta w Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{\alpha r} &= K^* \\
\frac{\beta w \cdot \frac{1}{(\beta w)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} (\alpha r)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{\alpha r} &= K^* \\
\frac{\frac{\beta w}{(\beta w)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} (\alpha r)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{\alpha r} &= K^* \\
\frac{(\beta w)^{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} (\alpha r)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{\alpha r} &= K^* \\
(\beta w)^{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} (\alpha r)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1} &= K^* \\
(\beta w)^{\frac{\alpha+\beta-\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} (\alpha r)^{\frac{\beta-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} &= K^* \\
(\beta w)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha r)^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} &= K^* \\
\left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} &= K^* \\
\left(Q \cdot \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} &= K^*
\end{aligned}
$$

2. Asumiendo que la empresa opera en un mercado competitivo, halle la curva de oferta de esta empresa en el largo plazo.
   Reemplazando los valores de L^* y K^* en la función de costos:

$$
\begin{aligned}
CT^* &= wL^* + rK^* \\
&= w\left(Q \cdot \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + r\left(Q \cdot \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\
&= Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} r \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\
&= Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[w \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[w^{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r^{1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[w^{\frac{\alpha+\beta-\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r^{\frac{\alpha+\beta-\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right] \\
&= Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]
\end{aligned}
$$

A partir de lo anterior, se puede derivar que el costo marginal es:

$$
\begin{aligned}
CMg =& \frac{\partial CT}{\partial Q} \\
=& \frac{\partial}{\partial Q}\left[Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)\right] \\
=& \frac{1}{\alpha+\beta}Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1}\left(w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) \\
=& \frac{1}{\alpha+\beta}Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\left(w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)
\end{aligned}
$$

Luego, en un mercado competitivo, se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
p =& CMg \\
\Leftrightarrow p =& \frac{1}{\alpha+\beta}Q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\left(w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)
\end{aligned}
$$

3. Para cada posible combinación de α y β, determine los rendimientos de escala de esta empresa. De igual forma, determine las economías a escala de esta empresa.

   - Rendimientos de escala

   - Economías de escala

4. Ahora, suponga que la empresa se encuentra operando en el corto plazo, por lo que su función de producción se convierte en $Q(L, K) = L^{\alpha}\overline{K}^{\beta}$, siendo $\overline{K}$ una constante positiva. Para este caso, halle la curva de oferta de esta empresa.

5. Determine qué tipo de rendimientos presenta $Q(L)$ para cada posible valor de α.

Ejemplo 22 [Costos y función de producción]. Considere la siguiente función de producción:

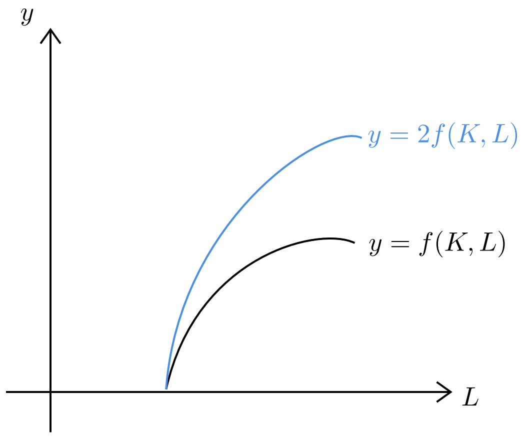
$$
\begin{aligned}
y =& (L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}} \\
K, L > 4&
\end{aligned}
$$

El costo de capital y trabajo es igual a 2. Ocurre un cambio tecnológico en el que se puede producir el doble con la misma cantidad de insumos.

- Calcule la función de producción después de la mejora tecnológica
  Observe que la mejora tecnológica es que ahora se puede producir el doble con los mismos insumos. Esto quiere decir que si antes con una cierta cantidad de insumos se producía y, ahora, la misma cantidad insumos produce $2y$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
y =& f(K, L) = (L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}} \\
y' =& 2y = 2 \cdot f(K, L) = 2 \cdot \left[(L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

- Grafique la función de producción antes y después de la mejora tecnológica. Asuma que la cantidad de capital es constante e igual a 8.



- Utilice la función de producción con la mejora tecnológica para:
  - Dibujar la curva de costo variable medio de corto plazo si $K = 8$

$$
\begin{aligned}
y' =&(L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow y' =&2\left[(L-4)^{\frac{1}{2}}(8-4)^{\frac{1}{2}}\right] \\
\Leftrightarrow y' =&2\left[(L-4)^{\frac{1}{2}}(4)^{\frac{1}{2}}\right] \\
\Leftrightarrow y' =&2\left[2(L-4)^{\frac{1}{2}}\right] \\
\Leftrightarrow y' =&4(L-4)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Y despejando L:

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{4} =&(L-4)^{\frac{1}{2}} \\
\left(\frac{y'}{4}\right)^2 =&L-4 \\
\left(\frac{y'}{4}\right)^2 + 4 =&L
\end{aligned}
$$

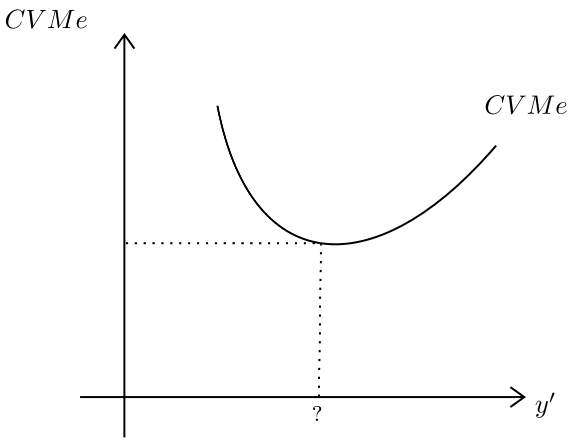
Luego el costo variable sería $CV = w \cdot L$ y sustituyendo L y $w = 2$:

$$
\begin{aligned}
CV =&w \cdot L \\
\Leftrightarrow CV =&2 \cdot \left(\left(\frac{y'}{4}\right)^2 + 4\right) \\
\Leftrightarrow CV =&\frac{y'^2}{8} + 8
\end{aligned}
$$

Y se sabiendo que $CVMe = \frac{CV}{y}$ entonces:

$$
\begin{aligned}
CVMe =&\frac{\frac{y'^2}{8} + 8}{y'} \\
=&\frac{y'}{8} + \frac{8}{y'}
\end{aligned}
$$

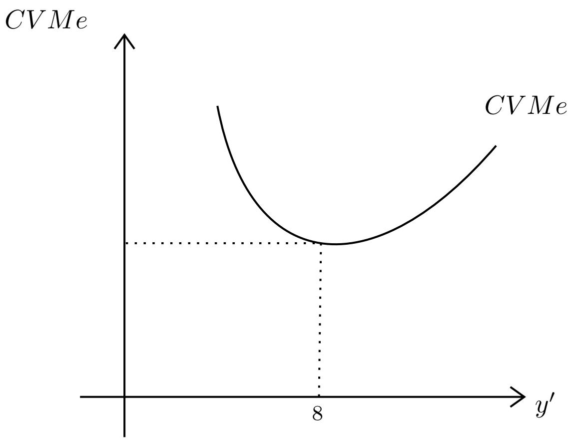
Y esto se ve así:



¿Cuál es el nivel de producción y' que hace que se minimice el costo variable medio?

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial CVMe}{\partial y'} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{y'}{8}+\frac{8}{y'}\right] &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{8}-\frac{8}{y'^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{8} &= \frac{8}{y'^2} \\
\Leftrightarrow \frac{y'^2}{8} &= 8 \\
\Leftrightarrow y'^2 &= 64 \\
\Leftrightarrow y' &= \pm\, 8
\end{aligned}
$$

Sin embargo se puede descartar la opción de producir cantidades negativas, por lo que:



- Obtener la curva de oferta de largo plazo

  Se tiene la función de producción:

$$y' = 2\left[(L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}}\right]$$

Se va a usar el procedimiento de minimización de costos para encontrar el costo marginal de la empresa y así saber cuál es la curva de oferta.

Se sabe que en el óptimo debe cumplirse:

$$
\begin{aligned}
TMST_{L,K} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{\cancel{2} \cdot \left[\frac{1}{2}(L-4)^{\frac{1}{2}-1}(K-4)^{\frac{1}{2}}\right]}{\cancel{2} \cdot \left[\frac{1}{2}(L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}-1}\right]} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{\left[\frac{1}{2}(L-4)^{\frac{-1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[\frac{1}{2}(L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{-1}{2}}\right]} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(L-4)^{\frac{1}{2}}}(K-4)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left[\frac{1}{2}(L-4)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(K-4)}^{\frac{1}{2}}\right]} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{\frac{(K-4)^{\frac{1}{2}}}{2(L-4)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{(L-4)^{\frac{1}{2}}}{2(K-4)^{\frac{1}{2}}}} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{\frac{\cancel{2}(K-4)^{\frac{1}{2}}}{(L-4)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{\cancel{2}(L-4)^{\frac{1}{2}}}{(K-4)^{\frac{1}{2}}}} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{(K-4)^{\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}}}{(L-4)^{\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}}} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{K-4}{L-4} =& \frac{w}{r}
\end{aligned}
$$

Y luego, sabiendo que $w = 2$ y $r = 2$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{(K-4)^{\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}}}{(L-4)^{\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}}} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{K-4}{L-4} =& 1 \\
\Leftrightarrow \frac{(K-4)^{\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}}}{(L-4)^{\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}}} =& \frac{w}{r} \\
\Leftrightarrow K-4 =& L-4 \\
\Leftrightarrow K =& L
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la función de producción:

$$
\begin{aligned}
y' =& 2\left[(L-4)^{\frac{1}{2}}(K-4)^{\frac{1}{2}}\right] \\
y' =& 2\left[(L-4)^{\frac{1}{2}}(L-4)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

Y despejando L:

$$
\begin{aligned}
y' =& 2\left[(L-4)^{\frac{1}{2}}(L-4)^{\frac{1}{2}}\right] \\
y' =& 2(L-4)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\
y' =& 2(L-4) \\
\frac{y'}{2} =& L-4 \\
\boxed{\frac{y'}{2}+4=L^*}
\end{aligned}
$$

Y en consecuencia:

$$\boxed{\frac{y'}{2}+4=K^*}$$

Ahora, evaluando los niveles óptimos de contratación de L^* y K^* en la función de costos totales:

$$
\begin{aligned}
CT =& w\cdot L^* + r\cdot K^* \\
=& 2\cdot\left(\frac{y'}{2}+4\right)+2\cdot\left(\frac{y'}{2}+4\right) \\
=& 4\left(\frac{y'}{2}+4\right)
\end{aligned}
$$

Y recordando la fórmula del costo marginal:

$$
\begin{aligned}
CMg =& \frac{\partial CT}{\partial y'} \\
=& \frac{\partial}{\partial y'}\left[4\left(\frac{y'}{2}+4\right)\right] \\
=& 4\cdot\frac{1}{2} \\
=& 2
\end{aligned}
$$

Por lo canto la curva de oferta sería $\boxed{\text{P} = 2}$, sin embargo, dado que el costo variable mínimo era de 8, y este es mayor qu el costo marginal, en teoría no habría oferta.

- Dibujar la curva de costo medio de largo plazo

Ejercicio 61 [Oferta de la empresa y la industria en un mercado competitivo[1]]. En un mercado perfectamente competitivo en el que todas las empresas son idénticas, la función de costo total de cada empresa en el largo plazo es:

$$C(y) = 8 + 2y^{\frac{3}{2}}$$

a) Determine la ecuación de la oferta de la empresa en el largo plazo, especificando las condiciones que la definen. Nota: Debe indicar la oferta directa y la oferta inversa y sus condiciones.

→ Se calcula el costo marginal, ya que en un mercado competitivo ($CM = P$).

$$CMg = 3y^{\frac{1}{2}}$$

[1]Ejercicio tomado de ACCG

Se encuentra el punto mínimo del costo medio para obtener el punto a partir del cual existe oferta.

$$CMe = \frac{8}{y} + 2y^{\frac{1}{2}}$$

Se despeja y.

$$3y^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{y} + 2y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = 4$$

Por lo tanto, la oferta inversa de la empresa en el largo plazo es la siguiente:

$$P = 3y^{\frac{1}{2}}; y \geq 4$$

La oferta directa de la empresa en el largo plazo es:

$$y = \left(\frac{P}{3}\right)^2; P \geq 6$$

b) Si en el mercado en el que operan estas empresas hubiese un precio igual a 10, demuestre si el mercado está o no en equilibrio en el largo plazo.
→ Para que el mercado esté en equilibrio, se debe cumplir ($\pi = 0$), por lo que se calculan los beneficios.

$$\pi = IT - C(y) \Rightarrow \pi = P \cdot y - C(y)$$

Se encuentra la producción cuando el precio es ($P = 10$) al sustituir dicho valor en la función de oferta directa.

$$y = \frac{P^2}{9} \Rightarrow y = \frac{100}{9}$$

Posteriormente, se calculan los beneficios.

$$\pi = 10 \cdot \left(\frac{100}{9}\right) - \left[8 + 2 \cdot \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\pi = \frac{784}{27} \approx 29,04$$

Note que ($\pi > 0$), por lo que el mercado no está en equilibrio.
c) Si la demanda del mercado tiene la forma: ($P = 126 - 2Y$), donde Y es la producción de todas las empresas, determine, en una situación de equilibrio de largo plazo, cuánto es la producción (Y) y cuántas empresas están produciendo en dicho mercado.
→ En un mercado competitivo, la empresa produce donde ($CM = P = CMe$).

$$CM = CMe \Rightarrow 3y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{y}\right) + 2y^{\frac{1}{2}}$$
$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{y} \Rightarrow y = 4$$

Se sustituye ($y = 4$) en el costo marginal, ya que ($CM = P$).

$$CM = 3y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow CM = 3 \cdot (4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow P = 6 \tag{13}$$

Se evalúa ($P = 6$) en la demanda de mercado.

$$P = 126 - 2Y \Rightarrow Y = 60$$

A continuación se calcula el número se empresas (n) utilizando los datos anteriores.

$$n = \frac{Y}{y} \Rightarrow n = \frac{60}{4} \Rightarrow n = 15 \tag{14}$$

Ejercicio 62 [Curva de oferta de largo plazo[2]]. Considera una firma con la siguiente función de producción:

$$F(K, L) = L^{\alpha} K^{\beta}$$

La firma enfrenta un salario w y una tasa de alquiler del capital r.

1. *(5 puntos)* Muestra que la curva de oferta de largo plazo para esta función de producción es:

$$p = \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta) q^{\frac{1}{\alpha+\beta} - 1}$$

Solución: → Para determinar la elección óptima de trabajo y capital, igualamos la tasa marginal de sustitución técnica (MRTS) con $-w/r$:

$$MRTS = -\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\alpha L^{\alpha-1} K^{\beta}}{\beta L^{\alpha} K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha K}{\beta L} = -\frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\alpha K}{\beta L} = \frac{w}{r}$$

Sustituyendo esto en la función de producción:

$$q = L^{\alpha} \left(\frac{\beta w}{\alpha r} L\right)^{\beta} = \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\beta} L^{\alpha+\beta} \Rightarrow L = \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Luego:

$$K = \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Sustituyendo en la función de costo:

$$C(q) = wL + rK = w \left(\frac{\alpha r}{\beta w}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + r \left(\frac{\beta w}{\alpha r}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = (\alpha + \beta) \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

La condición de maximización de beneficios es $MR = MC = p$, lo que lleva a:

$$p = \left(\frac{w}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (\alpha + \beta) q^{\frac{1}{\alpha+\beta} - 1}$$

2. *(5 puntos)* Encuentra la curva de oferta de largo plazo como función de r, w, y q.
Solución: → Si la MRTS es constante y se define como $MRTS = -1$, entonces dependiendo de $-w/r$ se analizan tres casos:
Caso 1: $-w/r > MRTS \Rightarrow r > w$. La firma usará solo trabajo y el costo será $C(q) = wq$, por lo tanto $MC = w \Rightarrow p = w$.
Caso 2: $-w/r < MRTS \Rightarrow r < w$. La firma usará solo capital y el costo será $C(q) = rq \Rightarrow MC = r \Rightarrow p = r$.
Caso 3: $-w/r = MRTS \Rightarrow r = w$. La firma es indiferente entre capital y trabajo, el costo total es $C(q) = rq \Rightarrow MC = r \Rightarrow p = r$ o $p = w$.
Entonces, la curva de oferta de largo plazo es:

$$p = \begin{cases} w & \text{si } r > w \\ r & \text{si } r < w \\ r \text{ o } w & \text{si } r = w \end{cases}$$

[2]Ejercicio tomado de Gruber (2023)

3. *(5 puntos)* Verdadero o Falso: *Un aumento en los salarios siempre disminuye la oferta en el largo plazo.*
   Solución: $\rightarrow$ Falso. Si $r < w$, entonces la curva de oferta de largo plazo no depende de los salarios, sino del costo de capital.

4. Sea $L(w, r, q)$ la demanda de trabajo como función de los salarios w, tasa de alquiler r y producción q. Define la elasticidad de la demanda por trabajo como:

$$\varepsilon_w^L = \frac{\partial L(w,r,q)}{\partial w} \cdot \frac{w}{L(w,r,q)}$$

5. *(5 puntos)* Verdadero o Falso: *La elasticidad de la demanda por trabajo en el largo plazo es siempre mayor (en valor absoluto) que en el corto plazo. Justifica tu respuesta.*
   Solución: $\rightarrow$ Verdadero. En el corto plazo, la demanda por output no depende del precio si el capital está fijo. El único ajuste posible es vía salario. Entonces, la elasticidad de corto plazo es cero. En el largo plazo, el capital es variable, por lo tanto hay sustitución entre trabajo y capital cuando cambia el salario.

Ejercicio 63 [Oferta de largo plazo y costos de insumos variables[31]]. 1. (5 Puntos) Encuentra la curva de oferta de largo plazo para esta función de producción. ¿Cuál es la curva de oferta de largo plazo para esta firma?
$\rightarrow$ Para determinar la elección óptima de trabajo y capital, igualamos la $MRTS$ con $-w/r$:

$$-\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L} = \frac{w}{r}.$$

Sustituyendo esto en la función de producción, obtenemos:

$$q = \left(\frac{w}{r}L\right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}},$$

$$L = \left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} q,$$

lo que lleva a:

$$K = \left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} q.$$

Sustituyendo esto en la función de costos, encontramos:

$$\begin{aligned} C(q) &= wL + rK = w\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} q + r\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}} q \\ &= q\left(w\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{2}} + r\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}q. \end{aligned}$$

Para la maximización de beneficios (donde $MR = MC$), tenemos:

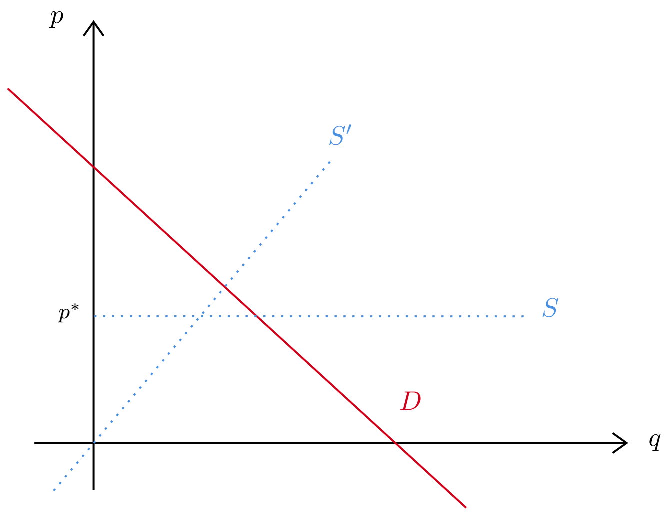
$$p = 2w^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}.$$

Supón que la demanda está dada por $Q_d = 10 - p$, y los salarios y el costo del capital están fijados en $w = 1$ y $r = 1$ respectivamente.

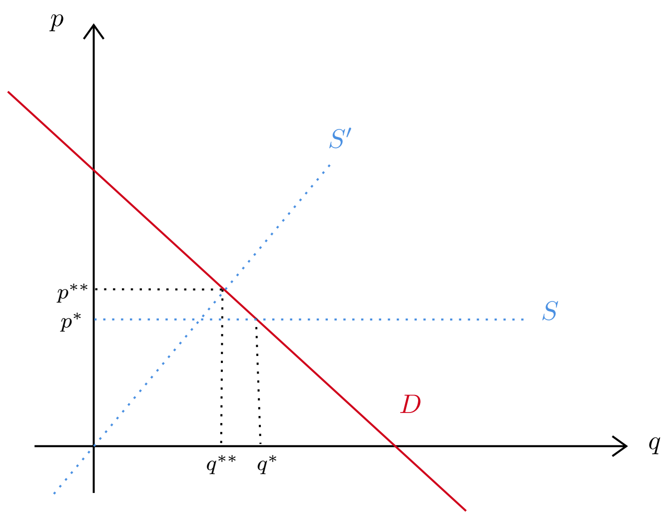
2. (5 Puntos) Encuentra el precio y cantidad de equilibrio.
   $\rightarrow$ De la Parte 1, determinamos que en equilibrio $p^* = 2(1)^{\frac{1}{2}}(1)^{\frac{1}{2}} = 2$, lo que da como resultado $q^* = 10 - p^* = 8$.
   Ahora supón que el salario no es constante, sino que en cambio aumenta con la producción total. En particular, supón que hay 6 firmas y $w = \frac{q}{6}$.

3. (5 Puntos) Justifica por qué los salarios pueden estar relacionados positivamente con la cantidad producida.
   $\rightarrow$ Mientras más produce una empresa, más trabajo se requiere usualmente, tanto en términos de esfuerzo como de horas. Para compensar este aumento en demanda, los salarios podrían incrementarse. Adicionalmente, ofrecer salarios más altos a medida que aumentan los niveles de producción puede servir como incentivo para que los trabajadores mantengan o incluso aumenten su productividad.

4. (5 Puntos) ¿Cuál es la nueva curva de oferta de largo plazo? Grafica y compara la curva vieja y la nueva de oferta suponiendo que los salarios están fijados en $w = 1$ para la curva de oferta vieja y la tasa de capital está fijada en $r = 1$ para ambas. Proporciona una intuición.
(Recuerda que la firma todavía toma w y r como dados cuando minimiza costos).
→ La nueva curva de oferta de largo plazo se obtiene al reemplazar la tasa salarial constante con $w = \frac{q}{6}$, donde q es la cantidad agregada producida, que denotamos como q_i. En equilibrio, tenemos $q_i = \frac{q}{6}$. Entonces, la curva de oferta individual es
$$p = 2r^{\frac{1}{2}}q_i^{\frac{1}{2}}.$$
Para obtener la curva agregada, necesitamos una relación entre q_i y q. Después de un poco de álgebra:
$$q_i = \frac{1}{r}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow q = \frac{6}{r}\left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow p = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}.$$



5. (6 Puntos) Supón que la demanda sigue siendo $Q_d = 10 - p$. ¿Cómo se comparan el precio y la cantidad de equilibrio cuando $w = 1$ frente a cuando $w = \frac{q}{6}$? No necesitas proporcionar una expresión algebraica, basta con mostrarlo en una gráfica y dar una intuición.
→ En el nuevo equilibrio, tenemos $q^{**} < q^*$ y $p^{**} > p^*$. Como la curva de oferta se desplaza de una posición horizontal a una pendiente positiva desde su estado constante anterior, la nueva cantidad de equilibrio disminuye para la misma demanda. Además, al aumentar los costos, el precio de equilibrio también debería aumentar, ya que la firma tiene un incentivo a vender a un precio más alto. Gráficamente:



Ejercicio 64 [Oferta agregada[4]]. En el centro de Boston hay un mercado de agricultores muy activo. En este mercado, hay tres huertos de manzanos en la zona que se especializan en producir el mismo tipo de manzanas. Las funciones de costo de corto plazo para estos productores son:

[4] Ejercicio tomado de Gruber (2023)

$$
\begin{aligned}
c_1(q) &= \frac{1}{4}q^2 + 5q - 1, \\
c_2(q) &= \frac{1}{2}q^2 + 3q, \\
c_3(q) &= \frac{1}{2}q^2 + 2q.
\end{aligned}
$$

1. (5 Puntos) Deriva las curvas de oferta de corto plazo para cada firma. ¿Las firmas deciden producir a cualquier precio?
   $\rightarrow$ Observamos que $c_1(q) = \frac{1}{4}q^2 + 5q - 1$. La firma 1 maximiza sus beneficios cuando el ingreso marginal (precio p) es igual al costo marginal:
   $$p = \frac{2}{5}q.$$
   Así, cada firma tiene curvas de oferta de $q_1 = 2p$, $q_2 = 1{,}5p$ y $q_3 = p$.
   Dado que las firmas producen de acuerdo con la maximización de beneficios, y hay rendimientos decrecientes a escala, sabemos que $p = MC(q) > AVC(q)$ y por lo tanto, la firma nunca optará por cerrar.
2. (5 Puntos) Sea Q_s la oferta agregada de manzanas en el mercado agrícola. Deriva la oferta agregada de manzanas como función del precio de las manzanas.
   $\rightarrow$ La oferta agregada de manzanas en el mercado agrícola es:
   $$Q_S(p) = 2p + 1{,}5p + p = 4{,}5p.$$
   Supón que la demanda por manzanas está dada por $Q_d = 1 - p$.
3. (5 Puntos) ¿Cuál es la cantidad y precio de equilibrio del mercado Q^* y p^*? ¿Cuánto produce cada firma en equilibrio?
   $\rightarrow$ El equilibrio se alcanza cuando la oferta es igual a la demanda. Dado que:
   $$4{,}5p^* = 1 - p^*,$$
   obtenemos $p^* = \frac{1}{5{,}5} = \frac{2}{11}$. Por lo tanto, la cantidad de equilibrio es $Q^* = 1 - p^* = \frac{9}{11}$. En este equilibrio, cada firma produce: $q_1 = 2p^* = \frac{4}{11}$, $q_2 = 1{,}5p^* = \frac{3}{11}$, y $q_3 = p^* = \frac{2}{11}$.
4. (7 Puntos) En el largo plazo, ¿esperarías que el número de huertos de manzanas aumente o disminuya con el tiempo? Justifica tu respuesta. Tu respuesta debe tener una explicación intuitiva y también una justificación matemática basada en la parte anterior.
   $\rightarrow$ En el largo plazo, las firmas (o huertos de manzanas, en este caso) normalmente buscan beneficios positivos para sostener sus operaciones. Si los huertos de manzanas consistentemente están generando beneficios negativos:
   $$\pi_i = p^*q_i^* - c_i(q_i^*) = \frac{2}{11} \cdot \frac{5-i}{11} - \frac{1}{5-i}(5-i)^2 + 5i = -\frac{120}{121}(5-i),$$
   entonces no es sostenible que sigan operando indefinidamente. Por lo tanto, el número de huertos de manzanas disminuirá con el tiempo porque algunos productores saldrán del mercado.

Ejercicio 65 [Entrada de firmas[5]]. Considera una ciudad con población de tamaño N. Cada habitante tiene una demanda individual por leche dada por:

$$q_D(p) = 1 - \frac{1}{50}p$$

Cada proveedor de leche debe pagar un costo fijo de operación igual a 2 y su costo variable es igual a $\frac{1}{2}q^2$. Así, el costo total del proveedor está dado por:

$$c(q) = \frac{1}{2}q^2 + 2$$

1. (3 Puntos) Deriva la demanda agregada por leche, Q_d, como función del precio p y del tamaño de la población N.
   $\rightarrow$ Cada habitante tiene la misma curva de demanda individual por leche. Entonces, la demanda agregada será N multiplicada por la curva de demanda individual:
   $$Q_d(p) = N\left(1 - \frac{1}{50}p\right) = N - \frac{Np}{50}$$

[5] Ejercicio tomado de Gruber (2023)

2. (4 Puntos) Deriva la curva de oferta individual de corto plazo de leche, q_s, como función del precio p. ¿Para qué valores del precio un proveedor elegirá producir una cantidad positiva?
   → Cada proveedor producirá hasta que el precio sea igual al costo marginal. En este caso, $MC = q$. Entonces, la curva de oferta individual será $q_s(p) = p$. Un proveedor elegirá producir una cantidad positiva solo si el precio es mayor a 0.

3. (3 Puntos) Supón que hay J proveedores en la ciudad. Deriva la curva de oferta agregada de corto plazo, Q_s, como función del precio p y del número de proveedores J.
   → Si hay J proveedores en la ciudad, entonces la oferta agregada de corto plazo será la oferta individual multiplicada por J:
   $$Q_s(p) = Jp$$

4. (7 Puntos) ¿Cuál es la cantidad de equilibrio Q^* y el precio p^* del mercado? ¿Cómo dependen del tamaño de la población N y del número de proveedores J? Proporciona una intuición económica.
   → Para encontrar el equilibrio de mercado, igualamos oferta y demanda:
   $$N - \frac{Np}{50} = Jp$$
   $$N = Jp + \frac{Np}{50} \Rightarrow N = p\left(J + \frac{N}{50}\right) \Rightarrow p^* = \frac{N}{J + \frac{N}{50}}, \quad Q^* = Jp^* = \frac{NJ}{J + \frac{N}{50}}$$
   Si se incrementa N, entonces tanto el precio como la cantidad de equilibrio aumentan. La razón es que con más habitantes, se demanda más leche, por lo que más leche será producida y a un precio mayor. Por otro lado, si aumenta J, el precio de equilibrio disminuye y la cantidad aumenta, ya que hay más competencia y más oferta.

5. (7 Puntos) ¿Cuánto produce cada firma en equilibrio como función de J y N? Deriva una expresión para las ganancias como función de J y N.
   → Cada firma produce la cantidad de equilibrio dividida entre el número de firmas:
   $$q_i(p) = \frac{NJ}{J + \frac{N}{50}} \cdot \frac{1}{J} = \frac{N}{J + \frac{N}{50}}$$
   Para encontrar las ganancias de la firma i, resolvemos:
   $$\pi_i(N, J) = pq_i - c(q_i) = \frac{N}{J + \frac{N}{50}} \cdot \frac{N}{J + \frac{N}{50}} - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{N}{J + \frac{N}{50}}\right)^2 + 2\right] \Rightarrow \pi_i(N, J) = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{J + \frac{N}{50}}\right)^2 - 2$$

6. (8 Puntos) Supón ahora que hay entrada libre. Deriva el número de firmas $\bar{J}$ que operarán en el largo plazo, así como la cantidad agregada Q^{LR} y el precio p^{LR}. ¿Cómo depende del tamaño de la ciudad N? Proporciona una intuición.
   → Con entrada libre, las ganancias de largo plazo deben ser cero, lo que implica que $p = MC = q_i$. Igualamos la ecuación de ganancias a cero:
   $$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{J + \frac{N}{50}}\right)^2 - 2 \Rightarrow 2 = \left(\frac{N}{J + \frac{N}{50}}\right)^2 \Rightarrow J + \frac{N}{50} = \frac{N}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2J + \frac{N}{25} = \frac{2N}{\sqrt{2}} \Rightarrow J = \frac{12N}{25}$$
   Utilizando las ecuaciones de la parte 4:
   $$p^{LR} = \frac{N}{\frac{12N}{25} + \frac{N}{50}} = \frac{N}{\frac{25N+2N}{50}} = \frac{N}{\frac{27N}{50}} = \frac{50}{27} \approx 2$$
   $$Q^{LR} = \frac{NJ}{J + \frac{N}{50}} = \frac{N \cdot \frac{12N}{25}}{\frac{12N}{25} + \frac{N}{50}} = \frac{12N^2/25}{\frac{24N+N}{50}} = \frac{12N^2/25}{25N/50} = \frac{24N}{25}$$
   El número de firmas aumenta conforme el tamaño de la ciudad N aumenta. Esto tiene sentido, pues si hay más personas que demandan leche, tiene sentido que haya más productores de leche en el mercado.

Ejercicio 66 [Falso y verdadero: costos, oferta y oferta agregada [6]]. Determina si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Explica tus respuestas.

[6] Ejercicio tomado de Gruber (2023)

1. (5 Puntos) En mercados competitivos, los controles de precios siempre son eficientes.
   → Falso. En mercados competitivos, si los controles de precios alejan el precio del equilibrio, entonces generan una pérdida de eficiencia. Un precio máximo por debajo del precio de equilibrio o un precio mínimo por encima del precio de equilibrio impedirán la realización de transacciones que de otro modo ocurrirían.
2. (5 Puntos) Si las demandas individuales son $P = 3Q_1$ y $P = 2Q_2$, entonces la demanda agregada es $P = 5Q$, donde $Q = Q_1 + Q_2$.
   → Falso. La demanda agregada es $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{P}{3} + \frac{P}{2} = \frac{5P}{6}$.
3. (5 Puntos) Con entrada libre y firmas idénticas, el precio es igual al costo promedio.
   → Verdadero. Con entrada libre y si todas las firmas tienen la misma tecnología de producción, entonces $p = MC(q) = AVC(q)$, donde q es la cantidad producida individualmente.
4. (5 Puntos) La entrada libre en un mercado reduce los precios.
   → Falso. Si las firmas tienen pérdidas, entonces algunas saldrán del mercado, reduciendo la oferta y aumentando los precios.

Ejercicio 67 [Teoría del productor[7]]. Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{2}}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
   →

$$\min_{z_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i z_i \right\} \quad \text{s.a.} \quad q = \sum_{i=1}^{n} z_i^{1/2}$$
$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} w_i z_i + \lambda \left[q - \sum_{i=1}^{n} z_i^{1/2} \right]$$

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j} = w_j - \frac{1}{2} \lambda z_j^{-1/2} = 0$$
$$\Rightarrow z_j = \left(\frac{\lambda}{2 w_j} \right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{z_k}{z_j} = \left(\frac{w_j}{w_k} \right)^2$$
$$\Rightarrow q = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{w_j}{w_k} \right) z_j^{1/2}$$
$$\Rightarrow q = w_j z_j^{1/2} \sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}$$
$$\Rightarrow z_j^c = \frac{q^2}{w_j \left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1} \right)^2}$$

2. Obtenga las demandas no condicionadas para cada factor de producción.
   →

$$\max_{z_i} \left\{ p \left(\sum_{i=1}^{n} z_i \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^{n} w_i z_i \right\}$$

Condiciones de primer orden:

[7] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j} = \frac{p}{2} z_j^{-1/2} - w_j = 0 \Rightarrow z_j^{nc} = \frac{p^2}{4w_j^2}$$

Curva de oferta:

$$\begin{aligned} CT^*(q, \vec{w}) &= \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{q^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}\right)^2} = \frac{q^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}\right)^2} \sum_{j=1}^{n} w_j \\ &= \frac{q^2}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}} \end{aligned}$$

Costo marginal:

$$CM = \frac{2q}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}}$$

3. Obtenga la curva de oferta de la empresa.
   $\rightarrow$

$$P = \frac{2q}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}}$$

$$\text{Otra forma:} \quad q = q(z_1^{nc}, \ldots, z_n^{nc}) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{z_j^{nc}} = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\frac{p^2}{4w_j^2}} = \frac{p}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j}$$

$$\Rightarrow p = \frac{2q}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j}}$$

4. Determine los costos marginales y costos medios que tiene la empresa.
   $\rightarrow$

$$CM = \frac{2q}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}} \quad \text{y} \quad CMe = \frac{q}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}}$$

5. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.
   $\rightarrow$

$$q(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda z_j)^{1/2} = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{1/2} z_j^{1/2} = \lambda^{1/2} \sum_{j=1}^{n} z_j^{1/2} = \lambda^{1/2} q$$

$\Rightarrow$Rendimientos decrecientes a escala

Otra forma:

$$\varepsilon_{q,z_i} = \frac{\partial Q}{\partial z_i} \cdot \frac{z_i}{Q} = \frac{1}{2} z_i^{-1/2} \cdot \frac{z_i}{Q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z_i^{1/2}}{Q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q,z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \frac{z_i^{1/2}}{Q} = \frac{1}{2Q} \sum_{i=1}^{n} z_i^{1/2} = \frac{1}{2Q} \cdot Q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{Rendimientos decrecientes a escala}$$

6. Determine las economías a escala que presenta la empresa.
   $\rightarrow$

$$CMe = \frac{q}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{-1}}$$

$$\frac{\partial CMe}{\partial q} > 0 \Rightarrow \text{desconomías a escala}$$

Otra forma:

$$\frac{CMg}{CMe} = 2 > 1 \Rightarrow \text{desconomías a escala}$$

Dado que la función es homogénea, entonces los rendimientos y las economías coinciden.

7. Encuentre la elasticidad de sustitución de los factores de producción.
$\rightarrow$

$$TMS_{kj} = \frac{z_k^{1/2}}{z_j^{1/2}} \Rightarrow \ln(TMS) = \ln\left(\left(\frac{z_k}{z_j}\right)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z_k}{z_j}\right)$$

$$\Rightarrow 2\ln(TMS) = \ln\left(\frac{z_k}{z_j}\right)$$

$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{z_k}{z_j}\right)}{\partial \ln TMS_{jk}} = 2$$

Otra forma:

$$\sigma = \frac{\partial\left(\frac{z_k}{z_j}\right)}{\partial TMS} \cdot \frac{TMS}{\frac{z_k}{z_j}}$$

Como:

$$TMS_{kj} = \left(\frac{z_k}{z_j}\right)^{1/2} \Rightarrow TMS^2 = \frac{z_k}{z_j}$$

Entonces:

$$\sigma = 2TMS \cdot \frac{TMS}{\frac{z_k}{z_j}} = \frac{2TMS^2}{\frac{z_k}{z_j}} = 2$$

Ejercicio 68 [Teoría del productor en un mercado competitivo[8]]. Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$Q\left(z_1, \cdots, z_n\right) = z_1^{\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^{n} \left(z_i - 1\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
2. Encuentre la elasticidad insumo-producto y elasticidad insumo total.
3. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.

[8]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

4. Determine las economías a escala que presenta la empresa.

$$TM_{1j}=\frac{\frac{1}{2}z_1^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=2}^{n}(z_i-1)^{1/2}}{\frac{1}{2}z_1^{\frac{1}{2}}(z_j-1)^{1/2}\prod_{i\neq j}^{n}(z_i-1)^{1/2}}=\frac{y_2^{-\frac{1}{2}}(z_i-1)^{1/2}\prod_{i\neq j}^{n}(z_i-1)^{1/2}}{\frac{1}{2}z_1^{\frac{1}{2}}(z_j-1)^{-1/2}\prod_{i\neq j}^{n}(z_i-1)^{1/2}}=\frac{z_j-1}{z_1}=\frac{w_1}{w_j}=z_j-1=\frac{w_1}{w_j}z_1$$

$$q=z_1^{\frac{1}{2}}\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_1}{w_j}z_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q=z_1^{\frac{1}{2}}z_1^{\frac{n-1}{2}}\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_1}{w_j}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$q\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}=z_1^{\frac{n}{2}}$$

$$z_1=q^{\frac{2}{n}}\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\varepsilon_{PT}=\sum_{i=1}^{\frac{2}{n}}\cdot\frac{w_1}{w_j}\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}+1$$

$$\varepsilon_{PT}=\frac{PM_1}{PM_{e_1}}+\sum_{j=2}^{n}\frac{PM_j}{PM_{e_j}}$$

$$PM_1=\frac{1}{2}z_1^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=2}^{n}(z_i-1)^{1/2}$$

$$PM_{e_1}=z_1^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=2}^{n}(z_i-1)^{1/2}$$

$$\varepsilon_{q,z_1}=\frac{1}{2}$$

PM_{M_i}

$$PM_j=\frac{1}{2}z_1^{\frac{1}{2}}(z_{j-1})^{-1/2}\prod_{i\neq j}^{n}(z_i-1)^{1/2}$$

$$\varepsilon_{e_j}=z_j^{-1}\cdot z_1^{\frac{1}{2}}(z_j-1)^{\frac{1}{2}}\prod_{i\neq j}^{n}(z_i-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_{z_j}\cdot\frac{z_j}{z_j-1}$$

$\varepsilon_{PT}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}\frac{z_j}{z_j-1}>1\Rightarrow$ rendimientos crecientes a escala

5. $CT(q,w_1,\ldots,w_n)=q^{\frac{2}{n}}w_1\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}+(n-1)q^{\frac{2}{n}}\cdot w_1\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}+\sum_{j=2}^{n}w_j$

$CT(q,w_1,\ldots,w_n)=nq^{\frac{2}{n}}w_1\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}+\sum_{j=2}^{n}w_j$

$CM_g=2q^{\frac{2-n}{n}}\cdot w_1\cdot\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}$

$CM_e=nq^{\frac{2}{n-1}w_1}\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{w_j}{w_1}\right)^{\frac{1}{n}}+q^{-1}\sum_{j=2}^{n}w_j$

$$\text{S: }\begin{cases} n=1 \text{ economías decrecientes a escala } (CM_g>CM_e)\\ n\geqslant 2 \text{ economías crecientes a excala } (CM_e>CM_y)\end{cases}$$

Ejercicio 69 [Teoría del productor en un mercado competitivo[9]]. Considere una empresa que presenta la siguiente función de producción:

$$q(z_1\ldots,z_n)=\text{mín}\{z_1,\ldots,z_n\}^{\frac{1}{\rho}}\quad,\quad\rho>1$$

[9]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

1. Obtenga las demandas condicionadas de todos los insumos.
2. Determine los rendimientos a escala y las economías de escala.
3. Obtenga la oferta de la empresa y la oferta de la industria considerando que hay m empresas idénticas.
4. Determine la elasticidad de sustitución entre todos los insumos.
5. Determine la elasticidad de sustitución cruzada y propia de las demandas condicionadas e interprete.

1.

$$
\begin{aligned}
& z_i = z_j \\
\Rightarrow & Q = z_i^{\frac{1}{p}} \Rightarrow z_i^c = q^p
\end{aligned}
$$

2)

$$q = \lambda^{\frac{1}{p}} \cdot \text{mín}\{z_1, \ldots, z_n\}^{\frac{1}{p}}$$

$p > 1 \Rightarrow h = \frac{1}{p} < 1 \Rightarrow$ rendimientos decrecientes y deseconomías.
3)

$$
\begin{aligned}
& CT = q^p \sum_{i=1}^{n} w_i \\
& CM_g = \rho q^{p-1} \sum_{i=1}^{n} w_i \\
& P = \rho q^{p-1} \sum_{i=1}^{n} w_i \Rightarrow q = \left(\frac{P}{\rho \sum_{i=1}^{n} w_i} \right)^{\frac{1}{p-1}}
\end{aligned}
$$

Oferta de la industria

$$Q = m \left(\frac{P}{\rho \sum_{i=1}^{n} \omega_i} \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

4) En el óptimo $\frac{z_i}{z_j} = 1$

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial \ln \left(\frac{z_i}{z_i} \right)}{\partial \ln \left(\frac{\omega_i}{\omega_i} \right)} = 0$$

$$\Rightarrow \delta_{ji} = \eta_{ij} - \eta_{jj} = 0$$

5) $\eta_{ii}^c = 0 \quad \wedge \quad \eta_{ij}^c = 0$

Nota 16. Al ser una función de complementos la sensibilidad de la demanda ante cambios en los precios de los factores es nula.

Ejercicio 70 [Teoría del productor en un mercado competitivo[10]]. Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1, \cdots, z_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} \right]^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$$

[10] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
2. Obtenga la función de costos mínimos de la empresa.
3. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.
4. Determine la elasticidad producto total.
5. Determine las economías a escala que presenta la empresa.
6. Encuentre la elasticidad de sustitución de los factores de producción.
7. Demuestre que la demanda condicionada es homogénea de grado 0 .

$$
\begin{aligned}
& PM_i = Q \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{-1} \cdot z_i^{\frac{-1}{\varepsilon}} \\
& TMS_{jk} = \frac{z_k^{\frac{1}{\varepsilon}}}{z_j^{\frac{1}{\varepsilon}}} = \frac{w_i}{w_k} \Rightarrow z_k = \left(\frac{w_j}{w_k}\right)^{\varepsilon} z_j \\
& \Rightarrow Q = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{w_j}{w_k}\right)^{\varepsilon-1} \cdot z_j^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \Rightarrow Q = w_j^{\varepsilon} z_j \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
& \Rightarrow z_j(Q, \vec{w}) = \frac{Q}{w_j^{\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}}
\end{aligned}
$$

2)

$$
CT(Q, \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q\omega_i}{\omega_i^{\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{-\varepsilon}}} \Rightarrow CT(Q, \vec{\omega}) = \frac{Q}{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{1-\varepsilon}
$$

3. $Q\left(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda z_i\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$

La función es homogénea grado 1 $\Rightarrow$ rendimientos constantes $\Rightarrow$ economías constantes a escalo.

4) $\varepsilon_{\mathrm{PT}} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q, z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} z_i^{\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right]} . z_i^{-1}\right.}{\frac{Q}{z_i}} = \left[\sum_{i=1}^{n} z_i\right]^{-1} \Bigg]^{-1} \sum_{i=1}^{n} z_i^{\frac{-1}{\varepsilon}} = 1 \Rightarrow$ rendimientos constantes a escala

5) $CM_e = CM = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i^{1-\varepsilon}}{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{w_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} \Rightarrow \varepsilon_{cT,q} = 1 \Rightarrow$ economías constantes a escalo.

6)

$$
\delta_{jk} = \frac{\partial \ln \frac{z_k}{z_j}}{\partial \ln Tn_{jk}} = \varepsilon
$$

$$
z_j(Q, \lambda\vec{\omega}) = \frac{Q}{\left(\lambda\omega_j\right)^{\varepsilon} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} = \frac{Q}{\left(\lambda\omega_j\right)^{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} = \frac{Q}{\lambda^{\varepsilon}\omega_j^{\varepsilon} \left[\chi^* \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\omega_i}\right)^{\varepsilon-1}\right]^{\frac{\varepsilon}{-1}}} = z(Q, \vec{\omega})
$$

Ejercicio 71 [Teoría del productor en un mercado competitivo[11]]. La función de producción de una empresa está en función de n insumos según la siguiente ecuación:

$Q\left(z_1, \ldots, z_n\right) = z_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln\left(z_i - 1\right) \quad$ con $\quad z_1 > 0 \quad \wedge \quad z_i > 1 \quad \forall i = 2, \ldots, n$

[11] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

1. Encuentre las demandas condicionadas y no condicionadas de todos los tipos de insumos.
   → Se tiene que:

$$TMS_{1j} = \frac{1}{\frac{1}{z_j - 1}} = \frac{\omega_1}{\omega_j} \Rightarrow z_j^c = \frac{\omega_1}{\omega_j} + 1$$
$$Q = z_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln \frac{\omega_1}{\omega_j} \Rightarrow z_1^c = Q - (n-1)\ln \omega_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln \omega_j$$

   La demanda no condicionada para Z_1 no existe

$$P \cdot \frac{1}{z_j - 1} = \omega_j \Rightarrow z_j^{nc} = \frac{P}{\omega_j} + 1$$

2. Encuentre la elasticidad de sustitución entre todos los tipos de insumos.
   → Ahora:

$$\sigma_{1j} = \frac{\partial\left(\frac{z_j}{z_1}\right)}{\partial TMS_{1j}} \cdot \frac{TMS_{1j}}{\left(\frac{z_j}{z_1}\right)} = \eta_{j1}^c - \eta_{11}^c$$
$$\sigma_{j1} = \frac{\partial\left(\frac{z_1}{z_j}\right)}{\partial TMS_{i1}} \cdot \frac{TMS_{i1}}{\left(\frac{z_1}{z_j}\right)} = \eta_{1j}^c - \eta_{jj}$$
$$\sigma_{k_j} = \frac{\partial\left(\frac{z_j}{z_k}\right)}{\partial TMS_{k_j}} \cdot \frac{TMS_{k_j}}{\left(\frac{z_j}{z_k}\right)} = \eta_{jk} - \eta_{kk}$$
$$z_j^c = \frac{w_1}{w_j} + 1 \quad \wedge \quad z_1^c = Q - (n-1)|_n\, w_1 + \sum_{j=2}^{n} \ln w_j$$
$$\sigma_{1j} = \eta_{j1}^c - \eta_{11}^c = \frac{w_1}{w_j} \cdot z_j^{-1} + (n-1)z_1^{-1}$$
$$\sigma_{j1} = \eta_{1j} - \eta_{jj} = \frac{1}{z_1} + \frac{w_1}{w_j} z_j^{-1}$$
$$\sigma_{kj} = \eta_{jk} - \eta_{kk} = \frac{w_1}{w_k} \cdot z_k^{-1}$$

Ejercicio 72 [Teoría del productor en un mercado competitivo[12]]. Considere una empresa que presenta la siguiente función de producción:

$$Q(z_1 \ldots, z_n) = \text{mín}\left\{1 z_1^{\frac{1}{2}}, \ldots, n z_n^{\frac{1}{2}}\right\}$$

1. Obtenga las demandas condicionadas de todos los insumos.
2. Determine los rendimientos a escala y las economías de escala.
3. Obtenga la oferta de la empresa y la oferta de la industria considerando que hay m empresas idénticas.
4. Determine la elasticidad de sustitución entre todos los insumos.

1. $j z_j^{\frac{1}{2}} = K z_k^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{z_j}{z_k} = \frac{K^2}{j^2}$
   $q = j z_j^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z_j^c = \frac{q^2}{j^2}$
2. $q(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \lambda^{\frac{1}{2}} q(z_1, \ldots, z_n) \Rightarrow h = \frac{1}{2} \Rightarrow$ rendimientos decrecientes y deseconomías.

[12] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

3. $CT = q^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{j^2}$
   $P = 2q \sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{j^2}$
   $q = \underbrace{\dfrac{P}{2\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_j}{J^2}}}_{\text{oferta empresa}} \Rightarrow Q = \underbrace{\dfrac{mP}{2\sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j}{J^2}}}_{\text{oferta industrio}}$

4.

$$O_{kj} = n_{jk}^c - n_{kk}^c = 0$$

Otra forma

$$\begin{aligned}
\frac{z_j}{z_k} &= \frac{k^2}{j^2} \quad (\text{ condición optimalidad }) \\
\sigma_{k_j} &= \frac{\partial \ln\left(\frac{z_i}{z_k}\right)}{\partial \ln\left(\frac{w_k}{w_j}\right)} = 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 73 [Teoría del productor en un mercado competitivo[13]]. Una empresa posee la función de producción $Q(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{\alpha_i}$ con $0 < \alpha_i < 1$.

1. Encuentre los rendimientos a escala de la función de producción.
2. La curva de oferta de la empresa.
3. Las economías a escala de la empresa.
4. Si existen n empresas idénticas, obtenga la curva de oferta de la industria, asumiendo que no hay libre entrada de empresas a esa industria y que los costos de producción son constantes.

1.
$Q(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \lambda^h Q$ con $0 < h < 1$ (si $\alpha_i \neq \alpha_j \quad \forall i, j$ entonces no es homogénea pero sigue habiendo rendimientos decrecientes a escala)
Otra forma

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{q,z_i} &= \frac{\alpha_i z_i^{\alpha_i^{-1}}}{\frac{Q}{z_i}} = \frac{\alpha_i z_i^{\alpha_i}}{Q} \\
\varepsilon_{PT} &= \frac{1}{Q} \sum \alpha_i z_i^{\alpha_i} \quad \left(\text{Note que } \sum \alpha_i z_i^{\alpha_i} < Q \text{ porque } 0 < \alpha_i < 1\right) \Rightarrow \varepsilon_{PT} < 1.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\text{TMS}_{jk} &= \frac{\alpha_j z_j^{\alpha_{j-1}}}{\alpha_k z_k^{\alpha_{k-1}}} = \frac{w_j}{w_k} \\
z_j &= \left[\frac{\alpha_k w_j}{\alpha_j w_k} z_k^{\alpha_{k-1}}\right]^{\frac{1}{\alpha_{j-1}}} \\
Q &= \underbrace{\sum \left[\frac{\alpha_k w_j}{\alpha_j w_k} z_k^{\alpha_{k-1}}\right]^{\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_{j-1}}}}_{\text{Aquí se complica}}
\end{aligned}$$

[13] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Otra forma

$$
\begin{aligned}
P\alpha_j z_j^{\alpha_j-1} &= \omega_j \\
\Rightarrow z_j &= \left(\frac{\omega_j}{P\alpha_j}\right)^{\frac{1}{\alpha_j-1}} \\
Q = \sum \left(\frac{\omega_j}{P\alpha_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_j-1}} & \qquad \text{(oferta directa)}
\end{aligned}
$$

)

Dado que $Q\left(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n\right) = \lambda^h Q$ con $0 < h < 1$ entonces $\varepsilon_{CT,Q} > 1$ por lo que hay economías decrecientes a escala

4)

$$
nQ = n \cdot \left(\frac{\omega_j}{P\alpha_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{\alpha_j-1}}
$$

Ejercicio 74 [Teoría del productor en un mercado competitivo[14]]. Una empresa tiene una función de producción dada por:

$$
Q\left(z_1, \cdots, z_n\right) = \prod_{i=1}^{n} z_i^{\frac{1}{n+1}}
$$

1. Obtenga las demandas condicionadas para cada factor de producción.
2. Obtenga las demandas no condicionadas para cada factor de producción.
3. Obtenga la función de costos mínimos de la empresa.
4. Si la empresa está en un mercado competitivo del bien que produce, determine la oferta de la empresa de ese bien y la función de ganancias.
5. Determine los rendimientos a escala que presenta la empresa.
6. Determine las economías a escala que presenta la empresa.
7. Encuentre la elasticidad de sustitución de los factores de producción.
8. Utilice el lema de Shepard para comprobar que $\frac{\partial C(w_1,\cdots,w_n,Q)}{\partial w_j} = z_j\left(w_1, \cdots, w_n, Q\right)$.
9. Compruebe que se cumple la simetría de Hicks para las demandas condicionadas.
10. Demuestre que la demanda condicionada es homogénea de grado 0 .
11. Obtenga la elasticidad propia y cruazada del precio-demanda condicionada.
12. Demuestre que se cumple que $\eta_{ii}^C + \eta_{ij}^C = 0$ (en caso de $\mathbf{n} = \mathbf{2}$) e interprete dicho resultado. Si hay n factores su forma equivalente sería: $\eta_{ii}^C + \sum_{k\neq i}^n \eta_{ik}^C = 0$
13. Demuestre que la elasticidad de sustitución de los factores también se puede determinar como $\sigma = \eta_{ij}^C - \eta_{ii}^C$. Importante este resultado porque para algunas funciones en particular sólo se va a poder calcular de esta forma, ver II parcial IS-2021
14. Determine la ecuación de Slutsky en términos propios e interprete sus resultados.
15. Determine la ecuación de Slutsky en términos cruzados e interprete sus resultados. Tarea moral

1.
2.

[14]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$\mathrm{TMS}_{z_j,z_k} = \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right) z_j^{-1} \prod_{i=1}^{n} z_i^{\frac{k}{n+1}}}{\left(\frac{1}{n+1}\right) z_k^{-1} \prod_{j=1}^{n} z_i^{\frac{k}{n+1}}} = \frac{z_k}{z_j} = \frac{w_j}{w_k}$$
$$Q = \prod_{k=1}^{n} (w_j z_j)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$
$$Q = (w_j z_j)^{\frac{n}{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$
$$z_j(Q, \vec{w}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$

Demanda no condicionada

$$P \cdot P\mu_j = w_j$$
$$\Rightarrow P \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) z_j^{-1} \prod_{k=1}^{n} z_k^{\frac{1}{n+1}} = w_j$$
$$\Rightarrow P \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) z_j^{-1} \prod_{k=1}^{n} (w_j z_j)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}} = w_j$$
$$P \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right) z_j^{-1} (w_j z_j)^{\frac{n}{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{w_k}\right)^{\frac{1}{n+1}} = w_j$$
$$z_j^{\frac{n}{n+1}-1} = \frac{1}{P}(n+1) w_j^{1-\frac{n}{n+1}} \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n+1}}$$
$$\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n-n-1}{n+1} = -\frac{1}{n+1} \wedge 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$
$$z_j(P, \vec{w}) = \left(\frac{P}{n+1}\right)^{n+1} w_j^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{-1}$$

3)

$$C^*(Q, \vec{w}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$
$$C^*(Q, \vec{w}) = n \cdot Q^{\frac{n+1}{n}} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$

4)

Rendimientos a escala

homogénea de grado $\frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow$ rendimientos decrecientes a escala $\Rightarrow$ deseconomías

b)

$0 = 1$

7)

$$C^*(Q, \vec{w}) = n \cdot Q^{\frac{n+1}{n}} \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$
$$\frac{\partial C^*}{\partial w_1} = z_1 = k \cdot h w_k^{-1} Q^{\frac{n+1}{n}} \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$$

8)

$$
\begin{aligned}
z_j(Q,\vec{w}) &= \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j}\cdot\prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}\\
\frac{\partial z_j}{\partial w_k} &= \frac{1}{n}w_k^{-1}\cdot\frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j}\cdot\prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}\\
\frac{\partial z_k}{\partial w_j} &= \frac{1}{n}w_j^{-1}\cdot\frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_k}\cdot\prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}
$$

)

$$
z_j(Q,\lambda\vec{w}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{\lambda w_j}\cdot\prod_{k=1}^{n}(\lambda w_k)^{\frac{1}{n}} = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{\lambda w_j}\cdot\prod_{k=1}^{n} {w_k}^{\frac{1}{n}}
$$

10) $z_j(Q,\vec{w}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j}\cdot\prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}}$

$$
\begin{aligned}
n_{jj}^c &= \frac{\partial z_j}{\partial w_j}\frac{w_j}{z_j} = \frac{\partial \ln z_j}{\partial \ln w_j}\\
\ln z_j &= \left(\frac{n+1}{n}\right)\ln Q - \ln w_j + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln w_k\\
n_{jj}^c &= -1+\frac{1}{n}\\
n_{jk}^c &= \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

11)
Teorema Euler

$$
z_i\left(\lambda w_1,\ldots,\lambda w_n,Q\right) = \lambda^0 z_i(\vec{w},Q)
$$

Derivo con respecto a λ

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_i}{\partial w_1}w_1+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial w_n}\cdot w_n = 0\\
&\frac{\partial z_i}{\partial w_i}\cdot w_i+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial w_k}w_k = 0\\
&n_{jj}+\sum_{k\neq j}^{n} n_{jk} = 0\\
&-1+\frac{1}{n}+\sum_{k\neq j}^{n}\frac{1}{n} = -1+\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n} = -1+\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n} = 0
\end{aligned}
$$

12)
$\sigma = n_{jk}^c - n_{jj}^c$
$6 = 1-\frac{y}{n}+\frac{y}{n} = 1$
13) Ecuación Slutsky
$Z_j(P,\vec{w}) = Z_j(\vec{w},Q(\vec{w},P))$
$\frac{\partial z_j^{Nc}}{\partial w_1} = \frac{\partial z_j^c}{\partial w_1}+\frac{\partial z_i}{\partial Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial w_1}$
$Z_j(P,\vec{w}) = \left(\frac{P}{n+1}\right)^{n+1} w_j^{-1}\cdot\prod_{k=1}^{n} w_k^{-1}$

$Q = \prod_{j=1}^{n} z_j^{\frac{1}{n+1}}$
$\Rightarrow Q = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{P}{n+1}\right) \omega_j^{\frac{-1}{n+1}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \omega_k^{\frac{-1}{n+1}}$

$$\Rightarrow Q = \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{-1}{n+1}}\right]$$
$$\Rightarrow Q = \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{i=1}^{n} w_i^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{-1}{n+1}}\right]$$
$$\Rightarrow Q = w_k^{\frac{-n}{n+1}} w_k^{\frac{-1}{n+1}} \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{i\neq k}^{n} w_k^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\frac{n}{\prod_{j\neq k} w_j^{\frac{-1}{n+1}}}\right]$$

Una vez simplificado, escribimos las 3 ecuaciones que ocupamos

$$\begin{cases} Q = w_k^{-1} \left(\frac{P}{n+1}\right)^n \left[\prod_{i\neq k}^{n} w_k^{\frac{-n}{n+1}}\right] \left[\prod_{j\neq k}^{n} w_j^{\frac{-1}{n+1}}\right] \\ z_j(Q, \vec{w}) = \frac{Q^{\frac{n+1}{n}}}{w_j} \prod_{k=1}^{n} w_k^{\frac{1}{n}} \\ z_j(P, \vec{w}) = \left(\frac{P}{n+1}\right)^{n+1} w_j^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} w_k^{-1} \end{cases}$$

Cruzado

$$-w_k^{-1} z_j = \frac{1}{n} w_k^{-1} z_j + \left(\frac{n+1}{n}\right) R^{-1} z_j \cdot -1 w_k^{-1} \cdot \not\subset$$
$$= w_k^{-1} z_j \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{n+1}{n}}_{\frac{1-n-1}{n}=-1}]$$
$$-w_k^{-1} \cdot z_j = -w_k^{-1} z_j$$

Ejercicio 75 [Teoría del producto en mercado competitivo[15]]. Considere una empresa que tiene una función de producción dada por:

$$Q(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} (z_i - \alpha_i) \quad z_i > \alpha_i > 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

1. ¿Qué tipo de rendimientos a escala presenta la función de producción?
2. Obtenga las demandas condicionadas para cada uno de los bienes.
3. Obtenga la curva de costos totales de la empresa óptima.
4. ¿Qué tipo de economías a escala presenta la función de producción?
5. Suponga que la empresa ahora es un monopolista y se enfrenta a una demanda de mercado dada por: $P = Q$, obtenga el precio y la cantidad que escoge el monopolista.
6. Demuestre que la demanda condicionada para cada uno de los bienes es homogénea de grado 0 en precios e interpréte su resultado.

1.
$PM_i = \frac{Q}{z_i - \alpha_i} \wedge PM_{e_i} = \frac{Q}{z_i}$
$\varepsilon_{Q,z_i} = \frac{z_i}{z_i - \alpha_i} \wedge \varepsilon_{PT} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{q,z_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{z_i - \alpha_i} > 1 \Rightarrow$ rendimientos crecientes
2)
$TMS_{kj} = \frac{\frac{Q}{z_k - \alpha_k}}{\frac{Q}{z_j - \alpha_j}} \Rightarrow \frac{z_j - \alpha_j}{z_k - \alpha_k} = \frac{w_k}{w_j} \Rightarrow z_j - \alpha_j = \frac{w_k}{w_j}(z_k - \alpha_k)$

[15]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$Q = \prod_{j=1}^{n} \frac{w_k}{w_j} (z_k - \alpha_k) \Rightarrow Q \prod_{j=1}^{n} w_j = w_k^n (z_k - \alpha_k)^n \Rightarrow z_k(Q, \vec{w}) = \frac{Q^{\frac{1}{n}} \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{1}{n}}}{w_k} + \alpha_k$

3) $CT(Q, \vec{w}) = \underbrace{nQ^{\frac{1}{n}} \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{1}{n}}}_{\text{costo variable}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k}_{\text{costo } f_{ij0}}$

4)

$$CM_e = nQ^{\frac{1}{n}-1} \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k$$

$$\frac{\partial CM_e}{\partial Q} = (1-n)Q^{\frac{1}{n}-2} \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{Q^2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k < O \Rightarrow \text{ economías a escala}$$

5)

Monopolista

$$\max_Q \left\{ Q^2 - nQ^{\frac{1}{n}} \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{1}{n}} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k \right\}$$

$$2Q - Q^{\frac{1}{n}-1} \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{1}{n}} = 0$$

$$2Q = Q^{\frac{1}{n}-1} \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{1}{n}} = 0$$

$$Q^{\frac{1}{n}-2} = 2 \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{-1}{n}}$$

$$P = Q = \left[2 \prod_{j=1}^{n} w_j^{\frac{-1}{n}} \right]^{\frac{n}{1-2n}}$$

b)

$$z_k(Q, \lambda\vec{\omega}) = \frac{Q^{\frac{1}{n}} \prod_{j=1}^{n} (\lambda\omega_j)^{\frac{1}{n}}}{\lambda\omega_k} + \alpha_k = \lambda^0 z_k^c$$

Si todos los precios aumentan en la misma proporción, la cantidad no cambia.

Capítulo 16

El monopolio

Definición 33 [Monopolio]. Defínase un monopolio como una estructura de mercado en la cual únicamente se configura un oferente (monopolista).

Generalmente los monopolios se configuran en mercados en los cuales se tranzan bienes o servicios sin sustitutos cercanos. Esto generalmente se traduce en que entonces la diferencia esencial entre un monopolista y un productor en un mercado de competencia perfecta es que el monopolista sí tiene poder de mercado y por ende sí puede influir en el precio ofrecido a los demandantes.

Recuerde que en un mercado de competencia perfecta, si en ese mercado existe una demanda agregada de pendiente negativa (es decir que cumple la ley de la demanda), cada firma (empresa) individualmente enfrenta una demanda de forma horizontal, de manera que puede aumentar la cantidad ofrecida sin cambiar el precio, puesto que el precio está dado.

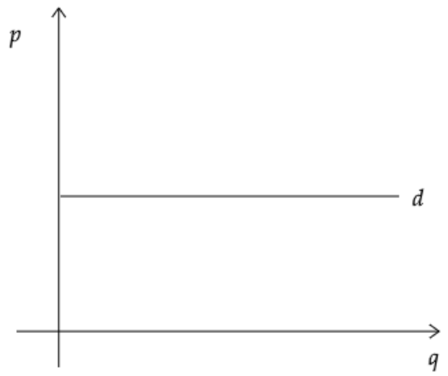


Figura 16.1: Curva de demanda enfrentada por una persona productora en un mercado de competencia perfecta

Sin embargo, un monopolista, al ser el único oferente en el mercado, se enfrenta a toda la curva de demanda del mercado.

Note que dado que en el mercado de competencia perfecta, el precio está dado, entonces el ingreso marginal es constante e igual al precio, mientras que en el caso del monopolio, que se enfrenta a una curva de demanda con pendiente negativa, el ingreso marginal no es constante, por lo que entonces la condición de arbitraje $IMg = CMg$ es distinta al caso de la competencia perfecta, por lo que se procede a estudiar el ingreso marginal de un monopolista.

Por esta razón, a diferencia de una empresa en competencia perfecta, una empresa en un monopolio (sin discriminación de precios), la cantidad de unidades que venda **sí afecta el precio cobrado**.

16.1. Ingreso marginal

Cuando en el mercado de competencia perfecta se altera la cantidad ofrecida, el precio no cambia, de manera que el cambio en los beneficios sería igual al cambio en la cantidad ofrecida. Sin embargo, en un monopolio, alterar la cantidad ofrecidad tiene un doble efecto:

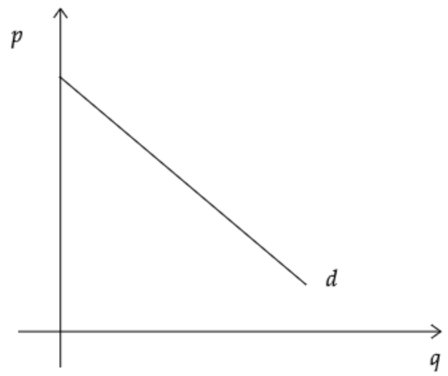


Figura 16.2: Curva de demanda enfrentada por un monopolista

- Efecto producción: el cambio en la cantidad ofrecida altera los beneficios finales que recibe la empresa, lo cual también sucede en la competencia perfecta.
- Efecto precio: dado que el monopolista se enfrenta a una curva de demanda de pendiente negativa, para cambiar la cantidad ofrecida el monopolista debe cambiar el precio y así cambiará la cantidad demandada, de manera que esto también incide en los beneficios finales. Es así que entonces para:
  - Vender más producción $\rightarrow$ se debe reducir el precio de cada unidad producida
  - Vender menos producción $\rightarrow$ se debe aumentar el precio de cada unidad producida

  Es así que entonces en el monopolio: $p > IMg$. Incluso podría ser que el ingreso marginal sea negativo en el caso de que el efecto precio sea mayor al efecto producción.

  Note que a diferencia del monopolista, una empresa competitiva no requiere de bajar el precio con tal de vender más, puesto que el precio está dado para el mercado.

16.2. Beneficios del monopolio

Como cualquier otra firma (empresa) el monopolista tiene como objetivo maximizar sus beneficios, los cuales bienen dados de la forma:

$$\pi = p \cdot q(p) - c(q(p)) \tag{16.1}$$

Por tanto, el problema del monopolista puede ser planteado de la siguiente manera:

$$\max_{p} \quad pq(p) - c(q(p)) \tag{16.2}$$

Sin embargo, este problema puede ser reescrito en términos de la cantidad en lugar del precio, dado que se sabe que existe una relación entre el precio y la cantidad ofrecida por el monopolista. Entonces suponga que $p(q(p)) = p$ es la función inversa de demanda, ante lo cual el problema de la maximización de la empresa puede ser reescrito como :

$$\max_{q} \quad p(q)q - c(q) \tag{16.3}$$

Esto se hizo por conveniencia: es más sencillo asumir que el precio es fijado por el mercado y el monopolista maximiza eligiendo la cantidad a ofrecer dado el precio.

Figura 16.3: El efecto de alterar la cantidad producida también interfiere en el precio que se puede cobrar por unidad.

Entonces, obtiendo la condición de primer orden derivando con respecto a q:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p'(q)q + p(q) - c'(q(p)) = 0$$

$$\Rightarrow p'(q)q + p(q) = c'(q(p))$$

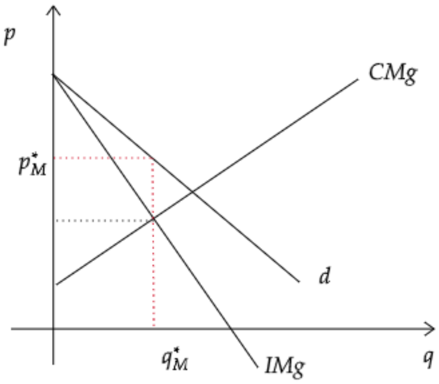


Figura 16.4: El equilibrio en un mercado de monopolio

Lo cual es la condición de arbitraje que indica que $IMg = CMg$. Ahora, esto puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$\left(\frac{dp}{dq}\frac{q}{p} + 1\right) p(q) = \frac{dc}{dq}$$
$$\Rightarrow p(q)\left(1 - \frac{1}{\mathcal{E}_p}\right) = \frac{dc}{dq}$$

Es decir que entonces se presenta una situación como la siguiente:

16.3. *Oferta de un monopolio*

Un monopolio no tiene curva de oferta, a continuación la demostración de esta proposición (*statement)*:

Demostración. □

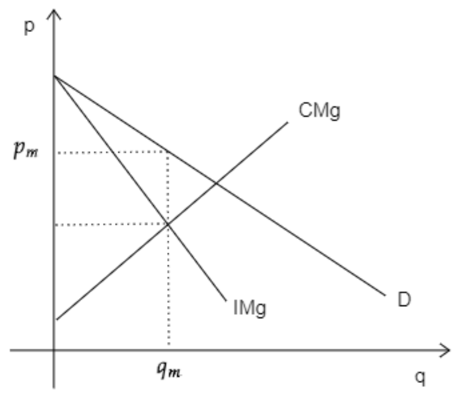


Figura 16.5: Comportamiento de un monopolista

Ejemplo 23 [Monopolios y sindicatos]. Muchas empresas competitivas producen un tipo de microchip con la función de producción $Q = 20L$ donde Q es la cantidad de microchips y L es la cantidad de trabajadores especializados que se contratan. Los trabajadores están organizados en un sindicato por lo que constituyen un monopolio de la oferta de trabajo.

La oferta de estos trabajadores es $W = 2000 + 100\ell$ donde W es el salario por hora. Las empresas enfrentan la demanda de mercado $P = 2000 - Q$.

- Demanda de L

$$IMg = CMg$$

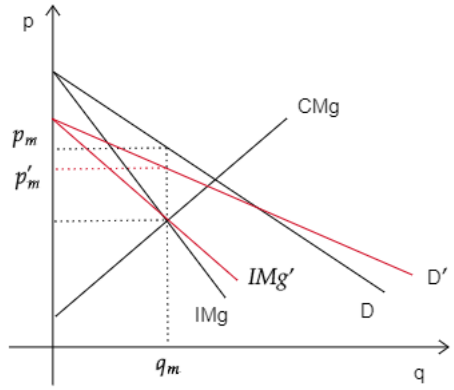


Figura 16.6: El monopolio no tiene curva de oferta

$$\begin{aligned} VPMg =& 20(2000 - 2Q) \\ =& 40000 - 40Q \end{aligned}$$

$$CMg = 2000 + 200L$$

$$\begin{aligned} VPMg =& CMg \\ 40000 - 40Q =& 2000 + 200L \\ 40000 - 40(20L) =& 2000 + 200L \\ 40000 - 800L =& 2000 + 200L \\ 40000 - 2000 =& 800L + 200L \\ 38000 =& 1000L \\ 38 =& L^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^* =& 20L^* \\ =& 20(38) \\ =& 760 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^* =& 2000 - 760 \\ =& 1240 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W =& 2000 + 100L \\ W^* =& 2000 + 100(38) \\ =& 5800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi =& P \cdot Q - W \cdot L \\ =& 1240(760) - 5800(38) \\ =& 722000 \end{aligned}$$

- Determine el nivel de contratación de L si hubiesen muchas empresas sin poder de mercado que contratan ese tipo de trabajadores especializados.

$$\begin{aligned} VPMg =& 20(2000 - 2Q) \\ =& 40000 - 800L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40000 - 800L =& 2000 + 100L \\ L^* =& 42,22 \end{aligned}$$

Ejemplo 24 [Un monopolista discriminador]. Un productor tiene una función de producción representada por $y = n^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2n}}$, donde x_i es la cantidad de insumos utilizados en el proceso de producción e y es la cantidad de producción disponible para la venta. Todos los insumos tienen un costo de igual a 1 la unidad. Asuma que este productor es el único vendedor en un mercado de dos consumidores y tiene la posibilidad de realizar discriminación de tercer grado.

El primer consumidor tiene una demanda inversa igual a $P_1 = 10 - y_1$, mientras que el segundo consumidor tiene una inversa iguala a $P_2 = 20 - 2y_2$. Encuentre el equilibrio en precios y cantidades si:

- Cualquiera de los consumidores puede revender el bien a cero costo y el bien solo se puede vender en unidades enteras
  Si el bien se puede fraccionar, la reventa a cero costo implica que el monopolista no puede discriminar entre consumidores, por lo que se trata de un monopolista ordinario.
  De esta manera, se suman las demandas y se obtiene el ingreso marginal. Las demandas presentadas son las demandas inversas, por lo cual se despejan para obtener las funciones de demanda directas:

$$\begin{aligned} P_1 = 10 - y_1 \Leftrightarrow y_1 =& 10 - P_1 \\ P_2 = 20 - 2y_2 \Leftrightarrow 2y_2 = 20 - P_2 \Leftrightarrow y_2 =& 10 - \frac{P_2}{2} \end{aligned}$$

  Y la suma de las demandas directas es:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 =& y \\ 10 - P + 10 - \frac{P}{2} =& y \\ 20 + \frac{-2P - P}{2} =& y \\ 20 - \frac{3P}{2} =& y \end{aligned}$$

  Despejando para el precio:

$$20 - \frac{3P}{2} = y \Leftrightarrow -\frac{3P}{2} = y - 20 \Leftrightarrow -3P = 2(y - 20) \Leftrightarrow P = \frac{-2(y-20)}{3} \Leftrightarrow \boxed{P = \frac{-2y}{3} + \frac{40}{3}}$$

  Y el ingreso marginal sería

$$\boxed{IMg = \frac{-4y}{3} + \frac{40}{3}}$$

- Cualquiera de los consumidores puede revender el bien a un costo igual a t y el bien solo se puede vender en unidades enteras
  En este caso no se puede determinar lo de las unidades enteras, pues t es indeterminado, así que se va a asumir que pueden vender unidades fraccionadas. De esta manera, se puede plantear el siguiente lagrangiano:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =& P_1y_1 + P_2y_2 - (y_1+y_2)^2 + \lambda(P_2 - P_1 - t)^2 \\
\mathcal{L} =& (10-y_1)y_1 + (20-2y_2)y_2 - (y_1+y_2)^2 + \lambda(20 - 2y_2 - 10 + y_1 - t)^2 \\
\mathcal{L} =& 10y_1 - y_1^2 + 20y_2 - 2y_2^2 - y_1^2 - 2y_1y_2 - y_2^2 + \lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t)^2
\end{aligned}$$

Y las condiciones de primer orden serían:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_1}\left[10y_1 - y_1^2 + 20y_2 - 2y_2^2 - y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2)^2 + \lambda(10 - 2y_2 - y_1 - t)^2\right] =& 0 \\
10 - 2y_1 - 2y_1 - 2y_2 + 2\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t) =& 0 \\
10 - 2y_1 - 2(y_1+y_2) =& -2\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t) \\
\frac{\partial}{\partial y_2}\left[10y_1 - y_1^2 + 20y_2 - 2y_2^2 - y_1^2 - 2y_1y_2 - y_2^2 + \lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t)^2\right] =& 0 \\
20 - 4y_2 - 2y_1 - 2y_2 - 4\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t) =& 0 \\
2(10 - 2y_2 - y_1 - y_2 - 2\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t)) =& 0 \\
\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[10y_1 - y_1^2 + 20y_2 - 2y_2^2 - y_1^2 - 2y_1y_2 - y_2^2 + \lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t)^2\right] =& 0
\end{aligned}$$

- El bien no se puede revender y se puede vender en unidades fraccionadas
  Este es el caso de un monopolista de tercer grado:

$$\begin{aligned}
10 - 2y_1 = 2(y_1+y_2) \Rightarrow& 5 - 2y_1 = y_2 \\
20 - 4y_2 = 2(y_1+y_2) \Rightarrow& 10 - y_1 = 3y_2
\end{aligned}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
5 - 2y_1 =& \frac{10-y_1}{3} \\
15 - 6y_1 =& 10 - y_1 \\
15 - 10 =& 6y_1 - y_1 \\
5 =& 5y_1 \\
1 =& y_1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2(1) = y_2 \Leftrightarrow \boxed{3 = \mathrm{y}_2} \wedge \boxed{1 = \mathrm{y}_1}$$

$$\boxed{\mathrm{P}_1 = 9} \wedge \boxed{\mathrm{P}_2 = 14}$$

- El bien no se puede revender, se puede vender en unidades fraccionadas, pero solo se pueden producir, como máximo, 8 unidades
  Es igual que el caso anterior dado que la restricción de 8 unidades no se alcanza.

Ejercicio 76 [Monopolio y bienestar[1]]. Un monopolista tiene la función de costos:

$$C = \frac{1}{4}Q^2 - 5Q + 300$$

Además, se enfrenta a la demanda de mercado:

$$Q = 70 - P$$

a) Determine cuáles son el nivel de producción (Q) y el nivel de precios (P) que maximizan los beneficios del monopolista.

$\rightarrow$ Pasos para determinar el nivel de producción:

[1]Ejercicio tomado de ACCG

Paso 1: Se calcula la función de ingreso marginal.

La curva de ingreso marginal es dos veces más inclinada que la curva de demanda pero comparten la misma intersección con el eje-y. La curva de demanda inversa es la siguiente:

$$P = 70 - Q$$

Por lo tanto, la curva de ingreso marginal es:

$$P = 70 - 2Q$$

Paso 2: Se igualan el ingreso marginal y el costo marginal para encontrar el nivel de producción. Se calcula el costo marginal:

$$CM = \frac{1}{2}Q - 5$$

Se iguala el ingreso marginal al costo marginal para encontrar el nivel de producción del monopolista.

$$\begin{aligned} IM &= CM \\ 70 - 2Q &= \frac{1}{2}Q - 5 \\ Q_M &= 30 \end{aligned}$$

Paso 3: Se sustituye el nivel de producción del monopolista en la función de demanda para encontrar el precio del monopolista.

$$\begin{aligned} P &= 70 - Q \\ P &= 70 - 30 \end{aligned}$$

$$P_M = 40$$

b) Calcule la magnitud de la pérdida irrecuperable de eficiencia.

→ Se utiliza el siguiente gráfico para calcular la pérdida irrecuperable de eficiencia (CB).

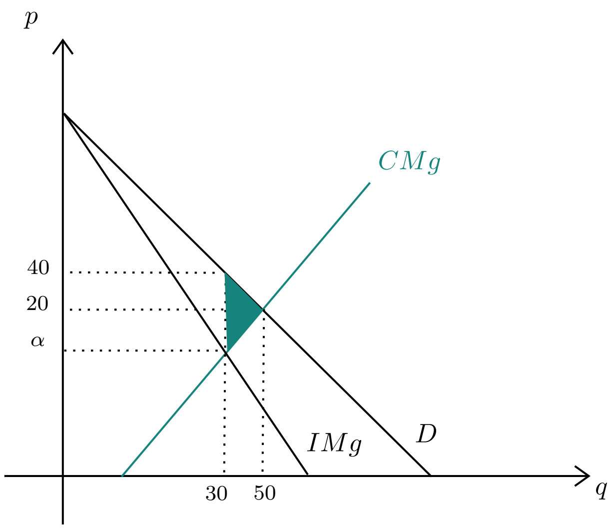


Figura 15: El área verde es la pérdida irrecuperable de bienestar.

Se encuentra la cantidad de equilibrio (Q^*) para un mercado competitivo al igualar ($D = CM$).

$$70 - Q = \frac{1}{2}Q - 5$$
$$Q^* = 50$$

Se sustituye Q^* en la curva de demanda inversa para encontrar P^*.

$$P = 70 - 50$$
$$P^* = 20$$

A continuación, se calcula el valor de α en el gráfico al sustituir $(Q = 30)$ en la función de costo marginal.

$$CM = \frac{1}{2}Q - 5$$
$$\alpha = \frac{1}{2}Q - 5$$
$$\alpha = \frac{1}{2}(30) - 5$$
$$\alpha = 10$$

La pérdida irrecuperable de eficiencia (CB) se encuentra a continuación:

$$CB = \frac{(40 - 10)(50 - 30)}{2}$$
$$CB = 300$$

Ejercicio 77 [Monopolio discriminador y no discriminador[2]]. Considere un monopolista que puede identificar las siguientes tres demandas:

$$q_1 = 100 - P$$
$$q_2 = 200 - \frac{P}{2}$$
$$q_3 = 300 - \frac{P}{3}$$

Además se tiene que el costo marginal y el costo fijo del monopolista son cero. ($CM = 0, CF = 0$)

1. Encuentre el equilibrio en el caso de que el monopolista no puede discriminar entre las demandas.
$\rightarrow$ Primero note que el hecho de el costo marginal y el costo fijo del monopolista sean cero implica que su costo total también es cero ($CT = 0$). Segundo, resulta útil encontrar las demandas inversas y graficarlas para luego visualizar la demanda de mercado por tramos.

$$q_1 = 100 - P \Rightarrow P = 100 - q_1$$
$$q_2 = 200 - \frac{P}{2} \Rightarrow P = 400 - 2q_2$$
$$q_3 = 300 - \frac{P}{3} \Rightarrow P = 900 - 3q_3$$

   a) En el caso en el que el monopolista no puede discriminar, es necesario encontrar la demanda de mercado por tramos. Para esto puede resultar útil observar en el gráfico para que precios existen cuáles demandas o utilizando las demandas normales analizar para cuáles precios no se demandan cantidades negativas.

$$q_m = \begin{cases} 600 - \frac{11}{6}P, p \leq 100 \\ 500 - \frac{5}{6}P, 100 < p \leq 400 \\ 300 - \frac{1}{3}P, 400 < p \leq 900 \end{cases}$$

[2] Ejercicio tomado de ACCG

A continuación analizamos el óptimo del monopolista por tramos:
a) Primer tramo: si $P \leq 100$
La condición óptima del monopolista es $IM = CM$. La demanda inversa en este tramo es $P = \frac{3600}{11} - \frac{6}{11}q_m$. Entonces,

$$IM = \frac{3600}{11} - \frac{12}{11}q_m = 0 = CM$$
$$\Rightarrow q_m^* = 300, P^* = \frac{1800}{11}$$

Nota 17. Como este precio es mayor a 100, por lo tanto, se descarta este caso.

b) Segundo tramo: si $100 < P \leq 400$
La condición óptima del monopolista es $IM = CM$. La demanda inversa en este tramo es $P = 600 - \frac{6}{5}q_m$. Entonces,

$$IM = 600 - \frac{12}{5}q_m = 0 = CM$$
$$\Rightarrow q_m^* = 250, P^* = 300$$

Esta solución sí es viable, sin embargo, es necesario calcular el beneficio para comparar con el tercer tramo y ver cuál opción escoge el monopolista.

$$\Pi = IT - CT, \text{ recuerde que } CT = 0$$
$$\Pi = 250 \cdot 300 = 75000$$

c) Tercer tramo: si $400 < P \leq 900$
La condición óptima del monopolista es $IM = CM$. La demanda inversa en este tramo es $P = 900 - 3q_m$. Entonces,

$$IM = 900 - 6q_m = 0 = CM$$
$$\Rightarrow q_m^* = 150, P^* = 450$$

Además,

$$\Pi = 150 \cdot 450 = 67500$$

Esta solución también es viable, sin embargo, como el beneficio que obtiene es menor, el monopolista decide $P^* = 300$, y vende $q_m^* = 250$. Note que al ser este el equilibrio, el monopolista no le vende a la demanda más pequeña q_1.

2. Encuentre el equilibrio si el monopolista puede discriminar q_3 pero no entre q_1 y q_2.
$\rightarrow$ En el caso en el que el monopolista puede discriminar q_3 pero no entre q_1 y q_2, se debe optimizar por separado q_3 y $q_a = q_1 + q_2$.
a) Optimicemos para q_a :

$$q_a = \begin{cases} 300 - \frac{3}{2}P, p \leq 100 \\ 200 - \frac{1}{2}P, 100 < p \leq 400 \end{cases}$$

Se debe trabajar por tramos igual que en el inciso anterior:
I) Primer tramo: si $P \leq 100$
La condición óptima del monopolista es $IM = CM$. La demanda inversa en este tramo es $P = 200 - \frac{2}{3}q_a$. Entonces,

$$IM = 200 - \frac{4}{3}q_a = 0 = CM$$
$$\Rightarrow q_a^* = 150, P^* = 100$$

Esta opción sí es viable. Además,

$$\Pi_a = 150 \cdot 100 = 15000$$

II) Segundo tramo: si $100 < P \leq 400$
La condición óptima del monopolista es $IM = CM$. La demanda inversa en este tramo es $P = 400 - 2q_a$. Entonces,

$$IM = 400 - 4q_a = 0 = CM$$
$$\Rightarrow q_a^* = 100, P^* = 200$$

Esta opción sí es viable. Además,

$$\Pi_a = 100 \cdot 200 = 20000$$

Como el beneficio es mayor, entonces para q_a, el monopolista escoge $P^* = 200$ y vende $q_a^* = 100$.
b) Optimicemos para q_3 :
La demanda inversa es $P = 900 - 3q_3$. Entonces,

$$IM = 900 - 6q_3 = 0 = CM$$
$$\Rightarrow q_3^* = 150, P^* = 450$$

Además,

$$\Pi_3 = 150 \cdot 450 = 67500$$

Este es el óptimo del monopolista para esta tercera demanda. Si calculamos el beneficio total:

$$\Pi = \Pi_a + \Pi_3 = 87500$$

Nota 18. Como el beneficio es mayor que cuando el monopolista no podía discriminar. Al discriminar, el monopolista siempre tendrá mayor o igual beneficio.

Ejercicio 78 [Impuesto a un monopolio[3]].

Ejercicio 79 [Monopolista discriminador de primer grado[4]]. Considere un monopolista. La demanda inversa de mercado del bien está dada por la ecuación $P = 1000 - Q$ y la función de costo total del monopolista está dada por:

$$C = 1000 + 100Q + \frac{1}{2}Q^2$$

a) Encuentre la producción de equilibrio, el precio de equilibrio, los beneficios de la empresa, el valor del excedente del consumidor (EC), el excedente del productor (EP) y la pérdida irrecuperable de eficiencia de la economía provocada por el monopolista (PIE).
→ Primeramente, se calculan el costo marginal y el ingreso marginal.

$$CM = 100 + Q$$
$$IM = 1000 - 2Q$$

Para encontrar el nivel de producción se iguala ($IM = CM$).

$$IM = CM \Rightarrow 1000 - 2Q = 100 + Q \Rightarrow Q = 300$$

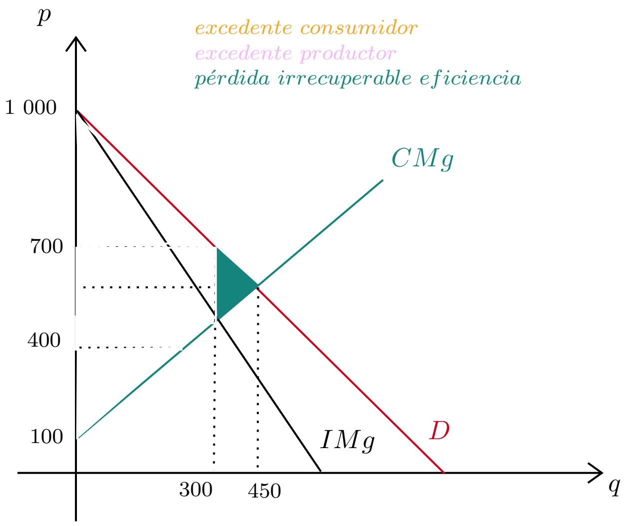
[3]Ejercicio tomado de ACCG
[4]Ejercicio tomado de ACCG

Para encontrar el precio, se sustituye ($Q = 300$) en la demanda inversa.

$$P = 1000 - Q \Rightarrow P = 700$$

A continuación se calculan los beneficios.

$$\pi = P \cdot Q - \left[1000 + 100Q + \left(\frac{1}{2}\right) Q^2\right]$$
$$\pi = (700) \cdot (300) - 76000 \Rightarrow \pi = 134\ 000$$



Se encuentra el EC, EP y PIE.

$$PIE = \frac{(700 - 400)(450 - 300)}{2} \Rightarrow PIE = 22500$$

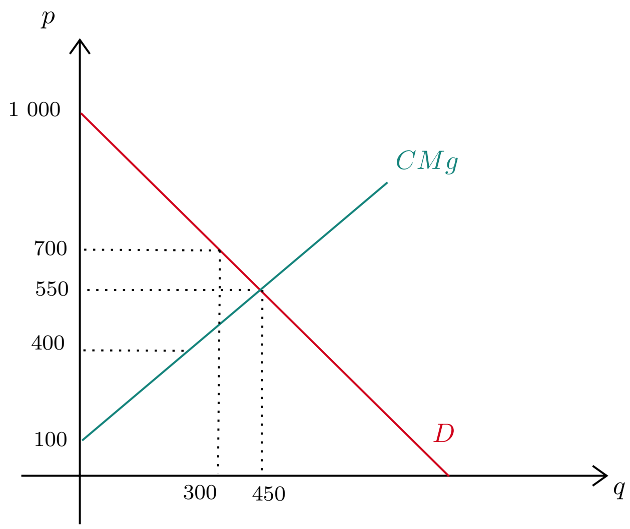
$$EC = \frac{(1000 - 700)(300)}{2} \Rightarrow EC = 45000$$
$$EP = (700 - 400) \cdot (300) + \left(\frac{(400 - 100)(300)}{2}\right) \Rightarrow EP = 135000$$

b) Ahora, este monopolista practicará discriminación de precios de primer grado (es decir, discriminación de precios perfecta). En este caso la curva de demanda es también la curva de ingreso marginal de la empresa. Explique por qué esto es cierto.

→ Esto se debe a que a cada persona se le cobra su disposición a pagar.

c) Dado que esta empresa practica discriminación de precios de primer grado, calcule los beneficios de la empresa, el excedente del consumidor, el excedente del productor y la pérdida irrecuperable de eficiencia.

→ En este caso se cumple que ($EC = 0$) y ($PIE = 0$). Para los otros cálculos se utiliza el siguiente gráfico:



El excedente del productor se calcula a continuación.

$$EP = \frac{(1000 - 100)(450)}{2} \Rightarrow EP = 202500$$

Para obtener los beneficios se deben calcular los ingresos totales y los costos totales. Los costos totales se encuentran al evaluar el nivel de producción del monopolista en la función de costos. El monopolista discriminador de primer grado produce en el punto en que (CM = D).

$$\begin{aligned} 100 + Q = 1000 - Q &\Rightarrow Q = 450 \\ \pi = IT - \left[1000 + 100Q + \left(\frac{1}{2}\right) Q^2\right] \\ \pi = P \cdot Q - 147250 \end{aligned}$$

El monopolista discriminador de primer grado le cobra un precio diferente a cada consumidor, por lo que se debe calcular el área bajo la curva de demanda que se encuentra en morado en el gráfico.

$$\begin{aligned} IT = (550 \cdot 450) + \frac{(1000 - 550)(450)}{2} \Rightarrow IT = 247500 + 101250 \\ \pi = 101250 + 247500 - 147500 = 201500 \end{aligned}$$

Ejercicio 80 [Teoría de producción a largo plazo[5]]. Supongamos ahora que existe una fábrica de helados distinta cuya función de costos de largo plazo es:

$$C(q) = \begin{cases} q^2 + 9 & q > 0 \\ 0 & q = 0 \end{cases}$$

Suponga que el mercado de helados es competitivo y que las empresas toman los precios como dados.

1. (3 puntos) Calcula la curva de oferta de largo plazo de la empresa. ¿La empresa elige producir una cantidad positiva a cualquier precio?

→ La curva de oferta de largo plazo está dada por:

$$p = MC(q) = 2q$$

La empresa producirá siempre que $p \geq AVC(q)$. Esto ocurre siempre que el precio sea al menos tan grande como el costo variable promedio mínimo. Resolviendo:

$$2q \geq \frac{q^2 + 9}{q} \iff q \geq 3$$

[5]Ejercicio tomado de Gruber (2023)

Entonces la empresa produce siempre que $p \geq 6$.

2. (2 puntos) Escribe la oferta agregada del mercado de helado.

→ La oferta agregada de helado es:

$$Q_S = 4q = \begin{cases} 4\left(\frac{1}{2}p\right) = 2p & p \geq 6 \\ 0 & p < 6 \end{cases}$$

3. (5 puntos) Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio, así como la ganancia que obtiene cada empresa.

→ En equilibrio $Q_D = Q_S$, por tanto:

$$30 - p = 2p \Rightarrow p^* = 10 \quad \Rightarrow Q^* = 20$$

Las ganancias individuales son:

$$\pi^* = \frac{Q^*}{4}\left(p^* - AVC\left(\frac{Q^*}{4}\right)\right) = 5\left(10 - \left(5 + \frac{9}{5}\right)\right) = 5\left(5 - \frac{9}{5}\right) = 5 \cdot \frac{16}{5} = 16$$

Suponga ahora que una empresa ha descubierto una nueva receta para helado sin lactosa. Como la mayoría del pueblo es intolerante a la lactosa, el gobierno decide cerrar la producción de helado con lactosa. Como este helado es más saludable, la gente lo demanda más. En particular, la nueva demanda es:

$$Q_D = (30 + A) - p$$

donde $A > 0$ es una constante exógena que refleja la mayor popularidad del helado sin lactosa. Solo hay una empresa que tiene la patente para esta nueva receta, y tiene la misma función de costos de producción mencionada anteriormente, es decir:

$$C(q) = \begin{cases} q^2 + 9 & q > 0 \\ 0 & q = 0 \end{cases}$$

4. (5 puntos) Resuelve la elección óptima del monopolista en cuanto a cantidad y precio como función de A.

→ Los ingresos son:

$$R(q) = qp(q) = q(30 + A - q)$$

El monopolista iguala el costo marginal $2q$ con el ingreso marginal $30 + A - 2q$. La cantidad óptima es:

$$Q^* = \frac{30 + A}{4}, \quad p^* = \frac{90 + 3A}{4}$$

5. (5 puntos) Calcula el excedente del consumidor y del productor en este mercado. ¿Es eficiente socialmente? Si no lo es, calcula la pérdida de peso muerto.

→ El excedente del consumidor es:

$$\frac{1}{2}\left(30 + A - \frac{90 + 3A}{4}\right)\left(\frac{30 + A}{4}\right) = \frac{(30 + A)^2}{32}$$

El excedente del productor es:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{90 + 3A}{4} - \frac{30 + A}{4}\right)\left(\frac{30 + A}{4}\right) = \frac{(30 + A)^2}{8}$$

La situación no es eficiente socialmente debido a una pérdida de peso muerto de:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{30 + A}{3} - \frac{30 + A}{4}\right)\left(\frac{30 + A}{4}\right) = \frac{(30 + A)^2}{96}$$

6. (7 puntos) ¿Están los consumidores mejor con el helado sin lactosa incluso si hay un monopolista en comparación con una situación con competencia pero con helado con lactosa? ¿De qué depende esto con respecto a A? Proporcione una intuición económica.

→ El excedente del consumidor en un mercado competitivo es:

$$\frac{1}{2}(30 - p^*)Q^* = \frac{1}{2}(30 - 10)(20) = 200$$

Los consumidores estarán mejor con helado sin lactosa si se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{(30 + A)^2}{32} > 200 \Rightarrow A > 50$$

Uno normalmente esperaría que los consumidores estén mejor en un mercado competitivo. Sin embargo, en este caso, si el valor de A excede 50, la mayor demanda por helado sin lactosa compensa las ineficiencias introducidas por el monopolio. Por lo tanto, un valor suficientemente grande de A indica que la preferencia del consumidor por el helado sin lactosa es lo suficientemente fuerte como para compensar las desventajas de una estructura de mercado monopólica.

7. (3 puntos) Si el gobierno puede poner un tope al precio del helado, ¿cuál debería ser ese tope de precio? Proporcione una intuición económica.

→ El gobierno busca eliminar la pérdida de peso muerto estableciendo un precio tope que obligue al monopolista a operar como en un mercado competitivo. Igualando la demanda $D(q)$ con el costo marginal $MC(q)$, encontramos la cantidad socialmente óptima:

$$q = \frac{30 + A}{3}$$

El precio tope debe ser:

$$p = \frac{60 + 2A}{3}$$

Ejercicio 81 [Monopolio discriminador[6]]. Un monopolista se enfrenta a n consumidores donde la demanda del consumidor i está dada por:

$$q_i = \frac{i}{P_i^2} \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Además, se sabe que el monopolista tiene un costo marginal igual a Q.

1. Encuentre la cantidad y el precio que cobraría el monopolista si no puede discriminar precios.
→

$$q_i = \frac{i}{P^2}$$
$$Q = \frac{1}{P^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$
$$P = \left[\frac{1}{Q} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_Q \left\{ \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} - \frac{Q^2}{2} \right\}$$

Condición de primer orden:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} - Q = 0$$
$$\Rightarrow Q = \left[\frac{1}{2^3} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow P = 2^{\frac{1}{3}} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

[6] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

2. Encuentre la cantidad y el precio que cobraría el monopolista a cada consumidor si puede discriminar precios y no existe oportunidad de arbitraje.
$\rightarrow$

$$q_i = \frac{i}{P_i^2} \Rightarrow P_i = \frac{1}{\sqrt{q_i}} \cdot \sqrt{i}$$

Maximización del beneficio:

$$\max_{q_i \ \forall i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{i} - \frac{1}{2} \left(\sum q_i \right)^2 \right\}$$

Condiciones de primer orden:

$$\frac{1}{2} q_i^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{i} - Q = 0 \Rightarrow q_i = \frac{i}{4Q^2}$$
$$\Rightarrow Q = \frac{1}{4Q^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

Despejando:

$$\Rightarrow Q = \left[\frac{n(n+1)}{8} \right]^{\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow q_i = \frac{i}{4 \left[\frac{n(n+1)}{8} \right]^{\frac{2}{3}}}$$
$$\Rightarrow q_i = \frac{i}{[n(n+1)]^{\frac{2}{3}}} \quad \text{y} \quad P_i = n(n+1)^{\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 82 [Precio y cantidad de un monopolio multiplanta[7]]. Un monopolista enfrenta la función de demanda:

$$P = \frac{A}{Q^{\alpha}}, \qquad \alpha < 1$$

Este monopolista tiene n plantas para producir el bien que vende en este mercado y el costo marginal de cada planta viene dado por $CM_i = iq_i$.

1. Determine el precio que cobrará el monopolista.
$\rightarrow$

$$CT_i = \frac{iq_i^2}{2}$$

$$\max_{q_i} \left\{ A \left(\sum q_i \right)^{1-\alpha} - \sum \frac{i}{2} q_i^2 \right\}$$

Condiciones de primer orden:

$$A(1-\alpha)Q^{-\alpha} - iq_i = 0 \Rightarrow q_i = A(1-\alpha)Q^{-\alpha} \cdot \frac{1}{i}$$
$$\vdots$$
$$q_j = A(1-\alpha)Q^{-\alpha} \cdot \frac{1}{j}$$

[7] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Sumando:

$$Q = A(1-\alpha)Q^{-\alpha}\sum \frac{1}{i}$$
$$\Rightarrow Q = \left[A(1-\alpha)\sum \frac{1}{i}\right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

2. Determine la cantidad que producirá en cada planta.
$\rightarrow$

$$P = A\left[A(1-\alpha)\sum \frac{1}{i}\right]^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$$

Ejercicio 83 [Monopolio en el mercado local y competido en el mercado internacional[8]]. Una empresa es un monopolio en el mercado local y es competidor en el mercado internacional. En el mercado local, la empresa se enfrenta a una curva inversa de demanda igual a $P = a - q_L$. En el mercado internacional, la empresa puede vender la cantidad que desee a un precio de P_I. La empresa puede producir a un costo total igual a Q^2 con $Q = q_L + q_I$.

1. Si los costos de transporte son prohibitivos, encuentre la cantidad óptima que la empresa vendería en cada mercado y el precio que cobraría en el mercado local.
$\rightarrow$

$$\max_{q_L,\, q_I} \left\{aq_L - q_L^2 + P_I q_I - (q_L + q_I)^2\right\}$$

Condiciones de primer orden (CPO):

$$a - 2q_L - 2Q = 0$$
$$P_I - 2Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{P_I}{2} \Rightarrow q_L = \frac{a}{2} - \frac{P_I}{2} \Rightarrow P_L = \frac{a}{2} + \frac{P_I}{2}$$

$$\Rightarrow q_I = P_I - \frac{a}{2}$$

2. Si el costo de transporte es igual a t, encuentre la cantidad de equilibrio que la empresa vendería en cada mercado y los precios que cobraría.
$\rightarrow$

$$\mathcal{L} = aq_L - q_L^2 + P_I q_I - (q_L + q_I)^2 + \lambda\left[t^2 - (a - q_L - P_I)^2\right]$$

CHC:

$$\lambda \geq 0 \quad , \quad t^2 - (a - q_L - P_I)^2 \geq 0 \quad , \quad \lambda\left[t^2 - (a - q_L - P_I)^2\right] = 0$$

Condiciones de primer orden:

$$a - 2q_L - 2Q + 2\lambda(a - q_L - P_I) = 0$$
$$P_I - 2Q = 0$$
$$t - (a - q_L - P_I) = 0$$

Caso 1: Si $t^2 - (a - q_L - P_I)^2 > 0 \Rightarrow \lambda = 0$
Entonces la solución coincide con el caso donde los costos son prohibitivos.
Caso 2: Si $\lambda > 0 \Rightarrow t^2 - (a - q_L - P_I)^2 = 0$

[8] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$q_L = a - P_I - t \Rightarrow P_L = t + P_I$$
$$Q = \frac{P_I}{2} \Rightarrow q_I = \frac{3P_I}{2} + t - a$$

Caso 3: Si $t^2 - (a + q_I - P_I)^2 = 0$ y $\lambda = 0$
La solución coincide con la del caso donde los costos son prohibitivos, pero también se satisface que $|P_L - P_I| = t$.

Ejercicio 84 [Monopolio y tipos de discriminación de precios[9]]. Un monopolista suple a n consumidores que presentan una demanda inversa igual a $P_i = ia - q_i$.

1. Si el monopolista tiene un costo marginal igual a c y decide discriminar precios utilizando una tarifa de dos tramos, ¿cuál es el precio que debe cobrarle a todos los consumidores para maximizar su ganancia asumiendo que $P < a$?
   → Los beneficios se maximizan de la siguiente manera:

$$\max_p \{n \cdot T(p) + P \cdot Q(p) - c \cdot Q(p)\}$$

$$P_i = a - q_i \quad \Rightarrow \quad P_i = ia - q_i$$

$$\pi = \frac{n}{2}(a-p)(a-p) + P \cdot \sum_{i=1}^{n}(a-p) - c \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(a-p)^2}{2}$$

   Dado que se trata de una tarifa de dos tramos:

$$\pi = \frac{n}{2}(a-p)^2 + P \cdot \sum_{i=1}^{n}(ia-p) - c \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(ia-p)^2}{2}$$

   Derivando con respecto a p:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = -n(a-p) + a\sum_{i=1}^{n} i - 2np + c = 0$$
$$(p-a) + \frac{a(n+1)}{2} - 2p + c = 0$$
$$\Rightarrow P = a\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) + c$$

2. Si el monopolista tiene un costo total igual a $\frac{1}{2}Q^2$, donde Q es la producción total del monopolista, y decide discriminar precios en tercer grado, ¿cuál es el precio que debe cobrarle a cada uno de los consumidores y qué cantidad les vende?
   →

$$L_{Mi} = c\pi_T \qquad \text{y} \qquad L_{Mi} = L_{Mj}$$
$$ia - 2q_i = Q \Rightarrow ia - 2q_i = nq_j - \frac{nja}{2} + \sum q_j$$

$$q_j = \frac{1}{n^2}\left(ia\left(\frac{i+1}{2}\right) - a\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) = \frac{a}{n^2}\left(\frac{i(i+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$P_i = ia - \frac{a}{n^2}\left(\frac{i(i+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$Q = ia - \frac{a}{n^2}\left(\frac{i(i+1)}{2} - n(n+1)\right) = n^2 q_i$$

[9] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Ejercicio 85 [Monopolio multiplanta[10]]. Un monopolista opera en un mercado con una demanda inversa igual a $P = a - by$. Los costos de producción del monopolio dependen de la cantidad de plantas que tenga en operación. Cada una de las plantas tiene una función de producción igual a $y_i = L_i^{\frac{1}{2}}$ con $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$, donde L_i son las unidades de trabajo contratadas. La empresa enfrenta un costo por unidad de trabajo igual a 1, con independencia en las unidades contratadas.

1. Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio del monopolista.
   $\rightarrow$

$$
\begin{aligned}
P &= a - b\sum_{i=1}^{n} y_i \\
y_i &= L_i^{1/2} \Rightarrow \text{planta} \\
\Rightarrow L_i &= y_i^2 \Rightarrow CT_i = \omega L_i = \omega y_i^2
\end{aligned}
$$

$$
\max_{y_i,\,\forall i}\left\{a\sum_{i=1}^{n} y_i - b\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\omega y_i^2\right\}
$$

Condición de primer orden:

$$
\frac{\partial}{\partial y_i} : a - 2by - 2\omega y_i = 0 \Rightarrow y_i = \frac{a}{2\omega} - \frac{b}{\omega}y
$$

Sumando ambos lados:

$$
\begin{aligned}
y = \sum_{i=1}^{n} y_i &= \frac{na}{2\omega} - \frac{nb}{\omega}y \Rightarrow y\left(1 + \frac{nb}{\omega}\right) = \frac{na}{2\omega} \\
\Rightarrow y &= \frac{na}{2\omega + 2nb}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
y_i &= \frac{a}{2\omega} - \frac{bna}{\omega(2\omega + 2nb)} = \frac{a}{2\omega}\left(1 - \frac{bn}{\omega + nb}\right) = \frac{a}{2\omega + 2nb} \\
P &= a - \frac{bna}{2\omega + 2nb} = a\left(1 - \frac{bn}{2\omega + 2nb}\right) = \frac{a(2\omega + nb)}{2\omega + 2nb}
\end{aligned}
$$

Dado que $\omega = 1$:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{na}{2 + 2nb} \\
y_i &= \frac{a}{2} - \frac{bna}{2 + 2nb} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{bn}{1 + nb}\right) = \frac{a}{2 + 2nb} \\
P &= a\left(1 - \frac{bn}{2 + 2nb}\right) = \frac{a(2 + nb)}{2 + 2nb}
\end{aligned}
$$

2. Encuentre el valor óptimo de n.
   $\rightarrow$ Observe que el beneficio total:

$$
\pi = \frac{na^2(2nb)}{(2 + 2nb)^2} - \frac{na^2}{(2 + 2nb)^2} = \frac{na^2(2nb - 1)}{(2 + 2nb)^2}
$$

Valor óptimo cuando $n = 1$:

[10] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$\pi_* = \frac{na^2}{4(1+nb)}$$

Conforme $\uparrow n \Rightarrow \uparrow \pi$, por lo que el monopolista querrá $n \to \infty$.

Ejercicio 86 [Monopolio con y sin discrminación de precios[11]]. Considere una economía de n consumidores y una empresa monopólica que no tiene costos fijos y que el costo de producir una unidad adicional es constante e igual a θ. Cada consumidor tiene una demanda por el bien que produce la empresa monopólica dada por:

$$P_i = \frac{m_i}{\sqrt{q_i}}$$

Donde m_i representa el ingreso del consumidor i.

1. Determine la cantidad y el precio que escoge la empresa si no puede discriminar precios. También, determine la producción total de la empresa.
$\to$ Observe que:

$$P_i = \frac{m_i}{\sqrt{q_i}} \Rightarrow q_i = \frac{m_i^2}{P_i^2}$$

$$Q = \frac{1}{P^2}\sum m_i^2 \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{Q}}\left(\sum m_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\max_Q \left\{\sqrt{Q}\left(\sum m_i^2\right)^{\frac{1}{2}} - \theta Q\right\}$$

Condición de primer orden (CPO):

$$\frac{1}{2}Q^{-\frac{1}{2}}\left(\sum m_i^2\right)^{\frac{1}{2}} - \theta = 0$$

Despejando:

$$\Rightarrow Q^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\theta}{\left(\sum m_i^2\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow Q = \frac{\sum m_i^2}{4\theta^2}, \quad P = 2\theta, \quad q_i = \frac{m_i^2}{4\theta^2}$$

2. Determine la cantidad y precios que cobra la empresa a cada consumidor si puede cobrar precios distintos y no existe oportunidad de arbitraje. También, determine la producción total de la empresa.
$\to$

$$P_i = \frac{m_i}{\sqrt{q_i}}$$

La empresa ahora elige cada q_i para maximizar:

$$\max_{q_i}\left\{\sum\left[m_i\sqrt{q_i} - \theta q_i\right]\right\}$$

Condición de primer orden para cada $i = 1, \ldots, n$:

$$\frac{1}{2}m_i q_i^{-\frac{1}{2}} - \theta = 0 \Rightarrow q_i = \frac{m_i^2}{4\theta^2} \Rightarrow P_i = 2\theta$$

Producción total:

$$Q = \sum q_i = \frac{1}{4\theta^2}\sum m_i^2$$

[11] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

3. Determine cuál panorama, de los anteriores, sería el más preferido por la empresa y justifique su respuesta.
   $\rightarrow$ Observe que $\pi_i = \pi_2$, entonces es indiferente entre discriminación de precios o no.
   Al final, todos tienen demandas similares, por lo que no tiene a quién "discriminar".

Capítulo 17

Monopsonio

Ejemplo 25 [Monopsonista y su nivel de contratación]. En la economía de Mordor hay un monopsonista cuya función de producción es $Y = 200L - L^2 + 5$ y la función de oferta de trabajo está dada por $w = 100 + 4L$. El monopsonista vende el producto en un mercado perfectamente competitivo a un precio de $P = 1$. Determine:

- $$\begin{aligned} VPMg =& P \cdot \frac{\partial Y}{\partial L} \\ VPMg =& P \cdot \frac{\partial}{\partial L}\left[200L - L^2 + 5\right] \\ VMPg =& P \cdot (200 - 2L) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \frac{\partial w \cdot L}{\partial L} =& \frac{\partial}{\partial L}\left[(100 + 4L)L\right] \\ L^* =& 100 + 8L \\ =& 200 - 2L \\ =& 10 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} Y =& 200L - L^2 + 5 \\ Y^* =& 200(10) - (10)^2 + 5 \\ =& 1905 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} w =& 100 + 4L \\ w^* =& 100 + 4(10) \\ =& 140 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \pi =& P \cdot Y - w \cdot L \\ =& 1 \cdot 1950 - 140 \cdot 10 \\ =& 550 \end{aligned}$$

Ejemplo 26 [Función de producción de un monopsonista]. La función de producción de un monopsonista viene dada por $Q = 15\ell^2 - 0{,}2\ell^3$. La función de oferta de trabajo es $\omega = 144 + 23{,}4\ell$. El monopsonista vende su producto en un mercado de competencia perfecta a un precio de $p = 3$.

- Demanda de L

$$
\begin{aligned}
VPMg =& CMg \\
P \cdot \frac{\partial Q}{\partial \ell} =& \frac{\partial w \cdot \ell}{\partial \ell} \\
3\left(30\ell - \frac{3}{5}\ell^2\right) =& \frac{\partial CT}{\partial \ell} \\
3\left(30\ell - \frac{3}{5}\ell^2\right) =& \frac{\partial}{\partial \ell}\left[144\ell + 23{,}4\ell^2\right] \\
90\ell - \frac{9}{5}\ell^2 =& 144 + 46{,}8\ell \\
0 =& \frac{9}{5}\ell^2 - 90\ell + 46{,}8\ell + 144 \\
0 =& \frac{9}{5}\ell^2 - 43{,}2\ell + 144 \\
\ell = 20 \vee \ell = 4 & \\
\therefore \ell^* =& 20
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
Q =& 15\ell^2 - 0{,}2\ell^3 \\
Q^* =& 15(20)^2 - 0{,}2(20)^3 \\
=& 4400
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\omega =& 144 + 23{,}4\ell \\
\omega^* =& 144 + 24{,}4(20) \\
=& 612
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
\pi =& P \cdot Q - \omega \cdot \ell \\
=& 3(4400) - 612(20) \\
=& 960
\end{aligned}
$$

Ejemplo 27 [Nivel de contratación y salario]. Una empresa vende su producto en un mercado perfectamente competitivo que cuenta con la siguiente demanda: $P = 5000 - 5Q$. Su función de producción es $Q = 20L$ donde Q es la cantidad que produce y L es la cantidad de trabajo que contrata en un mercado perfectamente competitivo. La oferta de trabajo es $w = 1000 + 500L$ donde w es el salario.

- Encuentre la demanda de trabajo, el nivel de contratación y el salario de mercado. Grafique el mercado laboral en equilibrio.
  - Demanda de trabajo

    Si el mercado de los factores de la producción es competitivo (como lo es en este caso y no en un monopsonio o monopolio por ejemplo), entonces se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
w =& VPMg \\
\Leftrightarrow w =& P \cdot PMg
\end{aligned}
$$

    Por lo tanto, debe encontrarse la productividad marginal del trabajo:

$$
\begin{aligned}
PMg_L =& \frac{\partial Q}{\partial L} \\
\Leftrightarrow PMg_L =& \frac{\partial}{\partial L}\left[20L\right] \\
\Leftrightarrow PMg_L =& 20
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} w =& P \cdot PMg_L \\ \Leftrightarrow w =& (5000 - 5Q) \cdot 20 \\ \Leftrightarrow w =& (5000 - 5(20L)) \cdot 20 \\ \Leftrightarrow w =& 100000 - 2000L \end{aligned}$$

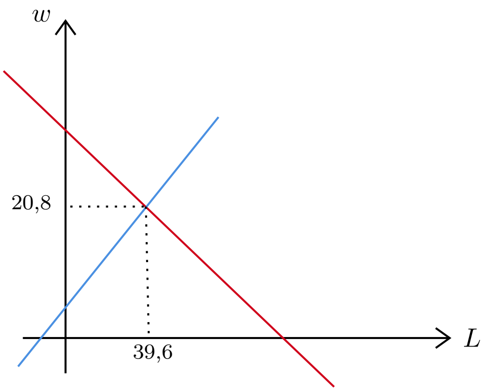
- Nivel de contratación

  En el equilibrio, debe ser el caso que la oferta y la demanda de trabajo sean iguales:

$$\begin{aligned} w_d =& w_s = w \Leftrightarrow L_d = L_s \\ \Leftrightarrow 100000 - 2000L =& 1000 + 500L \\ \Leftrightarrow 100000 - 1000 =& 2000L + 500L \\ \Leftrightarrow 99000 =& 2500L \\ \Leftrightarrow \frac{198}{5} =& L \end{aligned}$$

- Salario de mercado

  Sabiendo la cantidad contratada de equilibrio $L = \frac{198}{5}$, entonces debe ser el caso que el nivel de salario (evaluando en la función de oferta o demanda de trabajo) es de $w = 20800$.



- Calcule el inciso anterior y elabore el gráfico correspondiente si:

  - Una única empresa vendiera el producto.

    En este caso, el mercado de insumos sigue siendo competitivo, pero el mercado de donde la empresa vende sus bienes o servicios es un monopolio.

    Nuevamente, se sabe que la condición de equilibrio de la demanda por trabajo es:

$$\begin{aligned} w =& VPMg \\ \Leftrightarrow w =& IMg \cdot PMg \end{aligned}$$

La única diferencia ahora es que, la empresa no ofrece sus bienes o servicios en un mercado competitivo sino en un monopolio, por lo que el ingreso marginal ya no es igual al precio, y la forma del valor del producto marginal cambia.

Luego, en un monopolio, el ingreso marginal tiene el doble de pendiente que la curva de demanda del mercado, la cual es 5, por lo tanto:

$$IMg = 5000 - 10Q$$

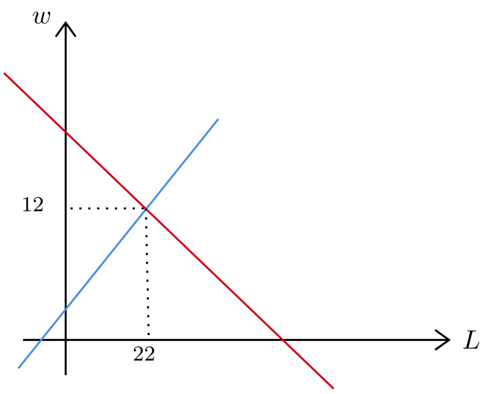
Y de esta forma:

$$\begin{aligned} w =& IMg \cdot PMg \\ w =& (5000 - 10Q) \cdot 20 \\ w =& (5000 - 10(20L)) \cdot 20 \\ w =& 100000 - 4000L \end{aligned}$$

En cuanto al nivel de contratación hay que igualar la oferta y la demanda de trabajo:

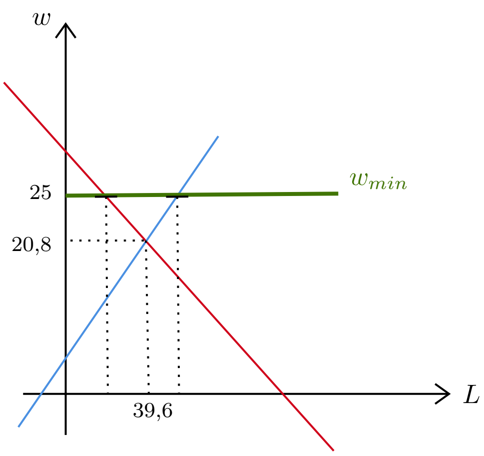
$$\begin{aligned} w_d =& w_s = w \Leftrightarrow L_d = L_s \\ \Leftrightarrow 100000 - 4000L =& 1000 + 500L \\ \Leftrightarrow 99000 =& 4000L + 500L \\ \Leftrightarrow 99000 =& 4500L \\ \Leftrightarrow 22 =& L \end{aligned}$$

Sabiendo la cantidad contratada de equilibrio $L = 22$, entonces debe ser el caso que el nivel de salario (evaluando en la función de oferta o demanda de trabajo) es de $w = 12000$.



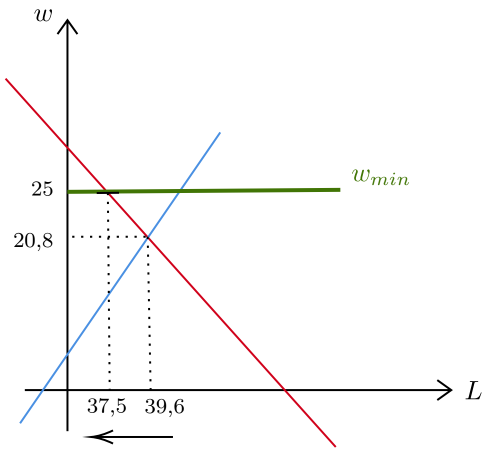
- Se estableciera un salario mínimo en el que $w = 25000$.

  Nuevamente hay que suponer que la empresa ofrece sus bienes o servicios en un mercado competitivo dado que los incisos son independientes. Por lo tanto, se toma la demanda laboral que se había encontrado inicialmente $w = 100000 - 2000L$ y se compara con el salario mínimo propuesto:



Note que ese salario mínimo equivale a un precio mínimo por encima del salario de equilibrio, por lo cual, a ese nivel de salario el trabajo demandado sería de:

$$\begin{aligned} w =& 100000 - 2000 \cdot L \\ \Leftrightarrow 25000 =& 100000 - 2000 \cdot L \\ \Leftrightarrow 2000L =& 100000 - 25000 \\ \Leftrightarrow 2000L =& 75000 \\ \Leftrightarrow L =& \frac{72}{2} = 37{,}5 \end{aligned}$$



Nota: Los incisos (b.i) y (b.ii) son independientes.

Ejercicio 87 [Demostraciones de los monopolios[1]]. (5 Puntos) Demuestra matemáticamente por qué la curva de ingreso marginal de un monopolista está siempre por debajo de la curva de demanda.
→ Sea $Q_D(p)$ la curva de demanda. La curva de demanda inversa está dada por $p(Q_D)$. El ingreso total es:

$$R = Q_D p(Q_D)$$

Entonces, el ingreso marginal es:

$$MR = \frac{dp}{dQ_d} Q_D + p(Q_d) = p(Q_d)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

donde $\varepsilon = \frac{dQ_D}{dp} \cdot \frac{p}{Q_D}$ es la elasticidad-precio de la demanda. Como la elasticidad es negativa y la demanda inversa es $p(Q_D)$, entonces el ingreso marginal es siempre menor que el precio (i.e., siempre está por debajo de la curva de demanda).

2. (5 Puntos) Demuestra matemáticamente que un monopolista siempre querrá estar en el tramo elástico de la curva de demanda.
→ El ingreso marginal es:

$$MR = \frac{dp}{dQ_d} Q_D + p(Q_d) = p(Q_d)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

En el óptimo:

$$MR = MC$$

Por lo tanto, si el monopolista está obteniendo beneficios, necesariamente se debe cumplir que $|\varepsilon| > 1$, de lo contrario el margen de ganancia sería negativo.

3. (5 Puntos) Demuestra matemáticamente que el margen de ganancia disminuye con el valor absoluto de la elasticidad de la demanda.
→ Del ejercicio anterior, si la demanda es más elástica (es decir, ε es más negativo), entonces el término $\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ es menor, y por lo tanto el margen es más bajo.

Capítulo 18

Oligopolio

La siguiente y última estructura de mercado típica que falta por estudiar, es el oligopolio. Como se puede deducir de las dos estructuras estudiadas anteriormente, la competencia perfecta y el monopolio son figuras diametralmente opuestas. Entre estas dos, generalmente se ubican los oligopolios.

Hasta el momento, se ha utilizado un criterio numérico para diferenciar a unas estructuras de mercado de otras; es decir, un mercado de competencia perfecta es aquel en el que hay muchos consumidores y muchos oferentes, a tal punto que el precio está dado y este no puede ser alterado por un agente individual. Por el otro lado, en un monopolio (monopsonio) hay un único oferente (consumidor), siendo así que entonces el precio no está dado, y debido a las concentras de poder de mercado, este sí puede ser influenciado por un único agente individual.

Ahora, es importante introducir un segundo criterio de distinción: la diferenciación entre productos. Ahora, estudiando los oligopolios, nos encontraremos con que ahora existen más de un solo oferente del producto, por lo que no se configura un monopolio. Ahora, la pregunta natural que surge es la siguiente: ¿entonces cuántos oferentes hay? La respuesta a esta pregunta es: depende.

Es aquí en donde entra en juego el nuevo criterio diferenciador recién introducido: la diferenciación del producto. En un mercado de competencia perfecta, al haber tantos consumidores y tantas empresas y como el precio está dado, no puede haber diferencias entre productos, puesto que esto podría conducir a diferencias en precios entre los mismos productos, por lo que podría no existir un único precio dado y fijo. En los monopolios pasa algo similar: al haber solamente un oferente, su producto no tiene competencia y por ende no existe diferenciación alguna de producto.

Ahora, en el caso de los oligopolios, se generan matices. Es decir, puede haber o no diferenciación de productos, y con esto, se configuran distintos tipos de oligopolios. Así, en los oligopolios pueden haber desde dos oferentes (como mínimo) hasta un número indeterminado de empresas, siempre y cuando no se configure una competencia perfecta. Dentro de este margen de posibilidades, puede haber o no, diferenciación de productos entre ellos, llevando a la existencia de productos diferentes con precios diferentes, y con ello, el establecimiento de empresas líderes y seguidoras.

18.1. Oligopolio de Bertrand

Definición 34 [Oligopolio de Bertrand]. Un oligopolio de Bertrand es aquella estructura de mercado bajo la cual las empresas que participan en el mercado compiten por precios.

Nota 19. Una de las particularidades más importantes de esta estructura de mercado, es que, en última instancia se llegará a una solución idéntica al caso de una competencia perfecta, es decir, que al competir las empresas por precios, estas en última instancia llegarán al punto en que el precio llegará a ser igual al costo marginal.

Este tipo de oligopolio presupone la existencia de una cierta homogeneidad entre los productos de tal manera que, a precios idénticos, las personas consumidoras sean indiferentes entre uno u otro producto.

Derivación general 8 [Modelo general de oligopolio de Bertrand]. En el juego de Cournot, cada empresa elige una cantidad a producir; el precio es determinado por la demanda del bien en relación con la producción total. En un modelo alternativo de oligopolio, asociado a una reseña del libro de Cournot por Bertrand (1883), **cada empresa elige un precio, y produce suficiente cantidad para satisfacer la demanda que enfrenta, dados los precios elegidos por todas las empresas**. Este modelo está diseñado para arrojar luz sobre las mismas preguntas que aborda el juego de Cournot y algunas de las respuestas que ofrece son diferentes.

El entorno económico del modelo es similar al del juego de Cournot. Un único bien es producido por n empresas; cada empresa puede producir q_i unidades del bien a un costo de $C_i(q_i)$. Es conveniente especificar la demanda mediante una "función de demanda" D, en lugar de una función de demanda inversa como se hizo para el juego de Cournot. La interpretación de D es que si el bien está disponible al precio p, entonces la cantidad total demandada es $D(p)$.

Suponga que si las empresas fijan precios distintos, todos los consumidores compran el bien de la empresa con el precio más bajo, que produce suficiente cantidad para satisfacer esta demanda. Si más de una empresa fija el precio más bajo, todas las empresas que lo hacen comparten la demanda a ese precio en partes iguales. Una empresa cuyo precio no sea el más bajo no recibe ninguna demanda y no produce nada. (Nótese que una empresa no elige su producción estratégicamente; simplemente produce lo suficiente para satisfacer toda la demanda que enfrenta, dados los precios, incluso si su precio está por debajo de su costo unitario, en cuyo caso incurre en pérdidas.

En resumen, el **juego de oligopolio de Bertrand** es el siguiente juego estratégico.

Jugadores Las empresas.

Acciones El conjunto de acciones de cada empresa es el conjunto de precios posibles (números no negativos).

Preferencias Las preferencias de la empresa i están representadas por su ganancia, igual a $p_iD(p_i)/m - C_i(D(p_i)/m)$ si la empresa i es una de las m empresas que fijan el precio más bajo ($m = 1$ si el precio de la empresa i, p_i, es más bajo que el de todas las demás), y igual a cero si alguna otra empresa fija un precio más bajo que p_i.

O sea que, básicamente, las empresas compiten por precios y se comprometen a proveer toda la cantidad que los consumidores demanden a dicho precio. Así las cosas:

$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \;\; p_i > p_j \\ p_iQ - cQ = (p_i - c)Q & \text{si} \;\; p_i < p_j \\ \frac{p_iQ - cQ}{2} = \frac{(p_i - c)Q}{2} & \text{si} \;\; p_i = p_j \end{cases}$$

Ejemplo 28 [Duopolio de Bertrand con costo unitario constante y una función de demanda lineal]. Suponga, que hay dos empresas, cada una con función de costos constante igual a c (es decir, $C_i(q_i) = cq_i$, para $i = 1, 2$). Suponga que la función de demanda es $D(p) = \alpha - p$ para $p \leq \alpha$ y $D(p) = 0$ para $p > \alpha$, con $c < \alpha$.

Dado que el costo de producir cada unidad es c, la empresa obtiene una ganancia de $p_i - c$ por cada unidad que vende. Por tanto, su ganancia es:

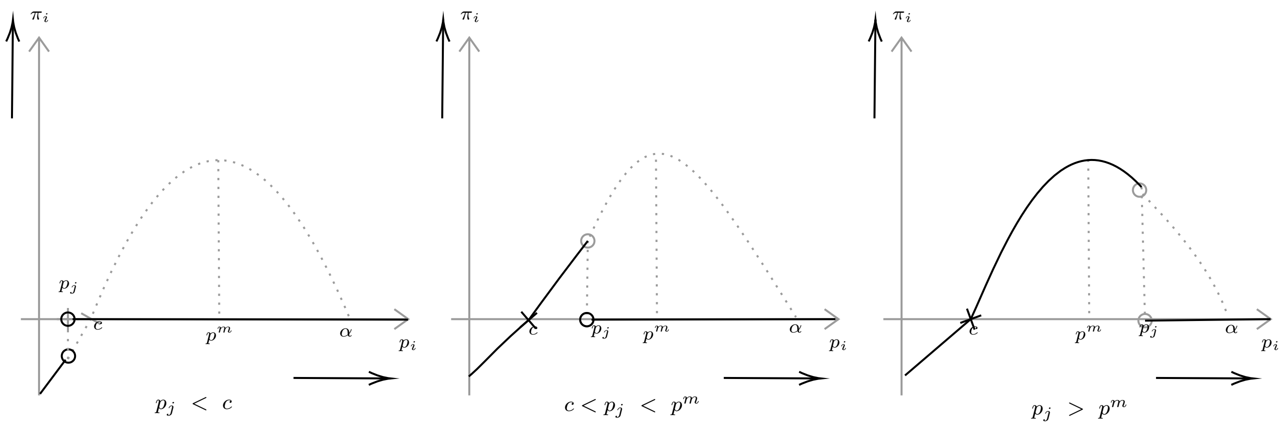
$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{si } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i > p_j, \end{cases}$$

donde j es la otra empresa ($j = 2$ si $i = 1$, y $j = 1$ si $i = 2$). Para encontrar los equilibrios de Nash del juego hay que examinar las funciones de mejor respuesta. Si la empresa j cobra p_j, ¿cuál es el mejor precio que puede cobrar la empresa i?

- Si la empresa i cobra un precio $p_i = p_j$ entonces se divide el mercado con la empresa j
- Si la empresa i cobra un precio $p_i < p_j$, entonces se le vende al mercado entero
- Si $p_j > c$ entonces la empresa i puede generar beneficios vendiendo a un precio ligeramente menor que p_j, lo cual es preferible que compartir el mercado con la otra empresa fijando un precio p_j
- Si $p_j < c$ entonces la empresa i genera beneficios negativos si cobra un precio $p_i \leq p_j$. Sus beneficios serían 0 si fijara un precio $p_i = c > p_j$.

Se pueden hacer estos argumentos estudiando la función de pagos de la empresa i como función del precio p_i para varios valores de p_j fijados por la empresa j. Sea p^m el valor de p que maximiza $(p - c)(\alpha - p)$. Este precio sería el que cobraría una empresa monopolística justamente porque $(p - c)(\alpha - p)$ es el beneficio que recibiría una empresa con un monopolio sobre el mercado.

Estos distintos escenarios se pueden ver ilustrados en la siguiente figura:



Se puede razonar:

- Si $p_j < c$ entonces la empresa i tiene beneficios negativos si $p_i \leq p_j$ y beneficios iguales a 0 si $p_i > p_j$. Por lo tanto, cualquier precio mayor que p_j es una mejor respuesta a p_j. Entonces el conjunto de mejores respuestas a p_j es $MR_i(p_j) = \{p_i : p_i > p_j\}$. Si $p_j = c$ entonces la empresa i tiene beneficios negativos si $p_i \leq p_j$ y beneficios iguales a 0 si $p_i \geq p_j$ (ahora se incluye p_j porque son iguales a los costos de la empresa i). Por lo tanto $MR_i(p_j) = \{p_i : p_i \geq p_j\}$.

- Si $c < p_j \leq p^m$ entonces los beneficios de la empresa i aumentan a medida que p_i aumenta hacia p_j, pero luego justo en p_j, caen abruptamente porque pasarían a dividirse el mercado. Por lo tanto, no hay mejor respuesta: la empresa i quiere escoger un precio menor que p_j, pero mientras más cerca a p_j esté estará mejor. Para cualquier precio menor a p_j siempre hay un precio mayor que podría cobrar pero siempre por debajo de p_j, así que no existe un mejor precio determinado que pueda cobrar. Esto es asumiendo que los precios pueden ser escogidos infinitesimalmente. Luego, entonces $MR_i(p_j) = \emptyset$.

- Si $p_j > p^m$ entonces la única mejor respuesta que puede fijar la empresa i es p^m, el precio que fijaría si fuera monopolística. Por ende $MR_i(p_j) = \{p^m\}$.

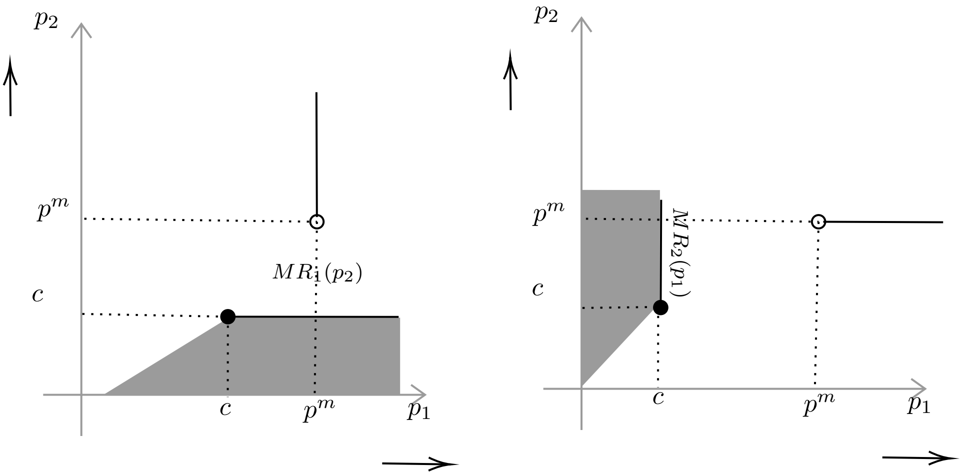
Sea p^m el precio que maximiza $(p - c)(\alpha - p)$. Este es el precio que cobraría una empresa monopolista. El resumen de la función de mejor respuesta de la empresa i es:

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j\} & \text{si } p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j\} & \text{si } p_j = c \\ \emptyset & \text{si } c < p_j \leq p^m \\ \{p^m\} & \text{si } p^m < p_j. \end{cases}$$

Donde $\emptyset$ denota el conjunto vacío.

Este comportamiento refleja que: - La empresa no tiene mejor respuesta para algunos valores (cuando el precio del rival está entre c y p^m). - Tiene múltiples mejores respuestas (cuando $p_j = c$). - Tiene una única mejor respuesta (cuando $p_j > p^m$).

Un equilibrio de Nash es un par (p_1^*, p_2^*) tal que $p_1^* \in MR_1(p_2^*)$ y $p_2^* \in MR_2(p_1^*)$. Si graficamos estas funciones de mejor respuesta, veremos que se cruzan únicamente en el punto (c, c). Por tanto, el juego tiene un único equilibrio de Nash, donde ambas empresas cobran el precio c.



(i) Primero probamos que $(p_1, p_2) = (c, c)$ es un equilibrio: - Si una empresa cobra c, la otra no puede hacer nada mejor: subir el precio implica quedarse sin clientes, y bajarlo genera pérdida.

(ii) Ahora probamos que ningún otro par es equilibrio: - Si $p_i < c$, entonces la empresa está perdiendo dinero. Puede mejorar subiendo su precio a c. - Si $p_i = c$ y $p_j > c$, entonces la empresa puede aumentar su precio ligeramente y seguir capturando todo el mercado, mejorando su ganancia. - Si $p_i > c$ y $p_j > c$, entonces ambas tienen ganancia cero, pero cualquiera puede obtener ganancia positiva al bajarse a un precio ligeramente inferior a la otra.

Cuando el costo unitario es c, la demanda es lineal y el precio se elige libremente, el único equilibrio de Nash en el juego de Bertrand es que ambas empresas cobren $p = c$. Por lo tanto, el único equilibrio de Nash es $S^N = \{(c, c)\}$.

Ejemplo 29 [Duopolio de Bertrand con costo unitario constante]. Considera hasta qué punto el análisis depende de que la función de demanda D tenga la forma específica $D(p) = \alpha - p$. Supón que D es cualquier función para la cual $D(p) \geq 0$ para todo p y que existe $\overline{p} > c$ tal que $D(p) > 0$ para todo $p \leq \overline{p}$. ¿Sigue siendo (c, c) un equilibrio de Nash? ¿Sigue siendo el único equilibrio de Nash?

$\rightarrow$ El par (c, c) de precios sigue siendo un equilibrio de Nash; el argumento es el mismo que antes. Además, como antes, no existe otro equilibrio de Nash. El argumento solo necesita una modificación muy menor. Para una función arbitraria D, puede no existir un precio monopólico p^m; en este caso, si $p_i > c$, $p_j > c$, $p_i \geq p_j$ y $D(p_j) = 0$, entonces la empresa i puede aumentar su ganancia reduciendo su precio ligeramente por debajo de $\overline{p}$ (por ejemplo).

Ejemplo 30 [Duopolio de Bertrand con precios discretos]. Considera la variante del ejemplo del juego de duopolio de Bertrand en esta sección en la que cada empresa está restringida a elegir un precio que sea un número entero de centavos. Supón que c es un número entero de centavos y que $\alpha > c + 1$. ¿Es (c, c) un equilibrio de Nash de este juego? ¿Existe algún otro equilibrio de Nash?

$\rightarrow$ Sí, (c, c) sigue siendo un equilibrio de Nash, por el mismo argumento de antes.

Además, $(c+1, c+1)$ es un equilibrio de Nash (donde c se da en centavos). En este equilibrio, las ganancias de ambas empresas son positivas. Si alguna empresa sube su precio o lo baja a c, su ganancia se vuelve cero. Si alguna empresa baja su precio por debajo de c, su ganancia se vuelve negativa.

Ningún otro par de precios es un equilibrio de Nash, por el siguiente argumento, similar al argumento del texto para el caso en que un precio puede ser cualquier número no negativo:

- Si $p_i < c$ entonces la empresa cuyo precio es más bajo (o cualquiera de las dos, si los precios son iguales) puede aumentar su ganancia (a cero) subiendo su precio a c.
- Si $p_i = c$ y $p_j \geq c + 1$ entonces la empresa i puede aumentar su ganancia de cero a una cantidad positiva subiendo su precio a $c + 1$.
- Si $p_i > p_j \geq c + 1$ entonces la empresa i puede aumentar su ganancia (desde cero) bajando su precio a $c + 1$.
- Si $p_i = p_j \geq c + 2$ y $p_j < \alpha$ entonces cualquiera de las dos empresas puede aumentar su ganancia bajando su precio en un centavo. (Si la empresa i lo hace, su ganancia cambia de $\frac{1}{2}(p_i - c)(\alpha - p_i)$ a $(p_i - 1 - c)(\alpha - p_i + 1) = (p_i - 1 - c)(\alpha - p_i) + p_i - 1 - c$. Tenemos que $p_i - 1 - c \geq \frac{1}{2}(p_i - c)$ y $p_i - 1 - c > 0$, ya que $p_i \geq c + 2$.)
- Si $p_i = p_j \geq c + 2$ y $p_j \geq \alpha$ entonces cualquiera de las dos empresas puede aumentar su ganancia bajando su precio a p^m.

Ejemplo 31 [Juego de oligopolio de Bertrand]. Considera el juego de oligopolio de Bertrand cuando las funciones de costo y demanda satisfacen las condiciones de la Sección 3.2.2 y hay n empresas, con $n \geq 3$. Muestra que el conjunto de equilibrios de Nash es el conjunto de perfiles de precios $(p_1, \ldots, p_n)$ tales que $p_i \geq c$ para todo i, y al menos dos precios son iguales a c. (Muestra que cualquier perfil así es un equilibrio de Nash, y que ningún otro perfil lo es).

$\rightarrow$ Considera un perfil $(p_1, \ldots, p_n)$ de precios en el que $p_i \geq c$ para todo i y al menos dos precios son iguales a c. La ganancia de cada empresa es cero. Si alguna empresa sube su precio, su ganancia permanece en cero. Si una empresa que cobra más que c baja su precio, pero no por debajo de c, su ganancia también permanece en cero. Si una empresa baja su precio por debajo de c, entonces su ganancia es negativa. Por tanto, cualquier perfil de este tipo es un equilibrio de Nash.

Para mostrar que ningún otro perfil es un equilibrio de Nash, podemos argumentar lo siguiente:

- Si algún precio es menor que c, entonces la empresa que cobra el precio más bajo puede aumentar su ganancia (a cero) subiendo su precio a c.
- Si exactamente una empresa cobra un precio igual a c, entonces esa empresa puede aumentar su ganancia subiendo un poco su precio (manteniéndolo por debajo del siguiente precio más alto).
- Si los precios de todas las empresas superan c, entonces la empresa que cobra el precio más alto puede aumentar su ganancia bajando su precio a algún valor entre c y el precio más bajo que se está cobrando.

Ejemplo 32 [Duopolio de Bertrand con costo unitario diferente]. Considere el juego de duopolio de Bertrand bajo una variante de los supuestos en la que los costos unitarios de las empresas son distintos, iguales a c_1 y c_2, donde $c_1 < c_2$. Denota por p_1^m el precio que maximiza $(p - c_1)(\alpha - p)$, y supón que $c_2 < p_1^m$ y que la función $(p - c_1)(\alpha - p)$ es creciente en p hasta p_1^m.

a. Supón que la regla para dividir a los consumidores cuando los precios son iguales asigna todos los consumidores a la empresa 1 cuando ambas empresas cobran el precio c_2. Demuestra que $(p_1, p_2) = (c_2, c_2)$ es un equilibrio de Nash y que ningún otro par de precios es un equilibrio de Nash.
   $\rightarrow$ Si todos los consumidores compran a la empresa 1 cuando ambas empresas cobran el precio c_2, entonces $(p_1, p_2) = (c_2, c_2)$ es un equilibrio de Nash por el siguiente argumento. La ganancia de la empresa 1 es positiva, mientras que la ganancia de la empresa 2 es cero (ya que no atiende a ningún cliente).

   - Si la empresa 1 sube su precio, su ganancia cae a cero.
   - Si la empresa 1 baja su precio, digamos a p, su ganancia cambia de $(c_2 - c_1)(\alpha - c_2)$ a $(p - c_1)(\alpha - p)$. Como c_2 es menor que el valor que maximiza $(p - c_1)(\alpha - p)$, la ganancia de la empresa 1 disminuye.
   - Si la empresa 2 sube su precio, su ganancia sigue siendo cero.
   - Si la empresa 2 baja su precio, su ganancia se vuelve negativa (ya que su precio es menor que su costo unitario).

   Bajo esta regla, ningún otro par de precios es un equilibrio de Nash, por el siguiente argumento:

   - Si $p_i < c_1$ para $i = 1, 2$, entonces la empresa con el precio más bajo (o cualquiera si son iguales) puede aumentar su ganancia (a cero) subiendo su precio por encima del de la otra empresa.
   - Si $p_1 > p_2 \geq c_2$, entonces la empresa 2 puede aumentar su ganancia subiendo un poco su precio.
   - Si $p_2 > p_1 \geq c_1$, entonces la empresa 1 puede aumentar su ganancia subiendo un poco su precio.
   - Si $p_2 \leq p_1$ y $p_2 < c_2$, entonces la ganancia de la empresa 2 es negativa, por lo que puede aumentarla subiendo su precio.
   - Si $p_1 = p_2 > c_2$, entonces la empresa 2 puede aumentar su ganancia bajando un poco su precio.

b. Demuestra que no existe equilibrio de Nash si la regla para dividir a los consumidores cuando los precios son iguales asigna algunos consumidores a la empresa 2 cuando ambas empresas cobran c_2.
   $\rightarrow$ Ahora supón que la regla para dividir a los consumidores cuando los precios son iguales especifica que la empresa 2 recibe algunos consumidores cuando ambas empresas cobran c_2. Por el argumento de la parte a, el único equilibrio de Nash posible es $(p_1, p_2) = (c_2, c_2)$. (El argumento en la parte a de que cualquier otro par de precios no es un equilibrio de Nash no usa el hecho de que los consumidores se dividen equitativamente cuando $(p_1, p_2) = (c_2, c_2)$.) Pero si $(p_1, p_2) = (c_2, c_2)$ y la empresa 2 recibe algunos consumidores, la empresa 1 puede aumentar su ganancia reduciendo su precio ligeramente y capturando todo el mercado.

Ejemplo 33 [Duopolio de Bertrand con costos fijos]. Considera el juego de duopolio de Bertrand bajo una variante de las suposiciones de la Sección 3.2.2 en la que los costos unitarios de las empresas son distintos, igual a c_1 y c_2, donde $c_1 < c_2$. Denota por p_1^m el precio que maximiza $(p - c_1)(\alpha - p)$, y supón que $c_2 < p_1^m$ y que la función $(p - c_1)(\alpha - p)$ es creciente en p hasta p_1^m.

- Supón que la regla para dividir a los consumidores cuando los precios son iguales asigna todos los consumidores a la empresa 1 cuando ambas cobran el precio c_2. Muestra que $(p_1, p_2) = (c_2, c_2)$ es un equilibrio de Nash y que ningún otro par de precios es un equilibrio.
- Muestra que no existe equilibrio de Nash si la regla para dividir a los consumidores cuando los precios son iguales asigna algunos consumidores a la empresa 2 cuando ambas cobran el precio c_2.

Ejemplo 34 [Duopolio de Bertrand con costos fijos]. Considera el juego de Bertrand bajo una variante de las suposiciones de la Sección 3.2.2 en la que la función de costos de cada empresa i está dada por $C_i(q_i) = f + cq_i$ para $q_i > 0$, y $C_i(0) = 0$, donde f es positivo y menor que el máximo de $(p - c)(\alpha - p)$ respecto a p. Denota por $\overline{p}$ el precio tal que $(p - c)(\alpha - p) = f$ y que es menor que el precio que maximiza $(p - c)(\alpha - p)$ (ver Figura 67.1). Muestra que si la empresa 1 recibe toda la demanda cuando ambas empresas cobran el mismo precio, entonces $(\overline{p}, \overline{p})$ es un equilibrio de Nash. Muestra también que ningún otro par de precios es un equilibrio de Nash. (Primero considera los casos en que las empresas cobran el mismo precio, luego los casos en los que cobran precios diferentes).

$\rightarrow$ Para el par de precios $(\overline{p}, \overline{p})$, las ganancias de ambas empresas son cero. (La empresa 1 recibe toda la demanda y obtiene una ganancia de $(\overline{p} - c)(\alpha - \overline{p}) - f = 0$, y la empresa 2 no recibe demanda). Este par de precios es un equilibrio de Nash por el siguiente argumento:

- Si cualquiera de las dos empresas sube su precio, su ganancia sigue siendo cero (no recibe clientes).
- Si cualquiera de las dos empresas baja su precio, entonces recibe toda la demanda y obtiene una ganancia negativa (ya que f es menor que el valor máximo de $(p - c)(\alpha - p)$).

Ningún otro par de precios (p_1, p_2) es un equilibrio de Nash, por el siguiente argumento:

- Si $p_1 = p_2 < \overline{p}$, entonces la ganancia de la empresa 1 es negativa; la empresa 1 puede aumentar su ganancia subiendo su precio.
- Si $p_1 = p_2 > \overline{p}$, entonces la ganancia de la empresa 2 es cero; la empresa 2 puede obtener una ganancia positiva bajando un poco su precio.
- Si $p_i < p_j$ y la ganancia de la empresa i es positiva, entonces la empresa j puede aumentar su ganancia de cero a casi el nivel actual de la ganancia de i bajando su precio a un valor ligeramente inferior a p_i.
- Si $p_i < p_j$ y la ganancia de la empresa i es cero, entonces la empresa i puede obtener una ganancia positiva subiendo un poco su precio.
- Si $p_i < p_j$ y la ganancia de la empresa i es negativa, entonces la empresa i puede aumentar su ganancia a cero subiendo su precio por encima de p_j.

Ejemplo 35 [Modelo de Bertrand con diferenciación de precios]. En este modelo con dos empresas maximizadoras de beneficios, J_1 y J_2, y que compiten en precios, supondremos que existen ciertas características de los bienes que éstas producen que los hacen diferentes a los ojos de los consumidores. En tal caso, podemos pensar intuitivamente que el producto de cada empresa es en cierto modo único, lo que le proporcionará a ésta un cierto poder de mercado sobre dicho producto, permitiéndole beneficiarse de dicho poder mediante un precio más alto que su coste marginal.

Concretando, supongamos que los precios p_1 y p_2 pertenecen a $[0, \infty)$, que las funciones de demanda de ambos productos dependen del vector de precios (p_1, p_2) del siguiente modo:

$$q_1(p_1, p_2) = a - p_1 + bp_2$$
$$q_2(p_1, p_2) = a - p_2 + bp_1$$

que las funciones de costes son

$$C_1(q_1) = cq_1$$
$$C_2(q_2) = cq_2$$

y que los parámetros a, b y c cumplen:

$$0 < c < a \quad \text{y} \quad 0 < b < 2$$

Calcule el equilibrio de Nash de este juego.
→ Las funciones de pago de las empresas 1 y 2, respectivamente, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_1(p_1, p_2) =& p_1 \cdot q_1(p_1, p_2) - c \cdot q_1(p_1, p_2) \\
=& q_1(p_1, p_2)\,(p_1 - c) \\
\pi_2(p_1, p_2) =& p_2 \cdot q_1(p_1, p_2) - c \cdot q_2(p_1, p_2) \\
=& q_2(p_1, p_2)\,(p_2 - c)
\end{aligned}$$

Primero se va a encontrar la función de mejor respuesta de J_1 a cualquier decisión de precio p_2 que decida establecer la empresa #2. Entonces, el problema de maximización para encontrar la mejor respuesta de J_1 es:

$$\begin{aligned}
\max_{p_1} \pi_1(p_1, p_2) = (a - p_1 + bp_2)\,(p_1 - c) \\
=& ap_1 - p_1^2 + bp_2 p_1 - c\,(a - p_1 + bp_2)
\end{aligned}$$

Y la condición de primer orden sería:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = 0 \Leftrightarrow a - 2p_1 + bp_2 + c =& 0 \\
a + bp_2 + c =& 2p_1 \\
\frac{a + c + bp_2}{2} =& p_1
\end{aligned}$$

Por simetría, la función de mejor respuesta de J_2 sería:

$$\frac{a + c + bp_1}{2} = p_2$$

Y evaluando una dentro de la otra para resolver el sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{a + c + b\left(\frac{a+c+bp_1}{2}\right)}{2} =& p_1 \\
\frac{a + c + \frac{2b+a+c+bp_1}{2}}{2} =& p_1 \\
\frac{a + \frac{2c+2b+a+c+bp_1}{2}}{2} =& p_1 \\
\frac{\frac{2a+2c+2b+a+c+bp_1}{2}}{2} =& p_1 \\
\frac{3a + 3c + 2b + bp_1}{2} =& 2p_1 \\
3a + 3c + 2b + bp_1 =& 4p_1 \\
3a + 3c + 2b =& 4p_1 - bp_1 \\
3a + 3c + 2b =& p_1(4 - b) \\
\frac{3a + 3c + 2b}{4 - b} =& p_1
\end{aligned}$$

Ejemplo 36 [Dos empresas que compiten por precios]. En un mercado, dos empresas compiten por precios. Ambas tienen la misma función de costes $c_i = q_i^2 + 3q_i$. La función de demanda de mercado viene definida por $q_d = 7 - p$. Calcule el equilibrio de mercado.

1. Calcular ofertas individuales
   Para maximizar los beneficios en una competencia en un oligopolio que compite por precios, se procede de la misma forma que en la competencia perfecta.

$$p_1 = CMg_1 \Leftrightarrow p_1 = 2q_1 + 3 \Leftrightarrow \frac{p_1 - 3}{2} = q_1$$
$$p_2 = CMg_2 \Leftrightarrow p_2 = 2q_2 + 3 \Leftrightarrow \frac{p_2 - 3}{2} = q_2$$

2. Calcular oferta agregada

$$q_m = q_1 + q_2 \Leftrightarrow q_m = \frac{p_1 - 3}{2} + \frac{p_2 - 3}{2}$$
$$q_m = \frac{p_{\cancel{1}} - 3 + p_{\cancel{2}} - 3}{2} \Leftrightarrow q_m = \frac{p - 3 + p - 3}{2}$$
$$q_m = \frac{2p - 6}{2} \Leftrightarrow \boxed{q_m = p - 3}$$

3. Encontrar equilibrio de mercado
   Se iguala la demanda del mercado (agregada) y la oferta agregada

$$q_d = q_m \Leftrightarrow 7 - p = p - 3 \Leftrightarrow 10 = 2p \Leftrightarrow \boxed{5 = \mathrm{p}}$$

Evaluando para encontrar la cantidad ofrecida:

$$q_m = (5) - 2 \Rightarrow q_m = 3$$

Ejemplo 37 [Duopolio con competencia en precios]. Considere un un duopolio de dos empresas que tienen productos diferenciados. Las demandas que enfrentan ambas empresas son:

$$Q_1 = 20 - P_1 + P_2$$
$$Q_2 = 20 - P_2 + P_1$$

Note que como dependen positivamente del precio del otro producto, eso quiere decir que son bienes sustitutos. También se tiene que $CMg_1 = CMg_2 = 0$.

- Encuentre el equilibrio del duopolio bajo competencia simultánea en precios.
  El problema de la empresa 1 sería el siguiente:

$$\max_{P_1} \Pi_1 = Q_1 \cdot P_1$$
$$\max_{P_1} \Pi_1 = (20 - P_1 + P_2)\, P_1$$

Y la condición de primer orden sería:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial P_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial P_1}\left[20P_1 - P_1^2 + P_1 P_2\right] = 0$$
$$20 - 2P_1 + P_2 = 0$$
$$20 + P_2 = 2P_1$$
$$\boxed{10 + \frac{P_2}{2} = P_1}$$

Esta sería la curva o función de reacción de la empresa 1. Observando, se puede notar que el problema para la empresa 2 sería totalmente simétrico al de la empresa 1, por lo cual, la curva o función de reacción de la empresa 2 sería:

$$\boxed{10 + \frac{P_1}{2} = P_2}$$

Y ya que se tienen ambas curvas de reacción, se procede a encontrar el equilibrio de mercado hallando el punto de intersección entre las dos curvas de reacción de las empresas:

$$\begin{aligned}
P_1 =& P_2 \\
\Leftrightarrow P_1 =& 10 + \frac{P_1}{2} \\
P_1 - \frac{P_1}{2} =& 10 \\
\frac{2P_1 - P_1}{2} =& 10 \\
\frac{P_1}{2} =& 10 \\
P_1 =& 20 \Leftrightarrow P_2 = 20
\end{aligned}$$

Y por tanto, dado que en el equilibrio ambas empresas ofrecen a un precio de 20, las cantidades de cada empresa serían:

$$\begin{aligned}
Q_1 =& 20 - (20) + (20) = 20 \\
Q_2 =& 20 - (20) + (20) = 20
\end{aligned}$$

Y finalmente, dadas la cantidad y precio de equilibrio, los beneficios de las empresas serían:

$$\begin{aligned}
\pi_1 =& Q_1 \cdot P_1 = 20 \cdot 20 = 400 \\
\pi_2 =& Q_2 \cdot P_2 = 20 \cdot 20 = 400
\end{aligned}$$

Ejemplo 38 [Oligopolio con n empresas competidoras en precios]. En un mercado, n empresas compiten por precio y tienen un producto diferenciado. Cada una de las empresas se enfrenta a la siguiente curva directa de demanda:

$$q_i = A - bP_i + d\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} P_j$$

Existen dos tipos de empresas, la mitad de ellas tienen un costo marginal constante e igual a c y la otra mitad tienen un costo marginal nulo.

- Encuentre el equilibrio en precios y cantidades para cada tipo de empresa si todas las empresas actúan de forma simultánea.

$$\begin{aligned}
\pi_i =& (P_i - c)\left(A - bP_i + d\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} P_j\right) \\
\frac{\partial \pi_i}{\partial P_i} =& A - 2bP_i + d\left(\frac{n}{2} - 1\right)P_i + d\frac{n}{2}P_j + cb = 0 \\
P_i =& \frac{A + d\frac{n}{2}P_j + cb}{2b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \\
P_j =& \frac{A + d\frac{n}{2}P_i}{2b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_i =& \frac{A + d\frac{n}{2}P_j + cb}{2b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \\
P_i =& \frac{A + d\frac{n}{2}\left(\frac{A + d\frac{n}{2}P_i}{2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)}\right) + cb}{2b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \\
P_i =& \frac{A\left[2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)\right] + d\frac{n}{2}\left[2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)\right] + cb\left[2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]}{\left[2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^2} \\
P_i =& \frac{A(2b+d) + cb\left[2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]}{\left[2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^2 - \left(\frac{dn}{2}\right)^2} \\
P_i =& \frac{2A(2b+d) + cb\left[4b - d(n-2)\right]}{8b^2 - 4bd(n-2) - 2d^2(n-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_j =& \frac{A + d\frac{n}{2}\left(\frac{A + d\frac{n}{2}P_j + cb}{2b - d\left(\frac{n}{2}-1\right)}\right)}{2b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \\
P_j =& \frac{A\left(2b+d\right) + cb}{4b^2 - 2bd(n-2) - d^2(n-1)}
\end{aligned}
$$

- Cómo cambian las ganancias de las empresas conforme cambia b y d. Es decir, determine el signo de $\dfrac{\partial \pi_i}{\partial b}$ y $\dfrac{\partial \pi_i}{\partial d}$.

$$
\begin{aligned}
P_i =& \frac{A + d\frac{n}{2}P_j + cb}{2b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \\
P_j =& \frac{A + d\frac{n}{2}P_i}{2b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \\
q_i =& A - \left[b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right]\left(\frac{2A(2b+d) + cb\left[4b - d(n-2)\right]}{8b^2 - 4bd(n-2) - 2d^2(n-1)}\right) + d\frac{n}{2}\left(\frac{A\left(2b+d\right) + cb}{4b^2 - 2bd(n-2) - d^2(n-1)}\right) \\
q_j =& A - \left[b - d\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right]\left(\frac{2A(2b+d) + cb}{4b^2 - 2bd(n-2) - d^2(n-1)}\right) + d\frac{n}{2}\left(\frac{A\left(2b+d\right) + cb}{8b^2 - 4bd(n-2) - 2d^2(n-1)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_i}{\partial b} &< 0 \\
\frac{\partial q_i}{\partial b} &> 0 \\
\frac{\partial \pi_i}{\partial b} &> 0
\end{aligned}
$$

Un aumento en b reduce todos los precios, el efecto sobre las cantidades depende de b y d por lo que no se puede saber qué sucede con las ganancias.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_i}{\partial d} &> 0 \\
\frac{\partial q_i}{\partial d} &< 0 \\
\frac{\partial \pi_i}{\partial d} &> 0
\end{aligned}
$$

Un aumento en d aumenta todos los precios, el efecto sobre las cantidades depende de b y d por lo que no se puede saber qué sucede con las ganancias.

18.2. Oligopolio de Cournot

Definición 35 [Oligopolio de Cournot]. Un oligopolio de Cournot es aquella estructura de mercado bajo la cual las empresas que participan en el mercado compiten por cantidades.

El oligopolio de Cournot es conocido como un *juego simultáneo*, lo cual quiere decir que los intervinientes en el mercado toman sus decisiones al mismo tiempo, en lugar de esperar a que otro actúe primero y luego actuar en respuesta a lo que haga este primero. Así, para que se puede desarrollar el juego con normalidad, tiene que ser que, al tomar las decisiones cada interviniente, este tiene que incorporar en su proceso de toma de decisiones *(decision-making)* asumiendo o conjeturando sobre cómo actúa(n) el (los) otro(s) interviniente(s) en el mercado.

Es así, que en los juegos simultáneos surge la figura de **la función o curva de reacción**, que incorpora en sus decisiones una expectativa de cuál será el curso de acción de los otros.

Derivación general 9 [Oligopolio de Cournot]. Un único bien es producido por n empresas. El costo para la empresa i de producir q_i unidades del bien es $C_i(q_i)$, donde C_i es una función creciente (producir más unidades es más costoso). Toda la producción se vende a un único precio, determinado por la demanda del bien y la producción total de las empresas. Específicamente, si la producción total de las empresas es Q, entonces el precio de mercado es $P(Q)$; P se llama la "función de demanda inversa". Suponga que P es una función decreciente cuando es positiva: si la producción total de las empresas aumenta, entonces el precio disminuye (a menos que ya sea cero).

Nota 20. Recuerde que en un modelo de oligopolio de Cournot, las firmas compiten por cantidad y no por precio, entonces la variable de decisión es cuánta cantidad producir, es decir, cuántas unidades de producto generar. Esto se contrapone a un modelo de oligopolio de Bertrand, donde la variable de decisión es más bien el precio.

Si la producción de cada empresa i es q_i, entonces el precio es $P(q_1 + \cdots + q_n)$, por lo que los ingresos de la empresa i son $q_i P(q_1 + \cdots + q_n)$. Así, la ganancia de la empresa i, igual a sus ingresos menos sus costos, es

$$\pi_i(q_1, \ldots, q_n) = q_i P(q_1 + \cdots + q_n) - C_i(q_i).$$

Cournot sugirió que la industria se modelara como el siguiente juego estratégico:

Jugadores Las empresas.

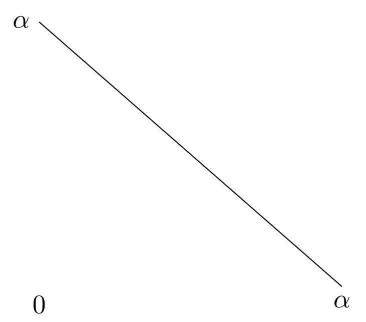
Acciones El conjunto de acciones de cada empresa es el conjunto de sus posibles niveles de producción (números no negativos).

Preferencias Las preferencias de cada empresa están representadas por su ganancia, dada en la función de ganancias de la empresa.

Ejemplo 39 [Duopolio de Cournot con costo unitario constante y una función de demanda inversa lineal]. Para formas específicas de las funciones C_i y P, podemos calcular un equilibrio de Nash del juego de Cournot. Supón que hay dos empresas (la industria es un "duopolio"), y que la función de costos de cada empresa es la misma, dada por $C_i(q_i) = cq_i$ para todo q_i ("costo unitario" constante, igual a c), y que la función de demanda inversa es lineal cuando es positiva, dada por

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{si } Q \leq \alpha \\ 0 & \text{si } Q > \alpha, \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $c \geq 0$ son constantes. Esta función de demanda inversa se muestra en la siguiente figura:



(Note que el precio $P(Q)$ no puede ser igual a $\alpha - Q$ para todos los valores de Q, porque sería negativo para $Q > \alpha$). Suponga que $c < \alpha$, de modo que exista algún valor de producción total Q para el cual el precio de mercado $P(Q)$ sea mayor que el costo unitario común c. (Si c fuera mayor que α, no habría producción con la cual pudieran obtener alguna ganancia, ya que el precio de mercado nunca excede α).

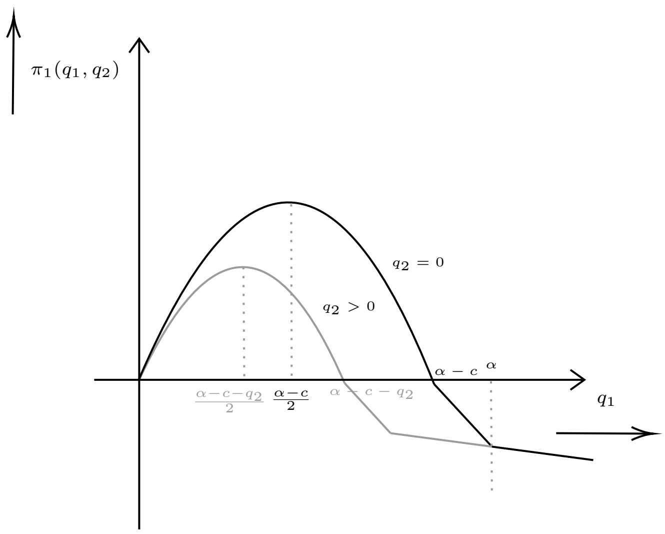
Para encontrar el equilibrio de Nash en este ejemplo, se debe usar el procedimiento basado en las funciones de mejor respuesta de las empresas.

Primero se necesita encontrar las ganancias de las empresas. Si las producciones de las empresas son q_1 y q_2, entonces el precio de mercado es $P(q_1 + q_2) = \alpha - q_1 - q_2$ si $q_1 + q_2 \leq \alpha$ y cero si $q_1 + q_2 > \alpha$. Entonces la ganancia de la empresa 1 es

$$\begin{aligned}
\pi_1(q_1, q_2) =& q_1(P(q_1 + q_2) - c) \\
=& q_1(\alpha - q_1 - q_2) - c \\
=& \alpha \cdot q_1 - q_1^2 - q_2 q_1 - c q_1 \\
=& \begin{cases} q_1(\alpha - c - q_1 - q_2) & \text{si } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_1 & \text{si } q_1 + q_2 > \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

Para encontrar la mejor respuesta de la empresa 1 a cualquier nivel de producción q_2 de la empresa 2, se debe estudiar la ganancia de la empresa 1 como función de su propia producción q_1 para valores dados de q_2.

Si $q_2 = 0$, la ganancia de la empresa 1 es $\pi_1(q_1, 0) = (\alpha - q_1 - 0) \cdot q_1 - cq_1 = \alpha \cdot q_1 - q_1 \cdot q_1 - cq_1 = q_1(\alpha - c - q_1)$ para $q_1 \leq \alpha$, una función cuadrática que es cero cuando $q_1 = 0$ y cuando $q_1 = \alpha - c$. Esta función es la curva negra en la siguiente figura.



Dada la simetría de las funciones cuadráticas, la producción q_1 de la empresa 1 que maximiza su ganancia es $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c)$.

Observe que se puede llegar a la misma conclusión derivando la ganancia con respecto a q_1 y resolviendo).

$$\begin{aligned}\pi_1 =& \alpha q_1 - c q_1 - q_1^2 - q_2 q_1\\ \pi_1 =& - c q_1\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_1}\left[\alpha q_1 - c q_1 - q_1^2 - q_2 q_1\right] =& 0\\ \Leftrightarrow \alpha - c - 2q_1 - q_2 =& 0\\ \Leftrightarrow \alpha - c - q_2 =& 2q_1\\ \Leftrightarrow \frac{\alpha - c - q_2}{2} =& q_1\end{aligned}$$

Así, la mejor respuesta de la empresa 1 a una producción nula de la empresa 2 es $b_1(0) = \frac{1}{2}(\alpha - c)$. A medida que la producción q_2 de la empresa 2 aumenta, la ganancia que puede obtener la empresa 1 para un nivel de producción dado disminuye, porque más producción de la empresa 2 implica un menor precio.

La curva gris es un ejemplo de $\pi_1(q_1, q_2)$ para $q_2 > 0$ y $q_2 < \alpha - c$. Nuevamente, esta función es una cuadrática respecto a la producción $q_1 = \alpha - c - q_2$, que lleva a un precio de cero. Específicamente, la cuadrática es $\pi_1(q_1, q_2) = q_1(\alpha - c - q_2 - q_1)$, que es cero cuando $q_1 = 0$ y cuando $q_1 = \alpha - c - q_2$.

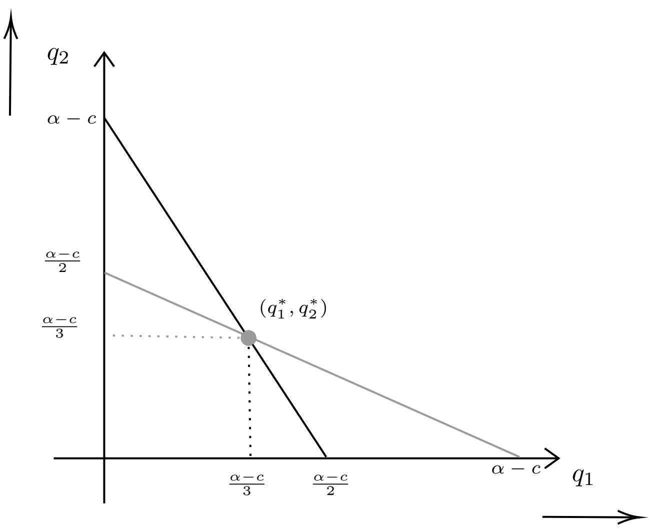
Por la simetría de las funciones cuadráticas (o con cálculo), concluimos que la producción que maximiza $\pi_1(q_1, q_2)$ es $q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$. (Cuando $q_2 = 0$, esto es igual a $\frac{1}{2}(\alpha - c)$, la mejor respuesta a una producción nula que encontró en el párrafo anterior).

Cuando $q_2 > \alpha - c$, el valor de $\alpha - c - q_2$ es negativo. Por tanto, para un valor tal de q_2, se tiene que $q_1(\alpha - c - q_2 - q_1) < 0$ para todos los valores positivos de q_1: la ganancia de la empresa 1 es negativa para cualquier producción positiva, así que su mejor respuesta es no producir.

Se concluye que la mejor respuesta de la empresa 1 a la producción q_2 de la empresa 2 depende del valor de q_2: si $q_2 \leq \alpha - c$, entonces la mejor respuesta de la empresa 1 es $\frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$, mientras que si $q_2 > \alpha - c$, su mejor respuesta es cero. O, de forma resumida:

$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2) & \text{si } q_2 \leq \alpha - c\\ 0 & \text{si } q_2 > \alpha - c.\end{cases}$$

Dado que la función de costos de la empresa 2 es la misma que la de la empresa 1, su función de mejor respuesta b_2 también es la misma: para cualquier número q, se tiene que $b_2(q) = b_1(q)$. Por supuesto, la función de mejor respuesta de la empresa 2 asocia un valor de producción de la empresa 2 con cada producción de la empresa 1, mientras que la función de mejor respuesta de la empresa 1 asocia un valor de producción de la empresa 1 con cada producción de la empresa 2, así que las se grafican en ejes diferentes.



Se muestran en la figura anterior (b_1 es negra; b_2 es gris). En un juego general, b_1 asocia cada punto del eje vertical con un punto del eje horizontal, y b_2 asocia cada punto del eje horizontal con un punto del eje vertical.

Un equilibrio de Nash es un par (q_1^*, q_2^*) de producciones para los cuales q_1^* es una mejor respuesta a q_2^*, y q_2^* es una mejor respuesta a q_1^*:

$$q_1^* = b_1(q_2^*) \quad \text{y} \quad q_2^* = b_2(q_1^*)$$

El conjunto de tales pares es el conjunto de puntos donde las funciones de mejor respuesta en la Figura 56.2 se intersectan. A partir de la figura vemos que existe exactamente un punto así, el cual se obtiene resolviendo el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} q_1 =& \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2) \\ q_2 =& \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1) \end{aligned}$$

Resolviendo estas dos ecuaciones (sustituyendo la segunda en la primera y aislando q_1, por ejemplo), hallamos que $q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(\alpha - c)$.

En resumen, cuando hay dos empresas, la función de demanda inversa está dada por $P(Q) = \alpha - Q$ para $Q \leq \alpha$, y la función de costos de cada empresa es $C_i(q_i) = cq_i$, el juego de oligopolio de Cournot tiene un equilibrio de Nash único $(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1}{3}(\alpha - c), \frac{1}{3}(\alpha - c)\right)$.

La producción total en este equilibrio es $\frac{2}{3}(\alpha - c)$, por lo que el precio al que se vende la producción es $P\left(\frac{2}{3}(\alpha - c)\right) = \frac{1}{3}(\alpha + 2c)$. A medida que α aumenta (lo que significa que los consumidores están dispuestos a pagar más por el bien), el precio de equilibrio y la producción de cada empresa aumentan. A medida que c (el costo unitario de producción) aumenta, la producción de cada empresa cae y el precio sube; cada aumento en c conlleva un aumento de dos tercios de unidad en el precio.

Ejemplo 40 [[Duopolio de Cournot con costo unitario constante diferente y una función de demanda inversa lineal]. Encuentre el equilibrio de Nash del juego de Cournot cuando hay dos empresas, la función de demanda inversa está dada por

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{si } Q \leq \alpha \\ 0 & \text{si } Q > \alpha, \end{cases}$$

y la función de costos de cada empresa i es $C_i(q_i) = c_i q_i$, donde $c_1 > c_2$, y $c_1 < \alpha$. (Hay dos casos, dependiendo del tamaño de c_1 relativo a c_2). ¿Qué empresa produce más en equilibrio? ¿Cuál es el efecto de un cambio técnico que reduce el costo unitario de la empresa 2 c_2 (sin afectar el costo unitario de la empresa 1 c_1) sobre los niveles de producción de equilibrio de las empresas, la producción total y el precio?

Solución:

→ Siguiendo el análisis del texto, la función de mejor respuesta de la empresa 1 es

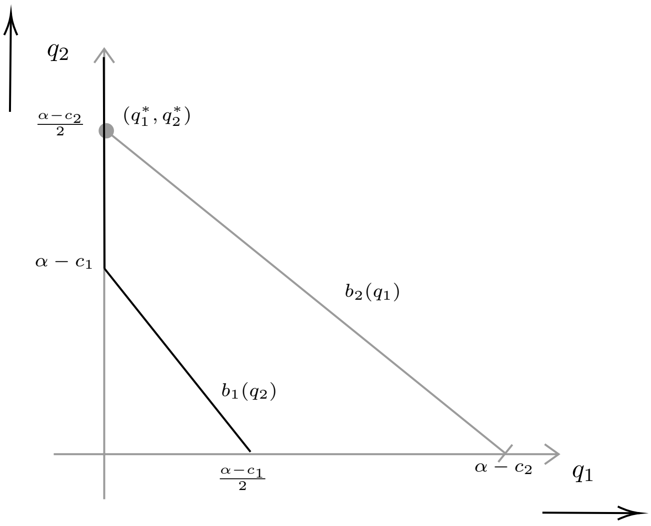
$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c_1 - q_2) & \text{si } q_2 \leq \alpha - c_1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

mientras que la de la empresa 2 es

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c_2 - q_1) & \text{si } q_1 \leq \alpha - c_2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para encontrar el equilibrio de Nash, es bueno primero graficar estas dos funciones. Ambas funciones tienen la misma forma general que las funciones de mejor respuesta del caso estudiado anteriormente. Sin embargo, el hecho de que $c_1 \neq c_2$ lleva a dos casos cualitativamente distintos cuando se combinan ambas funciones para encontrar un equilibrio de Nash. Si c_1 y c_2 no difieren mucho, las funciones se intersectan en un punto de producción donde ambas son positivas. Si c_1 y c_2 difieren mucho, las funciones se intersectan en un par de producciones donde $q_1 = 0$.

Precisamente, si $c_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha + c_2)$, entonces las partes decrecientes de las funciones de mejor respuesta se intersectan como en la siguiente figura:



y el juego tiene un único equilibrio de Nash, dado por la solución del sistema:

$$q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - c_1 - q_2)$$
$$q_2 = \frac{1}{2}(\alpha - c_2 - q_1)$$

Y la solución es:

$$(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1}{3}(\alpha - 2c_1 + c_2), \frac{1}{3}(\alpha - 2c_2 + c_1)\right)$$

Si $c_1 > \frac{1}{2}(\alpha + c_2)$, entonces la parte decreciente de la función de mejor respuesta de la empresa 1 queda por debajo de la correspondiente a la empresa 2 (como en la Figura 22.1), y el juego tiene un único equilibrio de Nash, $(q_1^*, q_2^*) = \left(0, \frac{1}{2}(\alpha - c_2)\right)$.

En resumen, el juego siempre tiene un único equilibrio de Nash, definido como:

$$(q_1^*, q_2^*) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}(\alpha - 2c_1 + c_2), \frac{1}{3}(\alpha - 2c_2 + c_1)\right) & \text{si } c_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha + c_2) \\ \left(0, \frac{1}{2}(\alpha - c_2)\right) & \text{si } c_1 > \frac{1}{2}(\alpha + c_2) \end{cases}$$

La producción de la empresa 2 excede la de la empresa 1 en todo equilibrio.

Si c_2 disminuye, entonces la producción de la empresa 2 aumenta y la producción de la empresa 1 ya sea disminuye, si $c_1 \leq \frac{1}{2}(\alpha + c_2)$, o se mantiene igual a 0, si $c_1 > \frac{1}{2}(\alpha + c_2)$. La producción total aumenta y el precio disminuye.

Ejemplo 41 [Duopolio de Cournot con demanda inversa lineal y función de costos cuadrática]. Encuentre el equilibrio de Nash del juego de Cournot cuando hay dos empresas, la función de demanda inversa está dada por

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{si } Q \leq \alpha \\ 0 & \text{si } Q > \alpha, \end{cases}$$

, y la función de costos de la empresa i es $C_i(q_i) = q_i^2$.

Solución:

→ Siguiendo el análisis del texto, la función beneficios de la empresa 1 es:

$$\pi_1(q_1, q_2) = \begin{cases} q_1(\alpha - q_1 - q_2) - q_1^2 & \text{si } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -q_1^2 & \text{si } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

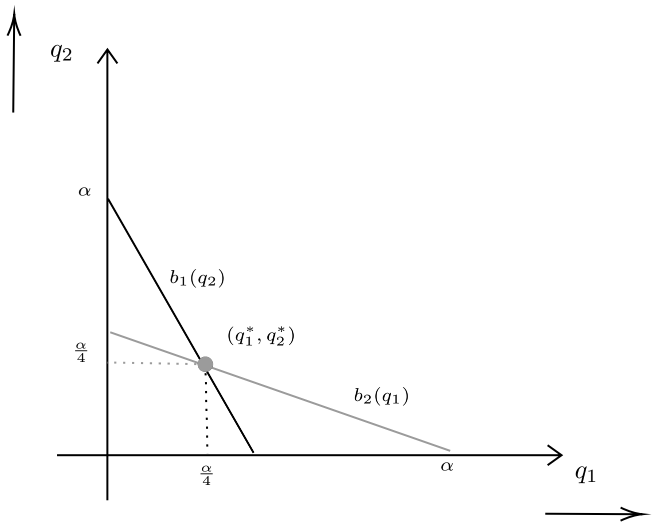
o bien

$$\pi_1(q_1, q_2) = \begin{cases} q_1(\alpha - 2q_1 - q_2) & \text{si } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -q_1^2 & \text{si } q_1 + q_2 > \alpha. \end{cases}$$

Cuando es positiva, esta función es una cuadrática en q_1 que se anula en $q_1 = 0$ y en $q_1 = (\alpha - q_2)/2$. Así, la función de mejor respuesta de la empresa 1 es

$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\alpha - q_2) & \text{si } q_2 \leq \alpha \\ 0 & \text{si } q_2 > \alpha \end{cases}$$

Dado que las funciones de costo de ambas empresas son iguales, la función de mejor respuesta de la empresa 2 es igual a la de la empresa 1: $b_2(q) = b_1(q)$ para todo q. Las funciones de mejor respuesta de las empresas se muestran en la figura siguiente:



Resolviendo las dos ecuaciones $q_1^* = b_1(q_2^*)$ y $q_2^* = b_2(q_1^*)$, encontramos que existe un único equilibrio de Nash, en el cual la producción de cada empresa i (para $i = 1, 2$) es $q_i^* = \frac{1}{5}\alpha$.

Ejemplo 42 [Duopolio de Cournot con demanda inversa lineal y costo fijo]. Encuentra los equilibrios de Nash del juego de Cournot cuando hay dos empresas, la función de demanda inversa está dada por

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{si } Q \leq \alpha \\ 0 & \text{si } Q > \alpha, \end{cases}$$

, y la función de costos de cada empresa i está dada por

$$C_i(q_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } q_i = 0 \\ f + cq_i & \text{si } q_i > 0, \end{cases}$$

donde $c \geq 0$, $f > 0$, y $c < \alpha$. (Nota que el costo fijo f solo afecta la decisión de operar o no de la empresa; no afecta la producción que la empresa desea realizar *si decide operar*).

Solución:

→ La función de pago de la empresa i es

$$\begin{cases} 0 & \text{si } q_i = 0 \\ q_i(P(q_1 + q_2) - c) - f & \text{si } q_i > 0. \end{cases}$$

Como antes, la mejor respuesta de la empresa 1 a q_2 es $(\alpha - c - q_2)/2$ si su ganancia es no negativa para esa producción; de lo contrario, su mejor respuesta es una producción de cero. La ganancia de la empresa 1 cuando produce $(\alpha - c - q_2)/2$ y la empresa 2 produce q_2 es

$$\frac{\alpha - c - q_2}{2}\left(\alpha - c - \frac{\alpha - c - q_2}{2} - q_2\right) - f = \left(\frac{\alpha - c - q_2}{2}\right)^2 - f,$$

lo cual es no negativo si

$$\left(\frac{\alpha - c - q_2}{2}\right)^2 > f,$$

o si $q_2 \leq \alpha - c - 2\sqrt{f}$. Sea $\bar{q} = \alpha - c - 2\sqrt{f}$. Entonces la mejor respuesta de la empresa 1 es

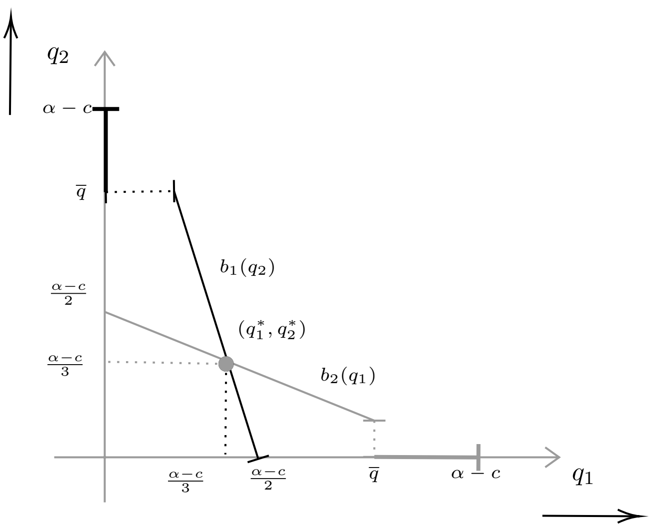
$$b_1(q_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2) & \text{si } q_2 < \bar{q} \\ \left\{0, \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)\right\} & \text{si } q_2 = \bar{q} \\ 0 & \text{si } q_2 > \bar{q}. \end{cases}$$

(Si $q_2 = \bar{q}$, entonces la ganancia de la empresa 1 es cero ya sea que produzca $\frac{1}{2}(\alpha - c - q_2)$ o produzca cero; ambas salidas son óptimas).

Así, la función de mejor respuesta de la empresa 1 tiene un "salto": para niveles de producción de la empresa 2 ligeramente menores que $\bar{q}$, la empresa 1 quiere producir una cantidad positiva (y obtener una ganancia pequeña), mientras que para valores ligeramente mayores que $\bar{q}$ desea producir cero.

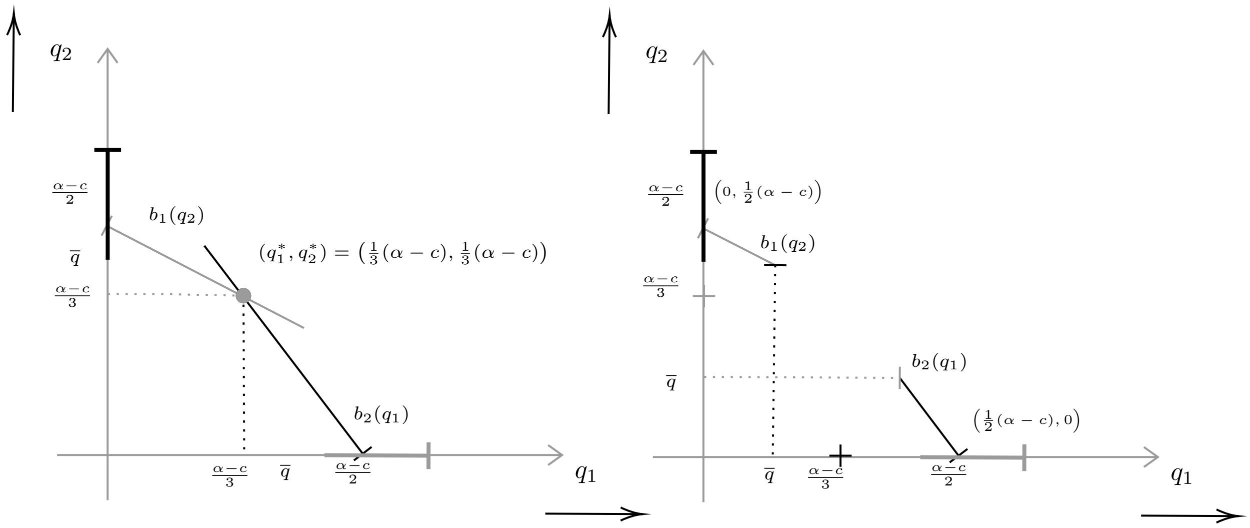
La función de costos de la empresa 2 es la misma que la de la empresa 1, por lo que su función de mejor respuesta es la misma.

Debido a los saltos en las funciones de mejor respuesta, hay cuatro casos cualitativamente distintos, dependiendo del valor de f. Si f es lo suficientemente pequeño como para que $\bar{q} > \frac{1}{2}(\alpha - c)$ (o equivalentemente, $f < (\alpha - c)^2/16$), entonces las funciones de mejor respuesta toman la forma dada en la siguiente figura:



En este caso, la existencia del costo fijo no tiene impacto en el equilibrio, que se mantiene en $(q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{1}{3}(\alpha - c), \frac{1}{3}(\alpha - c)\right)$.

A medida que f aumenta, el punto en el que las funciones de mejor respuesta saltan se acerca al origen. Eventualmente, $\bar{q}$ entra en el rango entre $\frac{1}{3}(\alpha - c)$ y $\frac{1}{2}(\alpha - c)$ (lo que implica que $(\alpha - c)^2/16 < f < (\alpha - c)^2/9$), en cuyo caso las funciones de mejor respuesta toman las formas mostradas en el panel izquierdo de la siguiente figura:



Se ilustran los dos casos:

- A la izquierda: $\frac{(\alpha-c)^2}{16} < f < \frac{(\alpha-c)^2}{9}$
- A la derecha: $f > \frac{(\alpha-c)^2}{9}$

El primer caso, el de la izquierda, tiene 3 equilibrios de Nash:

$$S^N = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}(\alpha-c)\right), \left(\frac{1}{3}(\alpha-c), \frac{1}{3}(\alpha-c)\right), \left(\frac{1}{2}(\alpha-c), 0\right) \right\}$$

El segundo caso, el de la derecha, tiene 2 equilibrios de Nash:

$$S^N = \left\{ \left(\frac{1}{2}(\alpha-c), 0\right), \left(0, \frac{1}{2}(\alpha-c)\right) \right\}$$

En este caso hay tres equilibrios de Nash:

$$(0, \tfrac{1}{2}(\alpha-c)), \quad \left(\tfrac{1}{3}(\alpha-c), \tfrac{1}{3}(\alpha-c)\right), \quad \text{y} \quad (\tfrac{1}{2}(\alpha-c), 0).$$

Si f continúa aumentando, llega un punto en que $\bar{q}$ se vuelve menor que $\frac{1}{3}(\alpha-c)$, pero sigue siendo positivo (lo cual implica que $(\alpha-c)^2/9 < f < (\alpha-c)^2/4$), de modo que las funciones de mejor respuesta toman las formas mostradas en el panel derecho de la Figura 24.2. En este caso, hay dos equilibrios de Nash:

$$(0, \tfrac{1}{2}(\alpha-c)) \quad \text{y} \quad (\tfrac{1}{2}(\alpha-c), 0)$$

Finalmente, si f es extremadamente grande, entonces una empresa no querrá producir nada incluso si la otra empresa no produce nada. Esto ocurre cuando $f > (\alpha-c)^2/4$; el único equilibrio de Nash en este caso es $(0, 0)$.

Ejemplo 43 [Variante de Cournot, con empresas que maximizan participación de mercado)]. Encuentre el(los) equilibrio(s) de Nash de una variante del ejemplo del juego de duopolio de Cournot que difiere del presentado anteriormente (demanda inversa lineal, costo unitario constante) solo en que **una de las dos empresas elige su nivel de producción para maximizar su participación de mercado sujeta a no tener pérdidas, en lugar de maximizar su ganancia**. ¿Qué ocurre si *cada* empresa maximiza su participación de mercado?

Solución:

→ Sea la empresa 1 la que maximiza la participación de mercado. Si $q_2 > \alpha - c$, no existe un nivel de producción de la empresa 1 para el cual su ganancia sea no negativa.

Por tanto, su mejor respuesta a un nivel de producción así de la empresa 2 es $q_1 = 0$. Si $q_2 \leq \alpha - c$, entonces la empresa 1 desea elegir su nivel de producción q_1 suficientemente alto para que el precio sea igual a c (y, por lo tanto, su ganancia sea cero). Entonces, la mejor respuesta de la empresa 1 a tal valor de q_2 es $q_1 = \alpha - c - q_2$.

Se puede concluir que la función de mejor respuesta de la empresa 1 es

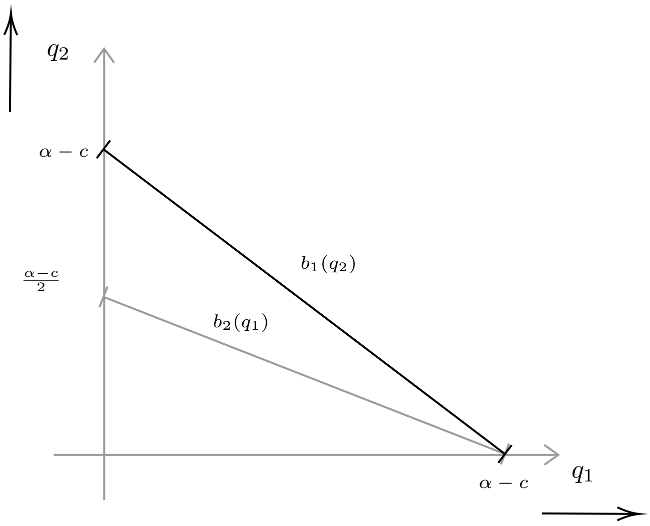
$$b_1(q_2) = \begin{cases} \alpha - c - q_2 & \text{si } q_2 \leq \alpha - c \\ 0 & \text{si } q_2 > \alpha - c. \end{cases}$$

La función de mejor respuesta de la empresa 2 es:

$$b_2(q_1) = \begin{cases} \frac{(\alpha - c - q_2)}{2} & \text{si } q_2 \leq \alpha - c \\ 0 & \text{si } q_2 > \alpha - c \end{cases}$$

Estas funciones de mejor respuesta se muestran en la Figura 26.1. El juego tiene un único equilibrio de Nash, $(q_1^*, q_2^*) = (\alpha - c, 0)$, en el cual la empresa 2 no opera. (El precio es c, y la ganancia de la empresa 1 es cero).

Si ambas empresas maximizan su participación de mercado, entonces las partes decrecientes de sus funciones de mejor respuesta son las de la siguiente figura:



Así, cada par (q_1, q_2) tal que $q_1 + q_2 = \alpha - c$ es un equilibrio de Nash.

Ejemplo 44 [Oligopolio de Cournot con n-empresas]. Considera el juego de Cournot en el caso de un número arbitrario n de firmas; conserve los supuestos de que la función de demanda inversa toma la forma

$$p(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{si } \; Q \leq \alpha \\ 0 & \text{si } \; Q > \alpha \end{cases}$$

y que la función de costo de cada firma i es $C_i(q_i) = cq_i$ para todo q_i, con $c < \alpha$.

Encuentre la función de mejor respuesta de cada firma y plantee las condiciones para que $(q_1, \ldots, q_n^*)$ sea un equilibrio de Nash, suponiendo que existe un equilibrio de Nash en el cual las producciones de todas las firmas son positivas.

Resuelva estas ecuaciones para encontrar el equilibrio de Nash. (Para $n = 2$ tu respuesta debe ser $(\frac{1}{3}(\alpha - c), \frac{1}{3}(\alpha - c))$, el equilibrio encontrado anteriormente).

Primero demuestre que en equilibrio todas las firmas producen la misma cantidad, y luego resuelva para esa cantidad. Si no puede demostrar que todas las firmas producen la misma cantidad, simplemente asuma que lo hacen).

Encuentre el precio al que se vende la producción en un equilibrio de Nash y demuestre que este precio disminuye a medida que n aumenta, acercándose a c conforme el número de firmas crece sin límite.

La idea principal detrás de este resultado no depende de los supuestos sobre la función de demanda inversa ni sobre las funciones de costo de las firmas. Suponga, más generalmente, que la función de demanda inversa es una función decreciente cualquiera, que la función de costo de cada firma es la misma, denotada por C, y que existe una cantidad de producción q tal que el costo promedio de producción $C(q)/q$ es mínimo.

En este caso, cualquier cantidad total de producción se produce de forma más eficiente si cada firma produce q, y el precio más bajo compatible con que las firmas no incurran en pérdidas es el valor mínimo del costo promedio. El siguiente ejercicio pide que demuestre que en un equilibrio de Nash del juego de Cournot en el que la producción total de las firmas es grande en relación con q, ese es el precio al que se vende la producción.

→ La función de pagos de la empresa i es:

$$\begin{aligned}\pi(q_i, q_{-i}) &= (\alpha - Q)q_i - cq_i \\ &= \left(\alpha - \sum_{j=1}^{n} q_j\right) q_i - cq_i \\ &= \alpha q_i - q_i \sum_{j=1}^{n} q_j - cq_i \\ &= \alpha q_i - q_i \sum_{j\neq i} q_j - q_i^2 - cq_i\end{aligned}$$

Y la condición de primer orden sería:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = 0 &\Rightarrow \alpha - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - 2q_i - c = 0 \\ &\Rightarrow \alpha - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c = 2q_i \\ &\Rightarrow \frac{\alpha - \sum_{j\neq i}^{n} q_j - c}{2} = q_i\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}q_1^* =& \frac{\alpha - q_2^* - q_3^* - \cdots - q_n^*}{2} \\ q_2^* =& \frac{\alpha - q_1^* - q_3^* - \cdots - q_n^*}{2} \\ &\vdots \\ q_n^* =& \frac{\alpha - q_2^* - q_3^* - \cdots - q_{n-1}^*}{2}\end{aligned}$$

Y el sistema de ecuaciones se puede reescribir:

$$\begin{aligned}0 =& \alpha - 2q_1^* - q_2^* - q_3^* - \cdots - q_n^* - c && (1) \\ 0 =& \alpha - q_1^* - 2q_2^* - q_3^* - \cdots - q_n^* - c && (2) \\ 0 =& \alpha - q_1^* - q_2^* - 2q_3^* - \cdots - q_n^* - c \\ &\vdots \\ 0 =& \alpha q_1^* - q_2^* - q_3^* - \cdots - q_{n-1}^* - 2q_n^* - c && (\text{n})\end{aligned}$$

Restando **??** de **??** se obtiene $0 = -q_1^* + q_2^* \Leftrightarrow q_1^* = q_2^*$ y así sucesivamente, se llega a que $q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^*$. Por lo tanto, evaluando $q^* = q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^*$.

$$\begin{aligned}0 =& \alpha - c - (n+1) \cdot q^* \\ (n+1) \cdot q^* =& \alpha - c \\ q^* =& \frac{\alpha - c}{n+1}\end{aligned}$$

Entonces, el equilibrio (de Nash) perfecto en subjuegos sería $S^{NPSJ} = \left\{ \left(\frac{\alpha-c}{n+1}\right), \left(\frac{\alpha-c}{n+1}\right), \ldots, \left(\frac{\alpha-c}{n+1}\right) \right\}$. Luego, el precio sería:

$$
\begin{aligned}
p =& \alpha - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha - c}{n+1} \right) \\
p =& \alpha - n \left(\frac{\alpha - c}{n+1} \right) \\
p =& \frac{\alpha - n(\alpha - c)}{n+1}
\end{aligned}
$$

Es decir, que el precio de equilibrio decrece a medida que n aumenta, aproximándose a c (el costo marginal) a medida que n tiende a infinito (como en competencia perfecta).

Ejemplo 45 [Duopolio con competencia en cantidades]. En un mercado existen únicamente dos empresas que compiten por cantidades. Cada una responderá a lo que haga la otra eligiendo la cantidad que maximice sus beneficios. La primera empresa posee una una función de costos de la forma $c_1 = 10q_1$, mientras que la segunda empresa tiene la función de costes $c_2 = 10q_2$. Además, la demanda del mercado viene definida por la expresión $p = 90 - \frac{1}{2}q$.

Encuentre las funciones de reacción de ambas empresas, así como el precio y la cantidades de equilibrio.

1. Función de beneficios de la primera empresa

$$
\pi_1 = \text{ingresos totales - costos totales} \Leftrightarrow \pi_1 = p_1 q_1 - c_1
$$
$$
\pi_1 = \left(90 - \frac{1}{2}q\right) q_1 - (10q_1) \Leftrightarrow \pi_1 = \left(90 - \frac{1}{2}[q_1 + q_2]\right) q_1 - 10q_1
$$

Recuerde hacer la diferencia entre la cantidad de la empresa individual vs la cantidad total producida en el mercado. Es importante manipular con cuidado las variables para así generar una función de reacción que incorpore las decisiones propias y las de los otros.

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \left(90 - \frac{q_1 + q_2}{2}\right) \underline{q_1} - 10\underline{q_1} \\
\pi_1 &= \left[\left(90 - \frac{q_1 + q_2}{2}\right) - 10\right] q_1 \\
\pi_1 &= \left[\frac{180 - (q_1 + q_2)}{2} - 10\right] q_1 \\
\pi_1 &= \left[\frac{180 - q_1 - q_2 - 20}{2}\right] q_1 \\
\pi_1 &= \left[\frac{160 - q_1 - q_2}{2}\right] q_1 \\
\pi_1 &= \frac{160q_1}{2} - \frac{q_1^2}{2} - \frac{q_1 q_2}{2} \\
&\boxed{\pi_1 = 80q_1 - \tfrac{q_1^2}{2} - \tfrac{q_1 q_2}{2}}
\end{aligned}
$$

2. Maximizar los beneficios de la primera empresa y obtener la función de reacción

$$
\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_1}\left[80q_1 - \frac{q_1^2}{2} - \frac{q_1 q_2}{2}\right] = 80 - \cancel{2}\frac{q_1}{\cancel{2}} - \frac{q_2}{2} = 0
$$
$$
\Leftrightarrow \boxed{80 - \frac{q_2}{2} = q_1} \rightarrow \text{Curva de reacción de la empresa 1}
$$

3. Función de beneficios de la segunda empresa

$$\pi_2 = \text{ingresos totales - costos totales} \Leftrightarrow \pi_2 = p_2q_2 - c_2$$
$$\pi_2 = \left(90 - \frac{1}{2}q\right)q_2 - (10q_2) \Leftrightarrow \pi_2 = \left(90 - \frac{1}{2}[q_1 + q_2]\right)q_2 - 10q_2$$
$$\pi_1 = \left(90 - \frac{q_1 + q_2}{2}\right)\underline{q_2} - 10\underline{q_2}$$
$$\pi_2 = \left[\left(90 - \frac{q_1 + q_2}{2}\right) - 10\right]q_2$$
$$\pi_2 = \left[\frac{180 - (q_1 + q_2)}{2} - 10\right]q_2$$
$$\pi_2 = \left[\frac{180 - q_1 - q_2 - 20}{2}\right]q_2$$
$$\pi_2 = \left[\frac{160 - q_1 - q_2}{2}\right]q_2$$
$$\pi_2 = \frac{160q_2}{2} - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2}$$
$$\boxed{\pi_2 = 80q_2 - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2}}$$

4. Función de reacción de la segunda empresa

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_2}\left[80q_2 - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2}\right] = 80 - \cancel{2}\frac{q_2}{\cancel{2}} - \frac{q_1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{80 - \frac{q_1}{2} = q_2} \rightarrow \text{Curva de reacción de la empresa 2}$$

5. Equilibrio

El equilibrio se encuentra planteando un sistema de ecuaciones con las funciones de reacción. En el caso concreto, ambas empresas se enfrentan a funciones de costos idénticas y se enfrentan a la misma curva de demanda de mercado. Así, es esperable que produzcan exactamente la misma cantidad.

$$\begin{cases} q_1 = 80 - \frac{q_2}{2} \\ q_2 = 80 - \frac{q_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow q_1 - 80 - \frac{\left(80 - \frac{q_1}{2}\right)}{2} \Leftrightarrow 1_1 = 80 - \frac{\frac{160-q_1}{2}}{2} \Leftrightarrow q_1 = 80 - \frac{160 - q_1}{4}$$
$$\Leftrightarrow q_1 = \frac{320 - (160 - q_1)}{4} \Leftrightarrow q_1 = \frac{320 - 160 - q_1}{4} \Leftrightarrow 4q_1 = 160 - q_1 \Leftrightarrow 3q_1 = 160 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{q}_1 = \frac{160}{3}}$$

Ahora, evaluando en la curva de reacción de la segunda empresa:

$$q_2 = 80 - \frac{\left(\frac{160}{3}\right)}{2} \Leftrightarrow q_2 = 80 - \frac{160}{6} \Leftrightarrow q_2 = \frac{480 - 160}{6} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{q}_2 = \frac{160}{3}}$$

Que era lo esperado dado que ambas empresas se enfrentaban a la misma demanda de mercado, tenían los mismos costos y no se indicaba distinción alguna de producto.

Ejercicio 88 [Competencia por precios o cantidades[1]]. Dos empresas compiten en un mercado con producto diferenciado. El costo marginal de producción es constate e igual a 2 para ambas empresas y las demandas por el bien de cada empresa están representadas por:

$$q_1 = 10 - 2P_1 + \frac{1}{2}P_2$$
$$q_2 = 10 - 2P_2 + \frac{1}{2}P_1$$

→ Si ambas empresas son seguidoras, encuentre si para estas empresas es más rentable competir por precios (estilo Bertrand) o por cantidades (estilo Cournot).

[1]Ejercicio tomado de ACCG

Bertrand:
Suponga que no existen costos fijos

$$\begin{aligned}
\text{Max}_{P_1}\,\pi_1 &= \left(10-2P_1+\frac{1}{2}P_2\right)P_1-2\left(10-2P_1+\frac{1}{2}P_2\right)\\
\frac{\partial\pi_1}{\partial P_1} &= 10-4P_1+\frac{1}{2}P_2+4=0\\
10+\frac{1}{2}P_2+4=4P_1 \Rightarrow \frac{10+\frac{1}{2}P_2+4}{4} &= P_1\\
R_1\left(P_2\right):P_1 &= \frac{5}{2}+\frac{1}{8}P_2+1
\end{aligned}$$

Análogamente tenemos:

$$R_2\left(P_1\right):P_2=\frac{5}{2}+\frac{1}{8}P_1+1$$

Suponga que $P_1=P_2$

$$P_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{8}P_1+1$$

$$\begin{aligned}
P_1-\frac{1}{8}P_1 &= \frac{5}{2}+1\\
\frac{7}{8}P_1 &= \frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}\\
P_1 &= 4=P_2
\end{aligned}$$

Obteniendo las ganancias:

$$\pi_1=\pi_2=4q-2q=2q=2\left[10-2(4)+\frac{1}{2}(4)\right]=8$$

Cournot:

$$\begin{aligned}
q_1=10-2P_1+\frac{1}{2}P_2 \Rightarrow P_1 &= 5+\frac{1}{4}P_2-\frac{1}{2}q_1\\
P_2 &= 5+\frac{1}{4}P_1-\frac{1}{2}q_2\\
P_1 &= 5+\frac{1}{4}\left(5+\frac{1}{4}P_1-\frac{1}{2}q_2\right)-\frac{1}{2}q_1\\
P_1-\frac{1}{16}P_1 &= 5+\frac{1}{4}5-\frac{1}{8}q_2-\frac{1}{2}q_1\\
\frac{15}{16}P_1 &= \frac{25}{4}-\frac{1}{8}q_2-\frac{1}{2}q_1\\
P_1 &= \frac{20}{3}-\frac{2}{15}q_2-\frac{8}{15}q_1\\
P_2 &= 5+\frac{1}{4}\left(\frac{20}{3}-\frac{2}{15}q_2-\frac{8}{15}q_1\right)-\frac{1}{2}q_2\\
P_2 &= \frac{20}{3}-\frac{8}{15}q_2-\frac{2}{15}q_1
\end{aligned}$$

Maximizando ganancias:

$$\begin{aligned}
\max_{q_1} \pi_1 = \left(\frac{20}{3} - \frac{2}{15}q_2 - \frac{8}{15}q_1\right) q_1 - 2q_1 \\
\frac{20}{3} - \frac{2}{15}q_2 - \frac{16}{15}q_1 - 2 = 0 \\
\frac{20}{3} - \frac{2}{15}q_2 - 2 = \frac{16}{15}q_1 \\
\frac{25}{4} - \frac{1}{8}q_2 - \frac{15}{8} = q_1
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\frac{25}{4} - \frac{1}{8}q_1 - \frac{15}{8} = q_2$$

Asumiendo $q_1 = q_2$

$$\begin{aligned}
\frac{25}{4} - \frac{1}{8}q_1 - \frac{15}{8} = q_1 \\
\frac{25}{4} - \frac{15}{8} = q_1 + \frac{1}{8}q_1 \\
\frac{25}{4} - \frac{15}{8} = \frac{9}{8}q_1 \\
\frac{35}{8} = \frac{9}{8}q_1 \\
q_1 = q_2 = \frac{35}{9}
\end{aligned}$$

Obteniendo las ganancias

$$\begin{aligned}
\pi_1 = \pi_2 = Pq - 2q = \left(\frac{20}{3} - \frac{8}{15} * \frac{35}{9} - \frac{2}{15} * \frac{35}{9}\right) \frac{35}{9} - 2 * \frac{35}{9} = \frac{1960}{243} \approx 8,06 \\
\frac{1960}{243} > 8
\end{aligned}$$

Ejercicio 89 [Precio y cantidad en un oligopolio de Cournot con n-empresas[2]]. N empresas que tienen un costo marginal igual a c compiten en un mercado oligopólico donde la función de demanda es igual a:

$$P = \frac{A}{Q} \qquad ; \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Si las empresas compiten por cantidades simultáneamente, determine el precio y la cantidad de equilibrio. $\rightarrow$

$$\max_{q_i} \left\{ \frac{A}{\sum q_i} \cdot q_i - cq_i \right\} \Rightarrow -\frac{A}{Q^2}q_i + \frac{A}{Q} - c = 0$$

Sumando todas las condiciones de primer orden:

$$-\frac{A}{Q^2}Q + \frac{nA}{Q} - nc = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q}(nA - A) = nc \Rightarrow Q = \frac{A}{c} \cdot \frac{n-1}{n} \Rightarrow P = \frac{A}{Q} = A \cdot \frac{nc}{A(n-1)} = \frac{nc}{n-1}$$

Para obtener q_i:

$$\begin{aligned}
q_i = Q - \frac{Q^2 c}{A} \Rightarrow q_i = Q\left(1 - Q \cdot \frac{c}{A}\right) = \frac{A}{c} \cdot \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{A}{c} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{c}{A}\right) \\
= \frac{A}{c} \cdot \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{A}{c} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{A}{c} \cdot \frac{n-1}{n^2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 90 [Precio y cantidad en un oligopolio de Cournot con n-empresas[3]]. En un mercado existen n

[2]Ejercicio tomado de Casasola (2024)
[3]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

empresas oligopólicas con un costo marginal igual a c y la función de demanda del mercado es igual a:

$$P = a - b\sqrt{Q} \qquad ; \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Si las empresas compiten por cantidades simultáneamente, determine el precio y la cantidad de equilibrio.
→ Este ejercicio puede resolverse de 2 maneras diferentes:
Forma 1:

$$\max_{q_i} \left\{ \left(a - b\sqrt{\sum_{i=1}^{n} q_i} \right) q_i - cq_i \right\}$$
$$a - \frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}}q_i - b\sqrt{Q} - c = 0$$

$$\text{Forma 1:} \quad a - \frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}}q_i - b\sqrt{Q} - c = 0$$
$$\vdots$$
$$a - \frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}}q_k - b\sqrt{Q} - c = 0 \quad \{\text{Combinando se tiene que } q_i = q_k\}$$

$$a - \frac{b}{2}(nq_i)^{-\frac{1}{2}}q_i - b\sqrt{nq_i} - c = 0 \Rightarrow a - \frac{b}{2\sqrt{n}}q_i^{-\frac{1}{2}} - b\sqrt{nq_i} - c = 0$$

$$\Rightarrow a - c = b\sqrt{q_i}\left(\frac{1}{2\sqrt{nq_i}} + \sqrt{n}\right) \Rightarrow q_i = \left(\frac{a-c}{b}\right)^2 \frac{4n}{(1+2n)^2}$$

$$Q = \left(\frac{a-c}{b}\right)^2 \frac{4n^2}{(1+2n)^2} \Rightarrow P = a - (a-c)\cdot\frac{2n}{1+2n}$$

Forma 2:

$$a - \frac{b}{2}Q^{-\frac{1}{2}}q_i - b\sqrt{Q} - c = 0$$
$$\vdots$$
$$\text{Sumando:} \quad na - \frac{b}{2}\sqrt{Q}^{-1}Q - nb\sqrt{Q} - nc = 0$$

$$a - c = b\sqrt{Q}\left(\frac{1}{2n} + 1\right)$$

$$\left(\frac{a-c}{b}\right)^2\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^2 = Q \Rightarrow P = a - b\left(\frac{a-c}{b}\right)\left(\frac{2n}{1+2n}\right)$$

Ejercicio 91 [Precio y cantidad de equilibrio en un oligopolio de Cournot con n-empresas[4]]. N empresas que tienen un costo marginal igual a c compiten en un mercado oligopólico donde la función de demanda es igual a:

$$P = \frac{A}{Q} \qquad ; \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Si las empresas compiten por cantidades simultáneamente, determine el precio y la cantidad de equilibrio.
→

[4]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$\max_{q_i}\left\{\frac{A}{\sum q_i}\cdot q_i - cq_i\right\} \Rightarrow -\frac{A}{Q^2}\cdot q_i + \frac{A}{Q} - c = 0$$

Sumando todas las condiciones de primer orden:

$$-\frac{A}{Q^2}\cdot Q + \frac{nA}{Q} - nc = 0 \Rightarrow \frac{1}{Q}(nA - A) = nc \Rightarrow Q = \frac{A}{c}\cdot\frac{n-1}{n}$$

$$P = \frac{A}{Q} = A\cdot\frac{n}{A(n-1)} = \frac{nc}{n-1}$$

Para hallar q_i:

$$\begin{aligned} q_i &= Q - \frac{Q^2c}{A} = Q\left(1 - \frac{Qc}{A}\right) = \frac{A}{c}\cdot\frac{n-1}{n}\left(1 - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{c}{A}\right) \\ &= \frac{A}{c}\cdot\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-(n-1)}{n}\right) = \frac{A}{c}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{A}{c}\cdot\frac{n-1}{n^2} \end{aligned}$$

18.3. Oligopolio de Stackelberg

Definición 36. Un oligopolio de Stackelberg es aquella estructura de mercado bajo la cual las empresas que participan en el mercado compiten por cantidades en una modalidad de juego secuencial, lo cual quiere decir que una primera empresa, denominada empresa lider, toma su decisión de producción, y posteriormente otra empresa llamada empresa seguidora, toma su decisión en base a lo que ha decidido hacer la empresa líder.

Ejemplo 46 [Duopolio con liderazgo en cantidades]. En un mercado existen únicamente dos empresas que compiten por cantidades. Cada una responderá a lo que haga la otra eligiendo la cantidad que maximice sus beneficios. La primera empresa, que es la empresa seguidora, posee una una función de costos de la forma $c_1 = 10q_1$, mientras que la segunda empresa, que es la líder, tiene la función de costes $c_2 = 10q_2$. Además, la demanda del mercado viene definida por la expresión $p = 90 - \frac{1}{2}q$.

Encuentre las funciones de reacción de ambas empresas, así como el precio y la cantidades de equilibrio.

1. Función de reacción de la empresa seguidora

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \text{ingresos totales - costos totales} \Leftrightarrow \pi_1 = p_1q_1 - c_1 \\ \pi_1 = \left(90 - \frac{1}{2}q\right)q_1 - (10q_1) \Leftrightarrow \pi_1 &= \left(90 - \frac{1}{2}[q_1 + q_2]\right)q_1 - 10q_1 \\ \pi_1 &= \left(90 - \frac{q_1+q_2}{2}\right)\underline{q_1} - 10\underline{q_1} \\ \pi_1 &= \left[\left(90 - \frac{q_1+q_2}{2}\right) - 10\right]q_1 \\ \pi_1 &= \left[\frac{180-(q_1+q_2)}{2} - 10\right]q_1 \\ \pi_1 &= \left[\frac{180-q_1-q_2-20}{2}\right]q_1 \\ \pi_1 &= \left[\frac{160-q_1-q_2}{2}\right]q_1 \\ \pi_1 &= \frac{160q_1}{2} - \frac{q_1^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2} \\ &\boxed{\pi_1 = 80q_1 - \frac{q_1^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2}} \\ \frac{\partial\pi_1}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_1}\left[80q_1 - \frac{q_1^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2}\right] &= 80 - \cancel{2}\frac{q_1}{\cancel{2}} - \frac{q_2}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{80 - \frac{q_2}{2} = q_1} &\rightarrow \text{Curva de reacción de la empresa 1} \end{aligned}$$

2. Función de beneficios de la empresa líder

$$\pi_2 = \text{ingresos totales - costos totales} \Leftrightarrow \pi_2 = p_2q_2 - c_2$$
$$\pi_2 = \left(90 - \frac{1}{2}q\right)q_2 - (10q_2) \Leftrightarrow \pi_2 = \left(90 - \frac{1}{2}[q_1+q_2]\right)q_2 - 10q_2$$
$$\pi_1 = \left(90 - \frac{q_1+q_2}{2}\right)\underline{q_2} - 10\underline{q_2}$$
$$\pi_2 = \left[\left(90 - \frac{q_1+q_2}{2}\right) - 10\right]q_2$$
$$\pi_2 = \left[\frac{180-(q_1+q_2)}{2} - 10\right]q_2$$
$$\pi_2 = \left[\frac{180-q_1-q_2-20}{2}\right]q_2$$
$$\pi_2 = \left[\frac{160-q_1-q_2}{2}\right]q_2$$
$$\pi_2 = \frac{160q_2}{2} - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2}$$
$$\boxed{\pi_2 = 80q_2 - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2}}$$

3. Maximizar los beneficios de la empresa líder
Se sustituye la función de reacción de la empresa seguidora dentro de los beneficios de la líder. Así:

$$\pi_2 = 80q_2 - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_1q_2}{2} \Leftrightarrow \pi_2 = 80q_2 - \frac{q_2^2}{2} - \frac{1}{2}\left(80 - \frac{q_2}{2}\right)q_2$$
$$\Leftrightarrow \pi_2 = 80q_2 - \frac{q_2^2}{2} - 40q_2 - \frac{q_2^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \pi_2 = 40q_2 - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_2^2}{4}$$

Ahora, derivando respecto a q_2 e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_2}\left[40q_2 - \frac{q_2^2}{2} - \frac{q_2^2}{4}\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow 40 - \cancel{2}\frac{q_2}{\cancel{2}} - \cancel{2}\frac{q_2}{\cancel{4}} = 0$$
$$\Leftrightarrow 40 - q_2 - \frac{q_2}{2} = 0 \Leftrightarrow 40 = \frac{3q_2}{2} = 0 \Leftrightarrow 80 = 3q_2$$
$$\Leftrightarrow \frac{80}{3} = q_2$$

4. Hallar el equilibrio

$$q_1 = 80 - \frac{q_2}{2} \Rightarrow q_1 = 80 - \frac{\frac{80}{3}}{2}$$
$$q_1 = 80 - \frac{80}{6} \Leftrightarrow q_1 = \frac{200}{3}$$

Ejemplo 47 [Duopolio con liderazgo en precios]. Considere un un duopolio de dos empresas que tienen productos diferenciados. Las demandas que enfrentan ambas empresas son:

$$Q_1 = 20 - P_1 + P_2$$
$$Q_2 = 20 - P_2 + P_1$$

Note que como dependen positivamente del precio del otro producto, eso quiere decir que son bienes sustitutos. También se tiene que $CMg_1 = CMg_2 = 0$.

- Encuentre el equilibrio si la empresa 1 es líder y la empresa 2 es seguidora.

En el caso que haya una empresa líder y otra seguidora, se debe empezar con el problema de la empresa líder. Esta empresa tiene el problema de maximizar sus ganancias Π_1 dadas o sujeta a la curva de reacción de la empresa seguidora. La curva de reacción de la empresa seguidora es:

$$\begin{aligned}\max_{P_2} \pi_2 =& Q_2 \cdot P_2 \\ \max_{P_2} \pi_2 =& (20 - P_2 + P_1)\, P_2\end{aligned}$$

Y la condición de primer orden sería:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_2}{\partial P_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial P_2}\left[20P_2 - P_2^2 + P_1 P_2\right] =& 0 \\ 20 - 2P_2 + P_1 =& 0 \\ 20 + P_1 =& 2P_2 \\ \boxed{10 + \frac{P_1}{2} = P_2}\end{aligned}$$

Y por tanto, el problema para la empresa líder sería:

$$\begin{aligned}\max_{P_1} \pi_1 =& Q_1 \cdot P_1 \quad s.a \quad P_2 = 10 + \frac{P_1}{2} \\ \max_{P_1} \pi_1 =& (20 - P_1 + P_2)\, P_1 \quad s.a \quad P_2 = 10 + \frac{P_1}{2} \\ \max_{P_1} \pi_1 =& 20P_1 - P_1^2 + P_1\left(10 + \frac{P_1}{2}\right) \\ \max_{P_1} \pi_1 =& 20P_1 - P_1^2 + 10P_1 + \frac{P_1^2}{2} \\ \max_{P_1} \pi_1 =& 30P_1 - \frac{P_1^2}{2}\end{aligned}$$

Y la condición de primer orden sería:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_1}{\partial P_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial P_1}\left[30P_1 - \frac{P_1^2}{2}\right] =& 0 \\ 30 - \frac{\cancel{2}P_1}{\cancel{2}} =& 0 \\ \boxed{30 = P_1^*}\end{aligned}$$

Y al obtener el precio que cobrará la empresa líder, esto se puede evaluar en la curva de reacción de la empresa 2:

$$\begin{aligned}10 + \frac{P_1^*}{2} =& P_2^* \\ 10 + \frac{(30)}{2} =& P_2^* \\ \boxed{25 = P_2^*}\end{aligned}$$

Y al tener los precios de equilibrio para ambas empresas, se puede evaluar cuánto sería la cantidad que produciría cada una en equilibrio para luego saber cuáles serán los beneficios de ambas empresas en el equilibrio:

$$\begin{aligned}Q_1 =& 20 - (30) + (25) = 15 \\ Q_2 =& 20 - (25) + (30) = 25\end{aligned}$$

Y finalmente, dadas la cantidad y precio de equilibrio, los beneficios de las empresas serían:

$$\begin{aligned}\pi_1 =& Q_1 \cdot P_1 = 15 \cdot 30 = 450 \\ \pi_2 =& Q_2 \cdot P_2 = 25 \cdot 25 = 625\end{aligned}$$

En este caso se observa que la empresa seguidora obtiene unos beneficios mayores que la empresa líder, ya que, al ser seguidora en precios, puede simplemente fijar un precio menor que el que fija el líder y así abarcar una mayor parte del mercado.

Ejemplo 48 [Tres empresas compiten por cantidades]. Tres empresas participan en un mercado y compiten por cantidades. Dos empresas son seguidoras y la otra es líder. Las dos empresas seguidoras son idénticas y tienen un costo marginal igual a 10. La empresa líder tiene un costo marginal igual a 0. Las empresas se enfrentan a una curva de demanda representada por $X = 60 - \frac{1}{2}P$. Encuentre la cantidad de equilibrio de cada una de las empresas.

1. Calcular la curva de reacción de las empresas seguidoras
   La función de ganancias de la empresa 2 es la siguiente:

$$\pi_2 = [120 - 2(x_1 + x_2 + x_3)]\, x_2 - CT_2$$

   Y el problema de maximización de ganancias de esta empresa sería:

$$\max_{x_2} \pi_2 = [120 - 2(x_1 + x_2 + x_3)]\, x_2 - CT_2$$

   Y la condición de primer orden sería:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_2}\left[120 - 2\left(x_1 + x_2 + x_3\right) x_2 - 10\right] &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_2}\left[120x_2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_2x_3 - 10\right] &= 0 \\
\Leftrightarrow 120 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 10 &= 0 \\
\Leftrightarrow 110 - 2x_1 - 2x_3 &= 4x_2 \\
\Leftrightarrow \frac{55}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 &= x_2 \\
\Leftrightarrow \boxed{\frac{55 - x_1 - x_3}{2} = x_2}
\end{aligned}$$

   Dado que las empresas seguidoras son idénticas, se sabe que la curva de reacción de la empresa 3 es:

$$\boxed{\frac{55 - x_1 - x_2}{2} = x_3}$$

2. Sustituir la curva de reacción de las empresas seguidoras en la curva de reacción de la empresa líder

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{55 - x_1 - x_2}{2} \\
x_3 &= \frac{55 - x_1 - \left(\frac{55 - x_1 - x_3}{2}\right)}{2} \\
x_3 &= \frac{55 - x_1 - \frac{55 - x_1 - x_3}{2}}{2} \\
x_3 &= \frac{55 + \frac{-2x_1 - 55 + x_1 + x_3}{2}}{2} \\
x_3 &= \frac{\frac{110 - 2x_1 - 55 + x_1 + x_3}{2}}{2} \\
x_3 &= \frac{110 - 2x_1 - 55 + x_1 + x_3}{4} \\
4x_3 - x_3 &= 55 - x_1 \\
3x_3 &= 55 - x_1 \\
\boxed{x_3 = \frac{55 - x_1}{3}}
\end{aligned}$$

   Y dado que las empresas seguidoras son idénticas, entonces:

$$\boxed{x_2 = \frac{55 - x_1}{3}}$$

3. Calcular el nivel de producción de la empresa líder al maximizar ganancias
Hay que resolver el problema de maximización de beneficios de la empresa líder, la cual toma como dadas las cantidades que producen las empresas seguidoras. De esta forma:

$$\max_{x_1} \pi_1 = [120 - 2(x_1 + x_2 + x_3)]\, x_1 - CT_1$$

Y evaluando x_2 y x_3 el problema se puede reformular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\max_{x_1} \pi_1 =& 120x_1 - 2\left(x_1 + \left(\frac{55 - x_1}{3}\right) + \left(\frac{55 - x_1}{3}\right)\right) x_1 - \underbrace{\cancel{CT_1}}_{0} \\
\max_{x_1} \pi_1 =& 120x_1 - 2\left(\frac{3x_1 + 55 - x_1}{3} + \frac{55 - x_1}{3}\right) x_1 \\
\max_{x_1} \pi_1 =& 120x_1 - 2\left(\frac{3x_1 + 55 - x_1 + 55 - x_1}{3}\right) x_1 \\
\max_{x_1} \pi_1 =& 120x_1 - 2x_1\left(\frac{3x_1 + 110 - 2x_1}{3}\right) \\
\max_{x_1} \pi_1 =& 120x_1 - 2x_1\left(\frac{x_1 + 110}{3}\right) \\
\max_{x_1} \pi_1 =& 120x_1 + \frac{-2x_1^2 - 220x_1}{3} \\
\max_{x_1} \pi_1 =& \frac{360x_1 - 2x_1^2 - 220x_1}{3} \\
\max_{x_1} \pi_1 =& \frac{140x_1 - 2x_1^2}{3}
\end{aligned}$$

Y la condición de primer orden sería:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{140x_1 - 2x_1^2}{3}\right] =& 0 \\
\Leftrightarrow \frac{140}{3} - \frac{4x_1}{3} =& 0 \\
\Leftrightarrow \frac{140}{\cancel{3}} =& \frac{4x_1}{\cancel{3}} \\
\Leftrightarrow 140 =& 4x_1 \\
\Leftrightarrow 35 =& x_1
\end{aligned}$$

4. Calcular el nivel de producción de las empresas seguidoras
Sabiendo cuánto va a producir la empresa líder, se puede ver cuánto producirán las empresas seguidoras:

$$\begin{aligned}
x_2 =& \frac{55 - x_1}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{20}{3} \\
x_3 =& \frac{55 - x_1}{3} \Rightarrow x_3 = \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 92 [Competencia y liderazgo en precios[5]]. Considere un duopolio de dos empresas, E1 y E2. Tienen productos diferenciados. Las demandas son:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 20 - P_1 + P_2 \\
Q_2 &= 20 - P_2 + P_1
\end{aligned}$$

Note que como dependen positivamente del precio del otro producto, eso quiere decir que son bienes sustitutos. También se tiene que $CM_1 = CM_2 = 0$.

[5]Ejercicio tomado de ACCG

a) Encuentre el equilibrio del duopolio bajo competencia simultánea en precios.

→ Se plantea el problema de la empresa 1:

$$\max_{P_1} \Pi_1 = Q_1 \cdot P_1 = (20 - P_1 + P_2) P_1$$

CPO:

$$20 - 2P_1 + P_2 = 0 \Rightarrow P_1 = 10 + \frac{P_2}{2}$$

Esta es la función de reacción de la empresa 1 . Como el problema para la empresa 2 es simétrico, ya que tienen los mismos costos y la misma forma de la demanda, entonces sabemos que la función de reacción de la empresa 2 luce así:

$$P_2 = 10 + \frac{P_1}{2}$$

Para el equilibrio, también sabemos que $P_1 = P_2$ ya que son simétricas. (Sin saber esto, de igual forma se puede encontrar el equilibrio encontrado la intersección entre ambas funciones de reacción).

$$P_1 = 10 + \frac{P_1}{2} \Rightarrow P_1^* = 20 = P_2^*$$

Y entonces,

$$Q_1^* = Q_2^* = 20, \Pi_1^* = \Pi_2^* = 400$$

→ Para el caso de liderazgo en precios, comenzamos con el problema de la empresa líder, E1: maximizar sus ganancias sujeta a la función de reacción de la empresa 2 .

$$\begin{gathered} \text{Máx }_{P_1} \Pi_1 = (20 - P_1 + P_2) P_1 \text{ s.a. } P_2 = 10 + \frac{P_1}{2} \\ \Rightarrow \text{Máx }_{P_1} \Pi_1 = 20P_1 - P_1^2 + 10P_1 + \frac{P_1^2}{2} = 30P_1 - \frac{P_1^2}{2} \end{gathered}$$

CPO:

$$30 - P_1 = 0 \Rightarrow P_1^* = 30, P_2^* = 25$$

Y entonces,

$$\begin{gathered} Q_1^* = 15, \Pi_1^* = 450 \\ Q_2^* = 25, \Pi_2^* = 625 \end{gathered}$$

Note que en el caso de liderazgo en precios, la empresa seguidora tiene la ventaja, ya que define un precio menor al del líder, así abarca mayor mercado y aumenta sus ganancias. El líder tiene menos ganancias que la seguidora, sin embargo, sigue prefiriendo este resultado que volver a la situación de competencia simultánea ya que aumenta sus ganancias.

Ejercicio 93 [Oligopolio con tres empresas [6]]. Tres empresas participan en un mercado y compiten por cantidades. Las primeras dos empresas son seguidoras y la tercera es líder. Las dos empresas seguidoras son idénticas y tienen un costo marginal igual a 10, la empresa líder tiene un costo marginal igual a 0 . Las empresas se enfrentan a una curva de demanda representada por $X = 60 - \frac{1}{2}P$. Encuentre la cantidad de equilibrio de cada una de las empresas.

→ A continuación los pasos:

[6] Ejercicio tomado de ACCG

Paso 1: Se calculan las curvas de reacción (RC) de las empresas seguidoras.
La función de ganancias de la empresa 2 es la siguiente:

$$\pi_2 = [120 - 2(x_1 + x_2 + x_3)]\, x_2 - CT_2$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 120 - 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 10 = 0$$

Se despeja x_2 para encontrar RC_2.

$$x_2 = \frac{55 - x_1 - x_3}{2}$$

El cálculo de RC_2 es análogo al cálculo de RC_3.

$$x_3 = \frac{55 - x_1 - x_2}{2}$$

Paso 2: Se sustituye la curva de reacción de la empresa 2 en la curva de reacción de la empresa 3.

$$x_3 = \frac{55 - x_1 - \left(\frac{55 - x_1 - x_3}{2}\right)}{2}$$
$$x_3 = \frac{55 - x_1}{3}$$

Dado que las empresas son idénticas, producen la misma cantidad, por lo que ($x_2 = x_3$).

$$x_2 = \frac{55 - x_1}{3}$$

Paso 3: Se calcula el nivel de producción de la empresa líder al maximizar las ganancias.
La función de ganancias de la empresa 1 es la siguiente:

$$\pi_1 = [120 - 2(x_1 + x_2 + x_3)]\, x_1 - CT_1$$

Se sustituyen $x_2 \wedge x_3$ en la función de ganancias.

$$\pi_1 = 120x_1 - 2x_1^2 - 4x_1\left(\frac{55 - x_1}{3}\right)$$
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 120 - 4x_1 - \frac{220}{3} + \frac{8}{3}x_1$$

Se multiplica todo por 3 y se despeja x_1.

$$360 - 12x_1 - 220 + 8x_1 = 0$$

Se despeja x_1.

$$x_1 = 35$$

Paso 4: Se calcula el nivel de producción de las empresas seguidoras.

$$x_2 = \frac{55 - 35}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{20}{3} \approx 6,67$$
$$(x_3 = x_2) \Rightarrow x_3 = \frac{20}{3} \approx 6,67$$

Ejercicio 94 [Liderazgo en cantidades con cambio en los costos[7]]. En un pueblo hay dos clínicas que brindan servicios médicos algo diferenciados. [28]
La clínica A enfrenta la curva de demanda inversa: $P_A = 10 - q_A - q_B$ y tiene un costo marginal igual a 2 .
La clínica B enfrenta la curva de demanda inversa: $P_B = 10 - q_B - q_A$ y tiene un costo marginal igual a 2 .
Ambas empresas compiten en cantidades, con la clínica A siendo la líder (modelo de Stackelberg).
a) Determine cuánto es la producción y los beneficios de cada clínica.

→ Se inicia con la maximización de la clínica B para encontrar su función de reacción o de mejor respuesta:

$$\text{máx}\, \Pi_B = P_B q_B - CT_B$$

Al ser competencia por cantidades, se sustituye la demanda inversa:

$$\Rightarrow \text{ Máx } \Pi_B = (10 - q_B - q_A)\, q_B - CT_B$$

CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_B}{\partial q_B} &= 10 - 2q_B - q_A - CM_B = 0 \\ &\Rightarrow 10 - 2q_B - q_A - 2 = 0 \\ &\Rightarrow q_B = \frac{-q_A}{2} + 4 \end{aligned}$$

Vemos que son sustitutos estratégicos.
Ahora se realiza la maximización del líder:

$$\begin{aligned} \text{Máx } \Pi_A &= P_A q_A - CT_A \\ \Rightarrow \text{ Máx } \Pi_A &= (10 - q_A - q_B)\, q_A - CT_A \end{aligned}$$

Se sustituye la función de reacción de la clínica B :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ Máx } \Pi_A &= \left(10 - q_A + \frac{q_A}{2} - 4\right) q_A - CT_A \\ \Rightarrow \text{ Máx } \Pi_A &= \left(6 - \frac{q_A}{2}\right) q_A - CT_A \end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_A}{\partial q_A} &= 6 - q_A - 2 = 0 \\ &\Rightarrow q_A^* = 4 \\ &\Rightarrow q_B^* = 2 \end{aligned}$$

Los precios son:

$$P_A^* = P_B^* = 4$$

Se calculan las ganancias:

$$\begin{aligned} \Pi_A^* &= (4)(4) - (4)(2) = 8 \\ \Pi_B^* &= (2)(4) - (2)(2) = 4 \end{aligned}$$

[7]Ejercicio tomado de ACCG
[7][28] Ejercicio tomado del Quiz 3 Grupo 01 del I Ciclo 2022

b) Si el costo marginal de la clínica B se reduce a 1 , determine cuánto es la producción y los beneficios de cada clínica.

$\rightarrow$ Ahora $CM_B = 1$. Se realiza el mismo proceso. Primero se encuentra la función de reacción de la empresa seguidora:

$$\begin{aligned} \text{máx}\, \Pi_B &= P_B q_B - CT_B \\ \Rightarrow\ \text{Máx}\ \Pi_B &= (10 - q_B - q_A)\, q_B - CT_B \end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_B}{\partial q_B} &= 10 - 2q_B - q_A - CM_B = 0 \\ &\Rightarrow 10 - 2q_B - q_A - 1 = 0 \\ &\Rightarrow q_B = \frac{-q_A}{2} + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Ahora se realiza la maximización del líder:

$$\begin{aligned} \text{máx}\, \Pi_A &= P_A q_A - CT_A \\ \Rightarrow\ \text{Máx}\ \Pi_A &= (10 - q_A - q_B)\, q_A - CT_A \end{aligned}$$

Se sustituye la función de reacción de la clínica B :

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \text{Máx}\ \Pi_A &= \left(10 - q_A + \frac{q_A}{2} - \frac{9}{2}\right) q_A - CT_A \\ \Rightarrow\ \text{Máx}\ \Pi_A &= \left(\frac{11}{2} - \frac{q_A}{2}\right) q_A - CT_A \end{aligned}$$

CPO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_A}{\partial q_A} &= 5,5 - q_A - 2 = 0 \\ &\Rightarrow q_A' = 3,5 \\ &\Rightarrow q_B' = 2,75 \end{aligned}$$

Los precios son:

$$P_A' = P_B' = 3,75$$

Se calculan las ganancias:

$$\begin{aligned} \Pi_A' &= (3,5)(3,75) - (3,5)(2) = 6,125 \\ \Pi_B' &= (2,75)(3,75) - (2,75)(1) = 7,5625 \end{aligned}$$

c) Explique qué relación hay entre sus resultados del punto a) con los del punto b).

$\rightarrow$ En el primer caso, la empresa líder produce el doble que la seguidora y obtiene, también, el doble de ganancias. En el segundo caso, la única diferencia es una disminución en los costos de la seguidora, sus roles se mantienen iguales. Por esta disminución, vemos un cambio en la función de reacción de la clínica B que, a su vez, afecta la decisión óptima de la clínica líder A. Ahora, la clínica líder continúa produciendo mayor cantidad que la seguidora pero comparando con la situación original, A produce menos y B más. Al calcular las ganancias vemos que las ganancias de la A disminuyen y que las ganancias de la B aumentan. Ahora, inclusive, la clínica B tiene más ganancias que la A , sin embargo, esto se debe a que tiene menores costos y no por ser seguidora en cambio de líder.

Ejercicio 95 [Competencia en cantidades y liderazgo [8]]. Inicialmente hay una única empresa llamada Amay que cambia aceite de automóviles. Suponga que la empresa tiene un costo marginal de 12 dólares por cambio de aceite y no tiene costos fijos. La función de demanda inversa del mercado viene dada por $P(Q) = 100 - 2Q$. 29

1. Calcule el precio, la cantidad de equilibrio y el beneficio de esa única empresa.

   a) Al ser la única empresa, actúa como un monopolio, la condición óptima es $CMg = IM$.

$$\begin{aligned} 12 = 100 - 4Q &\Rightarrow Q = 22 \\ &\Rightarrow P = 100 - 2(22) = 56 \\ \Pi = (56)(22) - (22)(12) &= 968 \end{aligned}$$

   b) Función de reacción de la empresa 1:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= (100 - 2(q_1 + q_2) - 12)\, q_1 \\ \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} &= 100 - 4q_1 - 2q_2 - 12 = 0 \\ &\Rightarrow q_1 = 22 - \frac{q_2}{2} \end{aligned}$$

2. Ahora, una segunda empresa llamada Teneti ingresa al mercado. La segunda empresa tiene un costo marginal de 20 dólares por cambio de aceite y tampoco tiene costos fijos. Determine las curvas de reacción, calcule la producción de equilibrio de Cournot para cada empresa y el beneficio de cada una. (4pts.)
   → Función de reacción de la empresa 2:

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= (100 - 2(q_1 + q_2) - 20)\, q_2 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} &= 100 - 4q_2 - 2q_1 - 20 = 0 \\ &\Rightarrow q_2 = 20 - \frac{q_1}{2} \end{aligned}$$

   Equilibrio:

$$\begin{aligned} 2q_1 &= 44 - \left(20 - \frac{q_1}{2}\right) \\ \frac{3}{2}q_1 &= 24 \Rightarrow q_1 = 16, q_2 = 12 \\ &\Rightarrow P = 44 \\ \Pi_1 &= (44 - 12)16 = 512 \\ \Pi_2 &= (44 - 20)12 = 288 \end{aligned}$$

3. Calcule la producción de equilibrio de Stackelberg para cada empresa, tomando en cuenta que la empresa Teneti entra en segundo lugar, es decir, es seguidora.
   → Equilibrio de Stackelberg:
   Se resuelve la maximización del líder sujeta a la función de reacción de la empresa seguidora.

$$\begin{aligned} \Pi_1 = \left[100 - 2\left(q_1 + 20 - \frac{q_1}{2}\right) - 12\right] q_1 &= (48 - q_1)\, q_1 \\ \frac{\partial \mid Pi_1}{\partial q_1} = 48 - 2q_1 = 0 &\Rightarrow q_1 = 24, q_2 = 8 \\ \Rightarrow P = 100 - 2(32) &= 36 \\ \Pi_1 = (36 - 12)24 &= 576 \\ \Pi_2 = (36 - 20)8 &= 128 \end{aligned}$$

[8] Ejercicio tomado de ACCG

Ejercicio 96 [Falso y verdadero: mercados no competitivos[9]]. Decide si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Explica tus respuestas.

1. (5 Puntos) En un duopolio de Cournot, si una firma reduce su producción, entonces es óptimo que la otra firma también reduzca su producción.
   → Falso. Si la otra firma reduce su producción, esto aumenta el ingreso marginal de esta firma, por lo tanto es óptimo aumentar su producción.

2. (5 Puntos) La competencia a lo Bertrand siempre resulta en beneficios económicos nulos en el largo plazo.
   → Falso. Esto es cierto si ambas firmas tienen la misma tecnología. Si una firma es más eficiente, entonces obtendrá beneficios positivos en equilibrio.

3. (5 Puntos) Los mercados competitivos siempre son preferibles a un monopolio.
   → Falso. Si existe un monopolio natural, entonces el monopolio es preferible, porque la firma cerraría en un mercado competitivo.

4. (5 Puntos) La regulación gubernamental puede mejorar el bienestar en mercados no competitivos.
   → Verdadero. Si existe un monopolio, la intervención del gobierno puede mejorar el excedente total, por ejemplo, imponiendo topes de precios.

Ejercicio 97 [Competencia en cantidades y liderazgo[10]]. Considere un mercado con n empresas que enfrentan una demanda igual a $P = A - bQ$ con

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

y donde cada empresa tiene un costo marginal igual a c.

1. Determine el equilibrio si las empresas compiten por cantidades simultáneamente.
   → **Forma 1 (competencia simultánea):**

$$\max_{q_i} \left\{ \left(A - bq_i - b\sum_{j\neq i}^{n} q_j \right) q_i - cq_i \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i} : A - 2bq_i - b\sum_{j\neq i}^{n} q_j - c = 0 \Rightarrow A - bq_i - bQ - c = 0$$

$$\text{Sumando:} \quad nA - bQ - bnQ - nc = 0 \Rightarrow Q = \frac{nA - nc}{b(1+n)} \Rightarrow P = A - bQ = A - \frac{nA - nc}{1+n}$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{A}{b} - \frac{nA - nc}{b(1+n)} - \frac{c}{b}$$

Forma 2 (simetría desde CPO):

$$\frac{\partial}{\partial q_i} : A - 2bq_i - b(n-1)q_i - c = 0 \Rightarrow A - bq_i - bnq_i - c = 0$$

$$\Rightarrow q_i = \frac{A-c}{b(n+1)} \Rightarrow Q = \frac{A-c}{b(n+1)} \cdot n \Rightarrow P = A - \frac{A-c}{n+1} \cdot n = \frac{A - cn}{n+1}$$

Nota 21. Si $n \to \infty \Rightarrow P \to c \quad \wedge \quad Q \to \frac{A-c}{b}$ lo cual coincide con el resultado de competencia perfecta).

2. Determine el equilibrio si se compite por cantidades y existe una empresa líder y todas las demás son seguidoras.
   → **Equilibrio con líder y seguidores:**

[9] Ejercicio tomado de Gruber (2023)
[10] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Seguidores (forma 1):

$$\max_{q_s}\left\{\left(A-bq_s-bq_L-b\sum_{j\neq s,L}q_j\right)q_s-cq_s\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial q_s}:A-2bq_s-bq_L-b\sum_{i\neq s,L}q_i-c=0$$
$$\text{Sumando sobre } (n-1) \text{ seguidores:}\quad (n-1)A-b\sum q_i-(n-1)bq_L-(n-1)c=0$$
$$\Rightarrow A-\frac{b}{n-1}\sum_{i\neq L}q_i-bq_L-c=0\Rightarrow\sum_{i\neq L}q_i=\frac{(n-1)A}{nb}-\frac{(n-1)}{n}q_L-\frac{(n-1)c}{nb}$$

Líder:

$$\max_{q_L}\left\{\left(A-bq_L-\frac{(n-1)A}{n}+\frac{(n-1)}{n}bq_L+\frac{(n-1)c}{n}\right)q_L-cq_L\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial q_L}:\frac{A}{n}-\frac{2b}{n}q_L-\frac{c}{n}=0\Rightarrow q_L=\frac{A-c}{2b}$$

Con CPO de seguidores:

$$q_s=\frac{A}{nb}-\frac{1}{n}q_L-\frac{c}{nb}=\frac{A-c}{2nb}\Rightarrow P=A-b\left(\frac{A-c}{2b}+(n-1)\cdot\frac{A-c}{2nb}\right)$$

Forma 2 (resolviendo por sustitución simétrica):

$$q_s=\frac{A-bq_L-c}{nb}\Rightarrow\sum q_s=(n-1)\cdot\frac{A-bq_L-c}{nb}$$
$$\max_{q_L}\left\{\left[A-bq_L-\frac{A-bq_L-c}{n}(n-1)\right]q_L-cq_L\right\}$$
$$\frac{\partial}{\partial q_L}:\frac{A}{n}-\frac{2b}{n}q_L-\frac{c}{n}=0\Rightarrow q_L=\frac{A-c}{2b}$$
$$q_s=\frac{A-\frac{A-c}{2}-c}{nb}=\frac{A-\frac{A+c}{2}}{nb}=\frac{A-c}{2nb}$$
$$\Rightarrow Q=\frac{A-c}{2b}+(n-1)\cdot\frac{A-c}{2nb}=\frac{A-c}{2b}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\Rightarrow P=A-bQ=A-b\left[\frac{A-c}{2b}\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

Nota 22. Límite: si $(n\to\infty\Rightarrow q_L=\frac{A-c}{2b},\quad q_s\to 0,\quad Q\to\frac{A-c}{2b},\quad P\to\frac{A+c}{2}$ (resultado de monopolio)

Ejercicio 98 [Competencia en cantidades y liderazgo[11]]. Considere que n empresas distintas compiten entre sí y enfrentan una misma demanda inversa de mercado representada por $P=a-Q$, donde Q es la producción combinada de todas las empresas. Lo que hace diferente a cada una de las empresas es su costo marginal, el cuál es igual a i. O sea, el costo marginal de la primera empresa es 1, el de la empresa 2 es 2 y así sucesivamente hasta la empresa n.

1. Si las empresas compiten al estilo Cournot, encuentre el precio y la cantidad de equilibrio de mercado; así como la cantidad que produce la empresa.
   → **Forma 1: Empresa j**

$$\pi_j=\left(a-\sum_{i=1}^{n}q_i\right)q_j-jq_j\Rightarrow\frac{\partial\pi_j}{\partial q_j}=a-\sum_{i\neq j}q_i-2q_j-j=0\Rightarrow q_j=\frac{a-\sum_{i\neq j}q_i-j}{2}\quad(\mathrm{MR}_j)$$
$$\Rightarrow q_j=\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}q_i-\frac{j}{2}$$

Sumando todas las condiciones de primer orden:

[11] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{na}{2} - \frac{n-1}{2}Q - \frac{n(n+1)}{4} \Rightarrow Q\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{na}{2} - \frac{n(n+1)}{4}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{na}{n+1} - \frac{n}{2} \Rightarrow P = a - Q = a - \left(\frac{na}{n+1} - \frac{n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P = a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2}$$

Finalmente, despejando q_j:

$$q_j\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{a - \sum_{i \neq j} q_i - j}{2} \Rightarrow q_j = \frac{a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2} - j}{\frac{3}{2}} = a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2} - j$$

Forma 2:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} : a - \sum_{i=1}^{N} q_i - q_j - j = 0$$

Sumando sobre todas las j:

$$na - nQ - Q - \sum_{j=1}^{n} j = 0 \Rightarrow Q = \frac{na - \sum_{j=1}^{n} j}{n+1} = \frac{na}{n+1} - \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow P = a - Q = a - \left(\frac{na}{n+1} - \frac{n}{2}\right) = a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow q_j = a - \frac{na}{n+1} + \frac{n}{2} - j$$

Forma 3:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} : a - \sum_{i=1}^{N} q_i - q_j - j = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \pi_k}{\partial q_k} : a - \sum_{i=1}^{N} q_i - q_k - k = 0$$

Restando las ecuaciones:

$$q_j + j = q_k + k \Rightarrow q_k = q_j + j - k$$

Sustituyendo en la condición de primer orden:

$$a - \sum_{i=1}^{N} q_i = q_j + j \Rightarrow a - nq_j + \sum_{k=1}^{n} k - q_j - j = 0$$

$$\Rightarrow a - (n+1)q_j + \frac{n(n+1)}{2} - j = 0 \Rightarrow q_j = \frac{a}{n+1} + \frac{n}{2} - j$$

Suma total:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a}{n+1} + \frac{n}{2} - j\right) = \frac{an}{n+1} + \frac{n^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} j = \frac{an}{n+1} + \frac{n^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{an}{n+1} - \frac{n}{2} \Rightarrow P = a - Q = a - \left(\frac{an}{n+1} - \frac{n}{2}\right) = a - \frac{an}{n+1} + \frac{n}{2}$$

2. Si las empresas compiten al estilo Stackelberg y la empresa j es la única líder, encuentre la producción y los precios de mercado; así como la cantidad que produce cada empresa.
$\rightarrow$ **Forma 1:**
Seguidora $\forall k \neq L$

$$\pi_k = (a - \sum_{i=1}^{N} q_i)q_k - kq_k \Rightarrow \pi_k = (a - q_L - q_k - \sum_{i \neq L,k} q_i)q_k - kq_k$$

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_k} = a - q_L - 2q_k - \sum_{i \neq L,k} q_i - k = 0 \Rightarrow a - q_L - q_k - \sum_{i \neq L} q_i - k = 0$$

Sumando sobre todas las seguidoras:

$$(n-1)a - (n-1)q_L - \sum_{i \neq L} q_i - (n-1)\sum_{i \neq L} q_i - \frac{n(n+1)}{2} + L = 0 \Rightarrow \sum_{i \neq L} q_i = \frac{(n-1)a}{n} - \frac{(n-1)}{n}q_L - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}$$

Líder:

$$\pi_L = \left(a - q_L - \frac{(n-1)a}{n} + \frac{(n-1)}{n}q_L + \frac{(n+1)}{2} - \frac{L}{n}\right) q_L - Lq_L$$
$$= \left[\frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{(n+1)}{2} - \frac{L}{n}\right] q_L - Lq_L$$

FOC:

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} = \frac{a}{n} - \frac{2q_L}{n} + \frac{(n+1)}{2} - \frac{L}{n} - L = 0 \Rightarrow q_L = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{L}{2}(n+1)$$

Producción total:

$$\sum_{i \neq L} q_i = \frac{(n-1)a}{n} - q_L + \frac{1}{n}q_L - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n} \Rightarrow Q = \frac{(n-1)a}{n} + \frac{1}{n}q_L - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}$$

$$Q = \frac{(n-1)a}{n} + \frac{a}{2n} + \frac{n(n+1)}{4n} - \frac{L(n+1)}{2n} - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}$$

$$\Rightarrow P = a - Q = a - \left(\frac{(n-1)a}{n} + \frac{a}{2n} + \frac{n(n+1)}{4n} - \frac{L(n+1)}{2n} - \frac{(n+1)}{2} + \frac{L}{n}\right)$$

Forma 2:
Seguidora:

$$\pi_k = (a - \sum_{i=1}^{N} q_i)q_k - kq_k = (a - q_L - q_k - \sum_{i \neq L,k} q_i)q_k - kq_k$$

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial q_k} = a - q_L - 2q_k - \sum_{i \neq L,k} q_i - k = 0$$

$$\Rightarrow a - q_L - q_k - \sum_{i \neq L} q_i - k = 0 \quad \text{(de aquí también se deduce que } q_i = q_k + k - i\text{)}$$

$$\Rightarrow a - q_L - q_k - \sum_{i \neq L}(q_k + k - i) - k = 0 \Rightarrow a - q_L - nq_k + \sum_{i \neq L} i - k = 0 \Rightarrow nq_k = a - q_L - nk + \sum_{i \neq L} i$$

$$\Rightarrow q_k = \frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i \neq L} i - k$$

Líder:

$$\pi_L = \left(a - q_L - \sum_{i \neq L} q_i\right) q_L - Lq_L \Rightarrow \pi_L = \left(a - q_L - \sum_{i \neq L}\left(\frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j \neq L} j - i\right)\right) q_L - Lq_L$$

$$\Rightarrow \pi_L = \left(\frac{a}{n} - \frac{q_L}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j \neq L} j\right) q_L - Lq_L \Rightarrow \frac{\partial \pi_L}{\partial q_L} = \frac{a}{n} - \frac{2q_L}{n} + \frac{1}{n}\sum_{j \neq L} j - L = 0$$

$$\Rightarrow q_L = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{nL}{2}$$

$$q_k = \frac{a}{n} - \frac{a}{2n} - \frac{(n+1)}{4} + \frac{L}{n} + \frac{L}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i\neq L} i - k$$

$$Q = \frac{a}{2} + \frac{n(n+1)}{4} - \frac{L}{n} - \frac{nL}{2} + \sum_{k\neq L}^{n}\left(\frac{a}{n} - \frac{a}{2n} - \frac{(n+1)}{4} + \frac{L}{n} + \frac{L}{2} + \frac{1}{n}\sum_{i\neq L} i - k\right)$$

Ejercicio 99 [Competencia por precios y liderazgo[12]]. En un mercado, n empresas compiten por precio y tienen un producto diferenciado. Cada una de las empresas se enfrenta a la siguiente curva directa de demanda:

$$q_i = A - bP_i + d\sum_{j\neq i}^{n} P_j$$

Existe una empresa que es líder y $n-1$ empresas seguidoras. La empresa líder tiene un costo marginal constante e igual a c y las empresas seguidoras tienen un costo marginal nulo (cero).

1. Encuentre el equilibrio en precios y cantidades si todas las empresas compiten simultáneamente por precios. $\rightarrow$
Simultáneo (todas compiten al mismo tiempo por precios):

$$\max_{P_j}\left\{P_j\left(A - bP_j + d\sum_{k\neq j} P_k\right) - c\left(A - bP_j + d\sum_{k\neq j} P_k\right)\right\}$$
$$\Rightarrow A - 2bP_j + d\sum_{k\neq j} P_k + cb = 0$$

$$\max_{P_k}\left\{P_k\left(A - bP_k + d\sum_{h\neq k} P_h\right)\right\} \quad \forall k\neq j$$
$$\Rightarrow A - 2bP_k + d\sum_{h\neq k} P_h = 0 \Rightarrow P_k = P_i \quad \forall i,k\neq j$$

Por lo tanto: $A - 2bP_k + d(n-2)P_k + dP_j = 0$
Y también: $A - 2bP_j + d(n-1)P_k + cb = 0$

De la primera: $-2bP_k + d(n-2)P_k + dP_j = -2bP_j + d(n-1)P_k + cb$
$$\Rightarrow -P_k(2b-d) = -P_j(2b+d) + cb \Rightarrow P_k = P_j - \frac{cb}{2b+d}$$

Sustituyendo en la segunda:
$$A - 2bP_j + d(n-1)\left(P_j - \frac{cb}{2b+d}\right) + cb = 0$$
$$\Rightarrow A + P_j\left[-2b + d(n-1)\right] - d(n-1)\frac{cb}{2b+d} + cb = 0$$

$$\Rightarrow P_j = \frac{A - d(n-1)\frac{cb}{2b+d} + cb}{2b - d(n-1)}$$
$$\Rightarrow P_k = \left[\frac{1}{2b-d(n-1)}\right]\left[A - d(n-1)\frac{cb}{2b+d} + cb\right] - \frac{cb}{2b+d}$$

[12] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

2. Encuentre el equilibrio en precios y cantidades si compiten secuencialmente por precios.
$\rightarrow$
Secuencial (empresa líder y seguidoras):
Seguidores:

$$\pi_i = P_i\left(A - bP_i + dP_j + d\sum_{k\neq i,j} P_k\right)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial P_i} = A + dP_j + d\sum_{k\neq i,j} P_k - 2bP_i = 0 \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial P_k} = A + dP_j + d\sum_{k\neq i,j} P_k - 2bP_k = 0$$

$$\Rightarrow d\sum_{k\neq j} P_k - 2bP_i + dP_j = d\sum_{k\neq j} P_k - 2bP_k + dP_j \Rightarrow P_i = P_k \quad \forall i \neq j,\ k \neq j$$

$$\Rightarrow A + dP_j + d(n-2)P_i - 2bP_i = 0 \Rightarrow P_i = \frac{A + dP_j}{2b - d(n-2)}$$

Líder:

$$\pi_j = P_j\left(A - bP_j + d(n-1)\cdot\frac{A + dP_j}{2b - d(n-2)}\right) - c\left(A - bP_j + d(n-1)\cdot\frac{A + dP_j}{2b - d(n-2)}\right)$$

Desarrollando:

$$\pi_j = AP_j - bP_j^2 + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j + \frac{d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j^2 - cA + cbP_j - \frac{cAd(n-1)}{2b-d(n-2)} - \frac{cd^2(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial P_j} = A - 2bP_j + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)} + \frac{2d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}P_j + cb - \frac{cd^2(n-1)}{2b-d(n-2)} = 0$$

$$\Rightarrow 2P_j\left(b - \frac{d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}\right) = A + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)} + cb - \frac{cd^2(n-1)}{2b-d(n-2)}$$

$$\Rightarrow P_j = \frac{1}{2\left(b - \frac{d^2(n-1)}{2b-d(n-2)}\right)}\left[A + \frac{Ad(n-1)}{2b-d(n-2)} + cb - \frac{cd^2(n-1)}{2b-d(n-2)}\right]$$

$$\Rightarrow P_i = \frac{A}{2b-d(n-2)} + \frac{d}{2b-d(n-2)}\cdot P_j$$

Finalmente:
Para encontrar las cantidades, basta con sustituir los valores de P_j y P_i en sus respectivas funciones de demanda:

$$q_j = A - bP_j + d\sum_{k\neq j} P_k, \qquad q_i = A - bP_i + dP_j + d\sum_{k\neq i,j} P_k$$

18.4. Cartel

Parte III

Equilibrio General

[13] Un equilibrio general es aquel en donde todos los precios son variables, y para que haya equilibrio deben de vaciarse todos los mercados, y en particular, se toman en cuenta las relaciones entre todos los mercados, en contraste a solo examinar uno a la vez.

Es por esta razón que ahora se dará el paso a estudiar la interacción de varios mercados entre sí y el impacto que esto tiene en la economía como un todo.

Es importante en este momento citar la obra de Arrow y Debreu[15], quienes demostraron que, bajo ciertas condiciones (preferencias convexas, competencia perfecta e independencia de demandas), debe existir un conjunto o sistema de precios bajo las cuales, la demanda agregada total ha de igualar o ser igual a la oferta agregada para cada una de las mercanciás en la economía. Es importante no trivializar dicho acontecimiento, puesto que según no pocos economistas, este es un acontecimiento que ha revolucionado a la economía como ciencia.

Arrow y Debreu generalizaron y formalizaron las ideas que habían sido anteriormente propuestas por Leon Walras, quien había llegado a la misma conclusión pero por medios menos rigurosos. Walras señaló que si en una economía existían n mercados, con n funciones de demanda y n funciones de oferta, si $n-1$ mercados estaban en equilibrio, necesariamente el $n-\acute{e}simo$ mercado también debía estarlo. Nótese que el razonamiento de Walras fue muy similar a la idea del álgebra lineal, en el cual *"si se tienen n ecuaciones y n variables, debe haber una única solución al sistema de ecuaciones lineales*. Sin embargo, este primer acercamiento de Walras permitió sentar las bases de los *teoremas del bienestar*.

Arrow y Debreu en 1954 formalizaron y demostraron de manera más rigurosa esta intuición y planteamiento de Walras, de manera que al equilibrio general se le suele conocer como *equilibrio Walrasiano*[16].

Un primer acercamiento al tema del equilibrio general, es estudiar un escenario en el cual todos los agentes son consumidores, por lo que entonces inicialmente no habrá producción en este escenario y se hará uso de un elemento muy importante en la economía: las dotaciones.

[13] Véase Varian, 1992[14]

[15] Véase Arrow y Debreu, 1954

[16] Lectura recomendada: Geanakoplos, John. “Kenneth Arrow’s Contributions to General Equilibrium.” https://www.econometricsociety.org/sites/default/files/inmemoriam/arrow$_{geanakoplos.pdf}$.

Capítulo 19

Equilibrio general de mercado

En un análisis de equilibrio parcial, se toma en consideración un mercado en aislado, en el cual no se toman en consideración fuerzas externas que puedan incidir sobre el por medio de lo que pase en otros mercados. Así, es más realista considerar que en en la realidad ningún mercado opera en abstracto, sino que por lo general los mercados suelen estar interrelacionados unos entre otros, de manera que lo que ocurra en alguno, generalmente puede terminar influyendo en otros. Por tanto, si se quiere generalizar el análisis para contemplar todas estas influencias, es necesario ampliar la estructura del modelo de un mercado aislado.

En el caso de un mercado aislado, la condición de equilibrio era una única ecuación que planteaba que $Q_s = Q_d$, es decir, que en el equilibrio se ha de cumplir que la cantidad demandada sea igual a la cantidad ofrecida, lo cual en última instancia conllevaba también a que el precio de equilibrio de mercado fuese el mismo tanto para la oferta como para la demanda. De esta manera, podría replantearse la condición de equlibrio de mercado como sigue $\boxed{\mathrm{E} \equiv Q_d - Q_s = 0}$.

Esta última expresión da origen al concepto de exceso de demanda. En un mercado aislado, para que haya equilibrio, tiene que ser que el exceso de demanda sea igual a cero, o sea, que la cantidad demandada sea igual a la cantidad ofrecida. Así, en ese mercado se estarían agotando todas las posibles transacciones.

¿Ahora, qué pasaría en el caso que hubiesen múltiples mercados simultáneamente? Bueno pues el análisis es similar: en un escenario con múltiples mercados interrelacionados entre sí simultáneamente, para que haya equilibrio general en todos los mercados simultáneamente, será necesario que el exceso de demanda en cada uno de los mercados sea igual a cero. En el entretanto que haya un mercado cuyo exceso de demanda no sea cero, el ajuste de precios necesario para que dicho mercado llegue al equilibrio, terminará influyendo sobre las cantidades ofrecidas y demandadas en los otros mercados, ocasionando así cambios en los respectivos precios de cada mercado.

Por tanto, el equilibrio general en n mercados se garantiza mediante la siguiente condición:

$$E_i \equiv Q_{di} - Q_{si} = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots, n \tag{19.1}$$

19.1. El caso de dos mercados

S

19.2. El caso de n mercados

Capítulo 20

Ley de Walras

La ley de Walras es un intento de respuesta a la pregunta: ***¿existirá siempre un vector de precios en el que se vacíen todos los mercados?***

En primer lugar, es vital tomar en cuenta un hecho importante: la función de demanda $\vec{X}_i(\vec{P}, \vec{P}\vec{w}_i)$ es homogénea de grado 0 en los precios. Esto significa que, si todos los precios son multiplicados por una constante positiva k cualquiera, el conjunto presupuestario del consumidor no cambiará. Matemáticamente esto significa que $\vec{X}_i(\vec{P}, \vec{P}\vec{w}_i) = \vec{X}_i(k\vec{P}, k\vec{P}\vec{w}_i)$ para $k > 0$ cualquiera.

Ahora, obsérvese que a la hora de introducir un sistema de precios a esta determinada economía, tácitamente se está imponiendo una restricción presupuestaria a cada agente, la cual se puede plantear de la siguiente manera para la persona consumidora i:

$$p_1(x_i^1 - w_i^1) + p_2(x_i^2 - w_i^2) + ... + p_n(x_i^n - w_i^n) = 0 \tag{20.1}$$

A partir de esta restricción presupuestaria planteada, es que entonces existe la posibilidad de que, dado un cierto sistema de precios $\vec{P}$, es posible que no necesariamente la persona consumidora consuma para todos sus bienes, las dotaciones iniciales de las que dispone, por lo que a partir de este punto es que esta persona se puede configurar como un oferente o demandante neto, punto a partir del cual surgiría el interés o la necesidad por acudir al mercado a intercambiar.

Sin embargo, el equilibrio competitivo general o equilibrio walrasiano, lo que exige es que en suma, al final todas esas demandas y ofertas netas sean iguales entre sí, de manera que se agoten todas las dotaciones sean agotadas. Es así que entonces esto explica el por qué dicha restricción presupuestaria está igualada a cero. Es decir que si la persona consumidora no consume exactamente sus dotaciones iniciales para cada uno de los bienes o por el contrario, desea más de algún bien de lo que dispone en su dotación, debe ser que acudiendo al mercado, y ya sea vendiendo o comprando bienes, salde su demanda neta y se iguale a 0, de manera que en ningún momento se excedan las capacidades dotacionales de la economía.

Entonces, retomando las funciones de demanda para cada bien individual, si las funciones de demanda somo homogéneas de grado 0 en precios, la función de demanda neta también ha de ser homogénea de grado 0 en precios, dado que es la suma de las demandas de cada uno de los bienes individuales.

Entonces, una función de demanda neta z, para un agente i, se puede expresar de la siguiente manera:

$$z(p) = \sum_{i=1}^{n}[x_i(\vec{P}, \vec{P}\vec{w}_i) - \vec{w}_i] \tag{20.2}$$

Si todas las funciones de demanda son continuas, $z(p)$ también ha de ser una función continua. Aquí es donde se dice que la función de demanda neta, debe satisfacer la ley de Walras:

Definición 37. Ley de Walras Dado cualquier $\vec{P}$ perteneciente a S^{n-1}, se tiene que $pz(p) = 0$; es decir, que el valor de la demanda neta es 0.

Demostración.

$$pz(p) = p[\sum_{i=1}^{n} x_i(\vec{P}, \vec{P}\vec{w}_i) - \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i] \tag{20.3}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n}[px_i(\vec{P}, \vec{P}\vec{w}_i) - p\vec{w}_i] \tag{20.4}$$

□

Entonces, a partir de la ley de Walras y la definición del equilibrio Walrasiano, entonces se obtienen los siguientes corolarios:

- **Si la demanda es igual a la oferta** $n-1$ **mercados y** $p_n > 0$**, la demanda debe ser igual a la oferta en el** $n - \acute{e}simo$ **mercado. De lo contrario, se trasgredería la ley de Walras.**
- **Si es un equilibrio walrasiano y** $z_j(\vec{P}*) < 0, p_j* = 0$**. Es decir, si hay un exceso de oferta de algún bien, en un equilibrio walrasiano, debe ser un bien gratuito.**

Por lo tanto, a manera de resumen, lo necesario para que pueda existir equilibrio es que no hayan demandas netas distintas a 0 para ningún bien de la econonmía, y si, en efecto hay un exceso de demanda neta para algún bien, debe ser que su precio sea 0. Por lo tanto, si todos los bienes tienen una cierta deseabilidad en el sentido de que un precio de 0 implicaría un exceso de demanda neta, no equilibrio vendría caracterizado por la igualdad de la oferta y la demanda en todos los mercados.

Capítulo 21

Primer y segundo teorema del bienestar

Definición 38 [Primer teorema del bienestar]. La asignación de recusos alcanzada mediante el equilibrio competitivo general (equilibrio walrasiano) es óptima en el sentido de Pareto, o en otras palabras, pareto-óptima.

Esto también se puede analizar introduciendo la figura de un planificador social benevolente. Si este planificador (es decir, un medio centralizado de asignación y distribución de los recursos) quisiera disponer de la distribución de los recursos en la economía y tuviera que maximizar la utilidad de un agente representantivo de esta economía, llegaría exactamente al mismo resultado de asignación y sistema de precios al cual se ha llegado por medio de un medio descentralizado.

Algo muy importante a denotar de este primer teorema es que: **todo equilibrio competitivo general es óptimo de Pareto, mas no todo óptimo de Pareto es, necesariamente, un equilibrio competitivo general.**

Note que este primer teorema es algo limitado: si bien es cierto que por medio de un equilibrio competitivo general se puede alcanzar un óptimo de Pareto, no necesariamente esta asignación es la única que logre alcanzar un óptimo de Pareto.

Definición 39 [Segundo teorema del bienestar]. Todo óptimo de Pareto puede ser alcanzado mediante un determinado sistema de precios.

Este segundo teorema indica que, dado un sistema de precios, una asignación pareto-óptima (que no sea un equilibrio competitivo general) puede alcanzar a ser una asignación del equilibrio competitivo general mediante una adecuada redistribución.

Ejercicio 100 [Impuestos y costos en el bienestar[1]]. El individuo representativo de una economía tiene una función de utilidad representada por

$$U = \prod_{i=1}^{n} x_i^i$$

El costo marginal de producción de cada bien es constante e igual a 1 y el individuo tiene un ingreso igual a 100. Si el gobierno establece un impuesto unitario igual a i (o sea, 1 para el bien 1, 2 para el bien 2, 3 para el bien 3, etc.).

1. Determine el costo en bienestar en un modelo de equilibrio general para esta economía si la economía consiste en n bienes.

→ Primero se encuentra la relación óptima entre los bienes y se evalúa en la función de utilidad:

[1] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TMS}_{j,k} &= \frac{jx_k}{kx_j} = \frac{p_j}{p_k} \\
\Rightarrow x_k &= \left(\frac{p_j \cdot k}{p_k \cdot j}\right) x_j \\
U &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_j \cdot k}{p_k \cdot j} x_j\right)^k \\
u &= \left(\frac{p_j}{j} x_j\right)^{\sum_{k=1}^{n} k} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{p_k}\right)^k \\
x_j &= \frac{j}{p_j} \left[u \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k}\right)^{\frac{1}{n(n+1)/2}}\right]^{\frac{2}{n(n+1)}} \\
x_j &= \frac{j}{p_j} \left[u^{\frac{2}{n(n+1)}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}}\right] \\
x_j &= \frac{j}{p_j} \left[u^{\frac{2}{n(n+1)}} \left(\frac{p_j}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)}} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}}\right] \\
x_j &= \left(\frac{p_i}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)}-1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}}
\end{aligned}
$$

Y el costo en bienestar sería:

$$
\begin{aligned}
CB &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \gamma_i \gamma_j\right) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} s_{jj} \gamma_j^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \gamma_i \gamma_j\right] \\
s_{jj} &= \left(\frac{2j}{n(n+1)} - 1\right) \left(\frac{p_j}{j}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{j} \left(\frac{p_j}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)}-1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{jj} &= \left(\frac{2j}{n(n+1)} - 1\right) p_j^{-1} x_j^h \\
x_j &= \left(\frac{p_i}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)}-1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}} \\
s_{ji} &= \frac{2i}{n(n+1)} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}-1} \left(\frac{p_i}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)}-1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}} \\
s_{ji} &= \frac{2i}{n(n+1)} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{-1} \left(\frac{p_i}{j}\right)^{\frac{2j}{n(n+1)}-1} u^{\frac{2}{n(n+1)}} \left(\frac{p_i}{i}\right)^{\frac{2i}{n(n+1)}} \prod_{k \neq j,i} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{\frac{2k}{n(n+1)}} \\
s_{ji} &= \frac{2i}{n(n+1)} p_i^{-1} x_j^h \\
s_{ji} &= \frac{2j}{n(n+1)} p_j^{-1} x_i^h \\
CB &= -\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2j}{n(n+1)} - 1\right) p_j^{-1} x_j^h j^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{j=1}^{n} \frac{2j}{n(n+1)} p_j^{-1} x_i^h ij\right]
\end{aligned}
$$

Ejercicio 101 [Costo en bienestar de un impuesto en una economía con n bienes[2]]. El individuo representativo de una economía tiene una función de utilidad representada por

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 - \frac{1}{\prod_{i=2}^{n} x_i}$$

El costo marginal de producción de cada bien es constante e igual a 1. Si el gobierno establece un impuesto unitario igual a i (o sea, 1 para el bien 1, 2 para el bien 2, 3 para el bien 3, etc.).

1. Determine el costo en bienestar en un modelo de equilibrio general para esta economía si la economía consiste en n bienes.

$$\text{TMS}_{i,j} = \prod_{i=2}^{n} x_i^{-2} \Bigg/ \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i^{-2} = \frac{1}{x_j^2} \cdot \prod_{\substack{i=2 \\ i\neq j}}^{n} x_i^{-1} = x_j \prod_{i=2}^{n} x_i = \frac{p_i}{p_j} \quad \{\text{Combinando}\}$$

$$\text{TMS}_{j,k} = \frac{x_k \prod_{i=2}^{n} x_i}{x_j \prod_{i=2}^{n} x_i} = \frac{p_j}{p_k} \Rightarrow x_k = \frac{p_j}{p_k} x_j$$

$$\begin{aligned}
x_j \prod_{i=2}^{n} x_i &= \frac{p_i}{p_j} \\
\Rightarrow p_j^{n-1} x_j^n \prod_{i=2}^{n} p_i^{-1} &= \frac{p_i}{p_j} \Rightarrow p_j^n x_j^n = p_i \prod_{i=2}^{n} p_i \\
\Rightarrow x_j &= \frac{p_i^{1/n} \prod_{i=2}^{n} p_i^{1/n}}{p_j} \Rightarrow x_j = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U &= x_1 - \frac{1}{\prod_{j=2}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_j}} \Rightarrow u = x_1 - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n} \cdot \prod_{j=2}^{n} p_j^{-1}} \\
\Rightarrow u &= x_1 - \frac{1}{p_1^{1/n} \prod_{i=2}^{n} p_i^{1/n-1}} = x_1 - \frac{\prod_{i=2}^{n} p_i^{1/n}}{p_1^{1/n}} \\
\Rightarrow x_1 &= u + \frac{\prod_{i=2}^{n} p_i^{1/n}}{p_1^{1/n}} = u + \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_1}
\end{aligned}$$

$$x_1 = u + \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_1} \quad \wedge \quad x_j = \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_j}$$

$$\begin{aligned}
CB &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \gamma_i \gamma_j \\
&= -\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n} s_{jj} \gamma_j^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \gamma_i \gamma_j \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[s_{11} \gamma_1^2 + \sum_{j=2}^{n} s_{1j} \gamma_1 \gamma_j + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \gamma_i \gamma_j \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left[s_{11} \gamma_1^2 + \sum_{j=2}^{n} s_{1j} \gamma_1 \gamma_j + \sum_{i=2}^{n} s_{ii} \gamma_i^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j\neq i} s_{ij} \gamma_i \gamma_j \right]
\end{aligned}$$

[2] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

$$
\begin{aligned}
s_{11} &= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_1^2}, \\
s_{jj} &= \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot \frac{x_j}{p_j}, \\
s_{ij} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_i p_j}, \\
s_{ji} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{x_i}{p_i}
\end{aligned}
$$

$$
CB = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_1^2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{1/n}}{p_j p_1} \cdot j + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdot \frac{x_i}{p_i} \cdot i^2 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{1}{n} \cdot \frac{x_i}{p_i} \cdot ij\right]
$$

Capítulo 22

Una economía de intercambio

22.1. Caja de Edgeworth

Suponga que en esta economía existen mercancías, pero en particular, bienes. Además, en esta economía tiene sus preferencias y su respectiva función de utilidad que representa esas preferencias, y cada consumidor parte de una dotación inicial de las mercanciías de esta economía. Otro supuesto importante a tener en cuenta (que fue tomado en cuenta por Arrow y Debreu) es que dichas personas consumidoras son tomadoras de precios, esto es, se comportan competitivamente, e independientemente de sus conductas y acciones, no pueden incidir en el precio de las mercanciías.

La cuestión central en el análisis de equilibrio general es estudiar cómo se distribuyen o asignan los bienes a los agentes que intervienen en esta economía. Entonces, suponga una economía con n agentes, y en particular, el agente i, tiene una cesta o conjunto de consumo $x_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n)$, en donde x_i^j, representa la cantidad consumida del bien j. Por lo tanto, una asignación (*"allocation"*) es un vector o conjunto de la forma $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ con n entradas que indica lo que se tiene de cada uno de los bienes de la economía.

Es importante estudiar el concepto de viabilidad (*"feasibility"*), que se refiere a la posibilidad física a la que están sujetas las potenciales asignaciones en esta economía. En particular, dado que se está hablando de una economía de intercambio puro, sería una asignación que, en suma, no exceda las cantidades de los bienes de los que está dotada la economía, esto es, que no exceda las dotaciones.

Supóngase que en esta economía de n bienes, las personas consumidoras disponen de una cierta cantidad de dotaciones que les son dadas de manera exógena (esto es, que parten con estas dotaciones, no es de interés en este momento explicar cómo llegan a poseer dichas dotaciones). Por lo tanto, El consumidor i dispone de una serie de preferencias $\succcurlyeq_i$ las cuales se encuentran representadas por una función de utilidad u_i, y una dotación de los n bienes w_i.

Por lo tanto, una asignación es viable si: $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$, pero en particular, será de interés el caso concreto en que todas las dotaciones de la economía, son aprovechadas, por lo que entonces, un caso especial de una economía que emplea todas sus dotaciones, es: $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$.

Ahora, para el caso concreto en que en la economía se trancen dos bienes y existan únicamente dos agentes, existe un instrumental gráfico que asistirá al análisis del equilibrio general: ***la caja de Edgeworth***.

Suponiendo que existen dos agentes: 1 y 2, y que además existen sólo dos bienes: 1 y 2, una caja de Edgeworth con dos consumidores (1 y 2), cuyas dotaciones respectivamente son w_1^1, w_1^2 para el consumidor 1 y w_2^1, w_2^2 para el consumidor 2, se ve de la siguiente manera:

Note que para el caso particular se ha colocado al bien x_1 en el eje horizontal y al bien x_2 en el eje vertical (convencionalmente se suele hacer así), de manera que las dimensiones de la caja corresponden a las dotaciones totales disponibles en la economía de cada uno de los bienes en cuestión. Por ejemplo, dado que el bien 1 se encuentra en el eje horizontal, entonces la dimensión de ese lado de la caja ha de ser: $w_1^1 + w_1^2 = w_T^1$. Es decir, que el lado horizontal de la caja ha de corresponder con la cantidad de la dotación total de la economía de ese bien.

Análogamente, para el bien x_2, el cual se encuentra representado en el eje o lado vertical de la caja, debe ser que ese lado tenga de dimensión: $w_2^1 + w_2^2 = w_T^2$. Es decir, que ese lado ha de corresponder también con la dotación total de la economía del bien x_2.

Note que si las cantidades de las dotaciones totales coinciden o son iguales, ambos lados de la caja serán

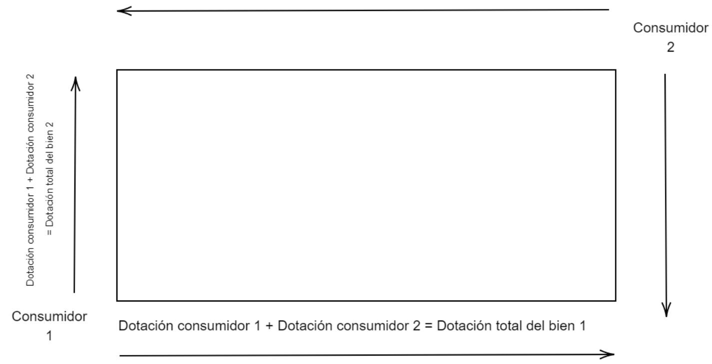


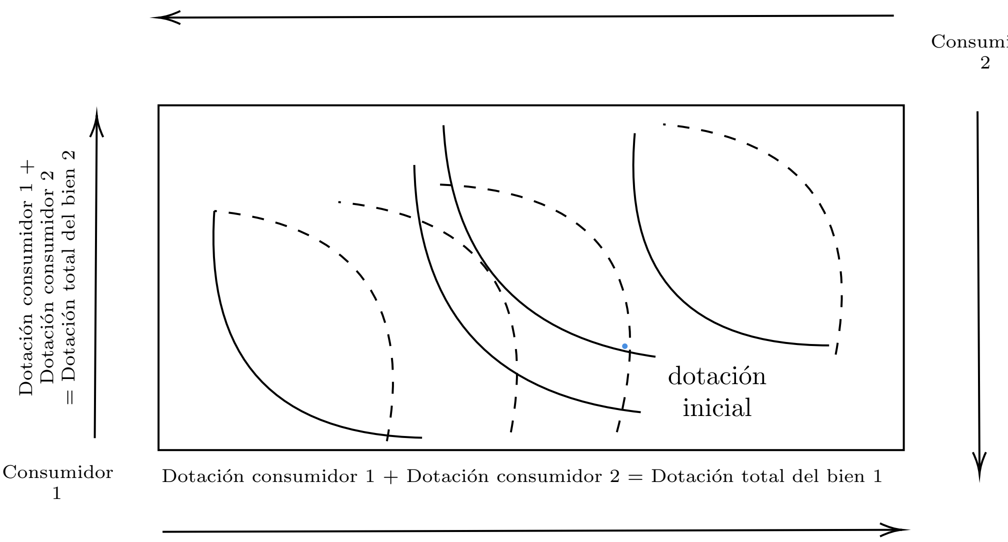
Figura 22.1: Una caja de Edgeworth

iguales, de manera que la caja tendrá forma cuadrada, pero si las cantidades de las dotaciones totales no coincidan, entonces los lados de la caja tendrán dimensiones distintas, de forma que la caja será rectangular.

A partir de esta formación de la caja, se pueden ubicar las posiciones iniciales de cada agente o consumidor gracias a sus dotaciones. De manera que cualquier punto dentro de la caja, representa, a la vez, la posición inicial del agente 1 y el agente 2, puesto que en esta economía se cumple el caso particular de viabilidad en el que se agotan todas las dotaciones. Es así que dada la posición inicial de una persona consumidora gracias a sus dotaciones, denota que la otra persona consumidora consume lo restante en todos los bienes (en este caso 2) que no tenga el primer consumidor.

Para poder ubicar geométricamente la posición de los consumidores en esta economía (caja), entonces tómese en consideración lo siguiente: el conjunto de consumo inicial del consumidor 1 dado a partir de su dotación inicial se ubica partiendo de la esquina inferior izquierda, mientras que la de la persona consumidora 2, se mide iniciando a partir de la esquina superior derecha. Es así que entonces, mediante un simple punto inicial en esta caja, se pueden representar todas y cada una de las asignaciones viables de los dos bienes en esta economía.

Es a partir de este punto, que ya habiendo sido introducida la figura de la caja de Edgeworth, que en la caja se pueden empezar a hacer curvas de indiferencia que correspondan a cada uno de los agentes. Es así que para el consumidor 1, cuya posición inicial se contabilizar en la esquiza inferior izquierda, moverse hacia arriba y hacia la derecha implica tener más de ambos bienes, pero para la persona consumidora 2, moverse hacia la izquierda y hacia abajo, es tener más de ambos bienes.



Entonces, volviendo a generalizar el análisis a n consumidores con n bienes, se procede a indicar que, naturalmente, cada uno de esos bienes tiene un precio (aunque como en estas economías no existe el dinero técnicamente, suponga la figura de una especie de subastador neutral que entra al mercado a proponer precios a los agentes, y ofrece relaciones de precios hasta encontrar agentes que estén de acuerdo en tranzar o comerciar sus dotaciones iniciales a esa relación de precios), y por tanto se obtiene un vector de precios de los bienes $\vec{P} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. Es importante recordar que estos precios no son particulares para cada individuo, sino que están dados, y por ende, todas las personas se comportan competitivamente, porque sus conductas no tienen incidencia en los precios de la economía.

Es así que, dado que cada persona tiene, análogamente, un vector de dotaciones iniciales de la forma $\vec{w}_i = (w_i^1, w_i^2, ..., w_i^n)$ para una persona consumidora i cualquiera. Por tanto, esta persona consumidora i se enfrenta a un problema particular de maximización de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \max_{\vec{X}} \quad & u(\vec{X}) \\ \text{sujeto a} \quad & \vec{P} \cdot \vec{X} = \vec{P} \cdot \vec{w}_i \end{aligned} \tag{22.1}$$

Note que este es un problema de maximización de los ya conocidos anteriormente, de manera que la solución a este problema es encontrar las demandas $x_i(\vec{P}, \vec{P}\vec{w}_i)$, sin embargo, en los problemas inicialmente planteados, la restricción presupuestaria estaba planteada en términos de un ingreso m consistente de una cierta cantidad de dinero, pero ahora, dado que no existe ni el dinero, ni la producción, y se está hablando de dotaciones y términos reales, la restricción se plantea en términos de dotaciones y no de un ingreso.

En otras palabras, el nuevo ingreso para este tipo de problemas es de la forma: $m_i = \vec{P}\vec{w}_i$. A partir de aquí, se define un equilibrio Walrasiano de la siguiente manera:

Definición 40. Equilibrio Walrasiano Defínase un equilibrio Walrasiano como un conjunto de vectores (una asignación) de la forma $(\vec{P}*, \vec{X}*)$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(\vec{P}, \vec{P}\vec{w}_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i \tag{22.2}$$

Entonces, el **equilibrio walrasiano o equilibrio competitivo general** es un sistema de precios $\vec{P}*$ y una asignación de cantidades de consumidas dadas las funciones de demanda óptimas para cada agente $\vec{X}_i = (x_i^1*, x_2^i*, ..., x_i^n*)$ para cada uno de los agentes que satisfaga que:

1. Las cantidades totales asignadas de cada bien son las que cada consumidor querría comprar a los precios vigentes.

2. La suma de las cantidades totales de la economía coincida con la de las dotaciones (se vacían los mercados, esto es, no se desperdician o no quedan sin usar dotaciones).

Ejemplo 49 [Cajas de Edgeworth básicas]. Considere una economía con dos individuos, A y B, y en la cual existen dos bienes: x e y. Grafique una caja de Edgeworth para las siguientes funciones de utilidad:

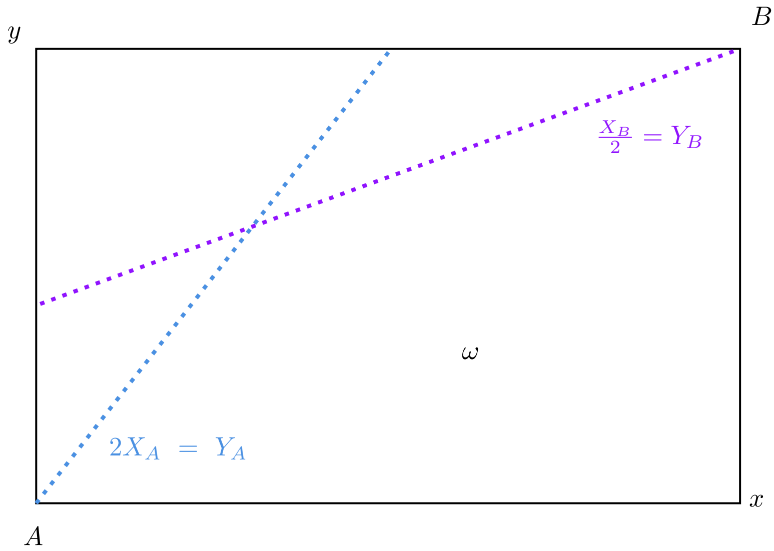
- Complementos perfectos

$$\begin{aligned} U_A &= \min(2X_A, Y_A) \\ U_B &= \min(X_B, 2Y_B) \end{aligned}$$

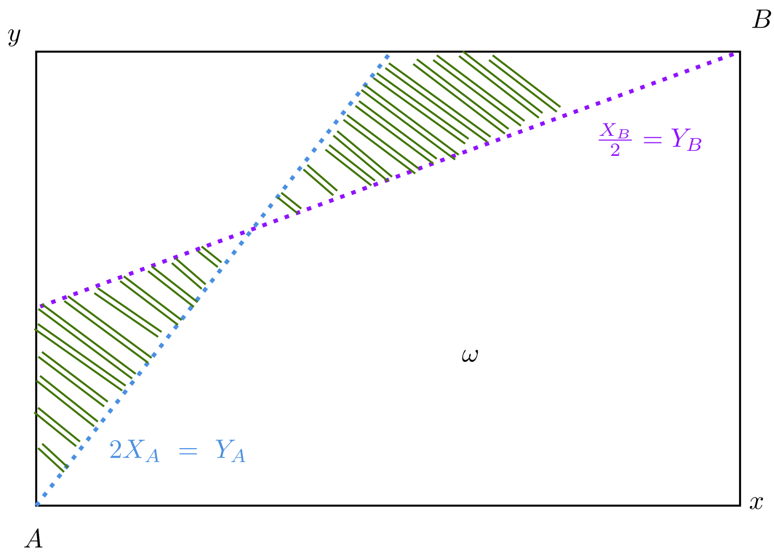
En las funciones de Leontieff siempre se igualan los argumentos dentro de la función:

$$\begin{aligned} 2X_A &= Y_A \\ X_B = 2Y_B \Leftrightarrow \frac{X_B}{2} &= Y_B \end{aligned}$$

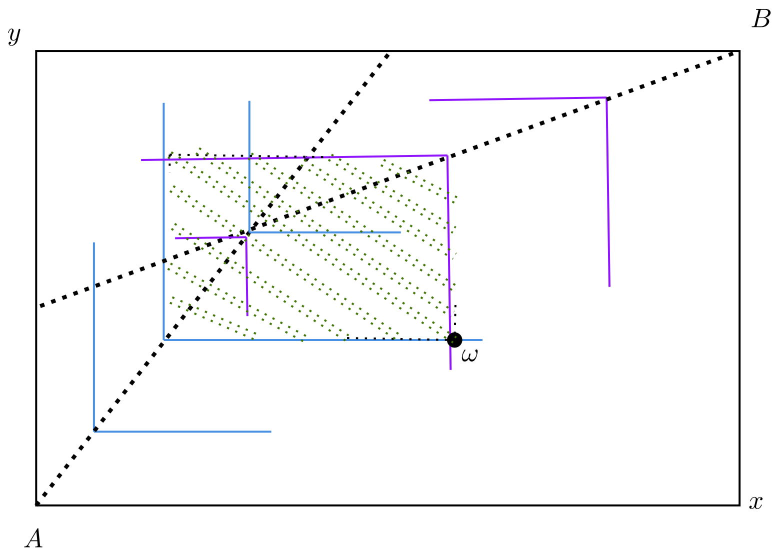
Por lo cual, en la caja de Edgeworth lo primero a graficar serían los rayos o sendas de expansión de ambas funciones:



Dado que la utilidad crece a medida que las curvas de indiferencia se alejan de su respectivo origen, se puede enmarcar la zona de contrato:



En esta caja, ω es un par ordenado cualquiera (x_A, y_A) o (x_B, y_B) que indica las dotaciones iniciales de los agentes. A partir de esa información, se pueden dibujar unas cuantas curvas de indiferencia que representen las preferencias para cada uno de los agentes.

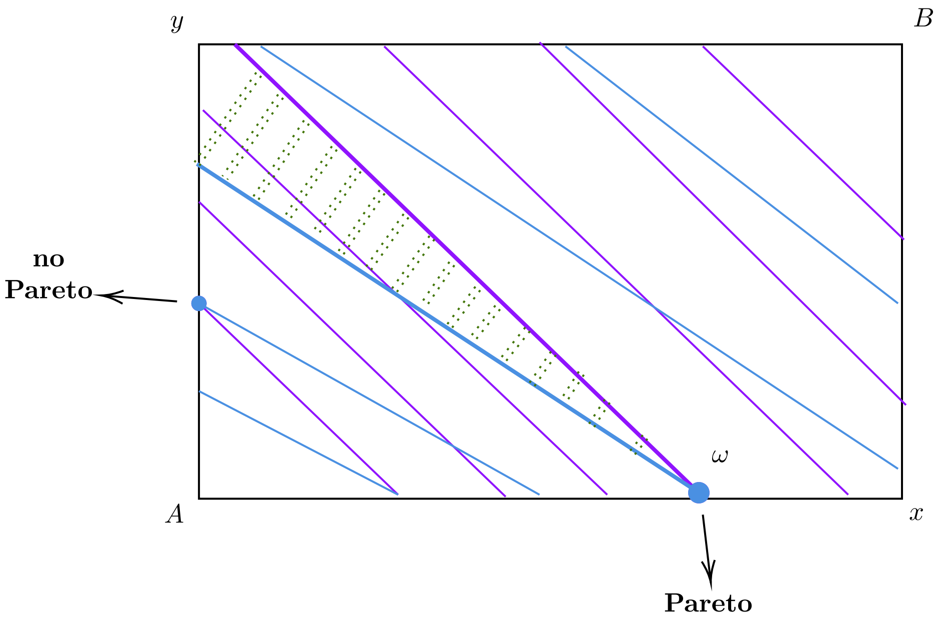


La zona coloreada en verde es la zona de contrato, y todos esos puntos son óptimos de Pareto. Dado que la zona de dotación inicial ω es tal, las rayas verdes son la zona de comercio.

- Sustitutos perfectos

$$U_A = X_A + 2Y_A$$
$$U_B = 2X_B + Y_B$$

La caja de Edgeworth se vería así:



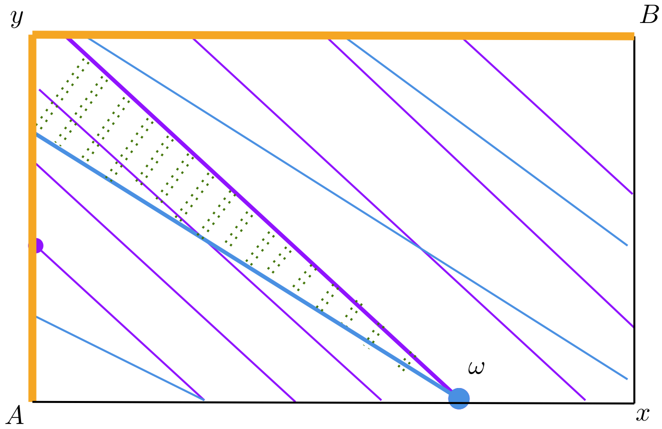
En este caso, si el punto de dotación inicial fuese ω, la curva de contrato sería la zona coloreada en verde.

En los casos de las funciones de utilidad de bienes sustitutos, siempre es importante observar la pendiente de las mismas:

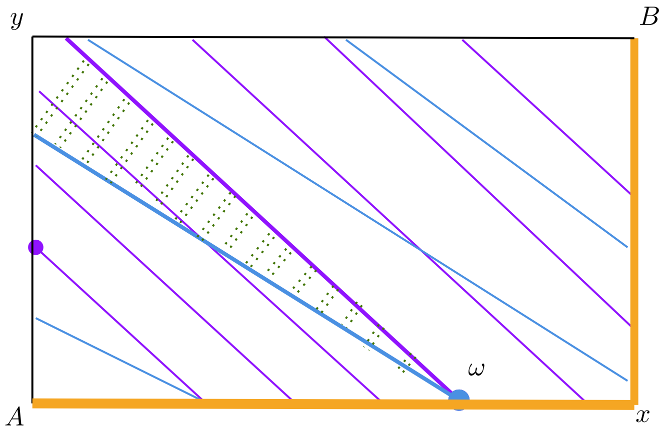
$$U_A = X_A + 2Y_A \Leftrightarrow \frac{U_A - X_A}{2} = Y_A \Leftrightarrow \frac{U_A}{2} \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{pendiente}} X_A = Y_A$$
$$U_B = 2X_B + Y_B \Leftrightarrow U_B \underbrace{-2}_{\text{pendiente}} X_B = Y_B$$
$$|\frac{-1}{2}| < |-2| \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2$$

En este caso, la pendiente de las curvas de indiferencia de A es menor que la pendiente de las curvas de indiferencia de B en valor absoluto. Esto tiene implicaciones para la curva de contrato:

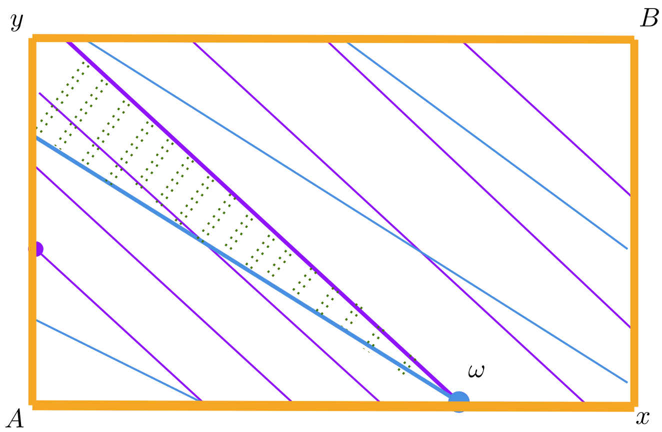
- Como la pendiente de las curvas de indiferencia de A es menor, la curva de contrato corresponde a todo el borde de izquierda y arriba:



- Si la pendiente de las curvas de indiferencia de A fuese mayor, la curva de contrato correspondería a todo el borde de la derecha y abajo:

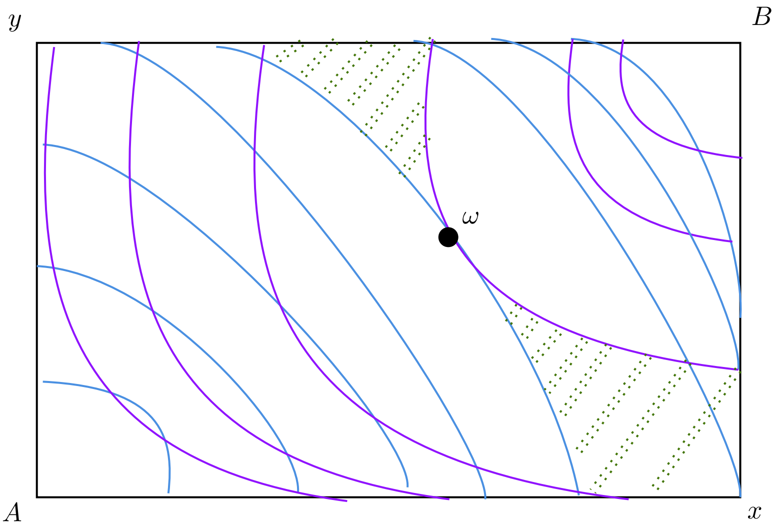


- Si las pendientes de las curvas de indiferencia de ambos agentes fuese igual, la curva de contrato correspondería a todos los bordes de la caja:



- Curvas de indiferencia cóncavas

  Cuando las curvas de indiferencia son cóncavas, la curva de contrato serían todos los bordes de la caja. Asumiendo un punto de dotación inicial ω, las curvas de indiferencia ser verían así:



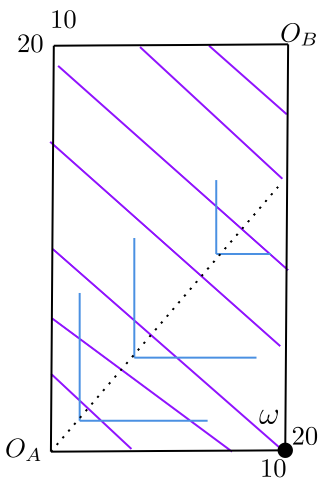
La zona de comercio sería la zona coloreada y punteada en verde. El punto ω coincide con un punto de tangencia entre las curvas de indiferencia de los agentes, sin embargo no es un óptimo de Pareto ya que ambos pueden mejorar.

Ejemplo 50 [Caja de Edgeworth con curvas de indiferencia especiales]. Dos individuos A y B consumen solamente dos bienes X e Y, y tienen las siguientes funciones de utilidad (U) y las siguientes dotaciones (ω):

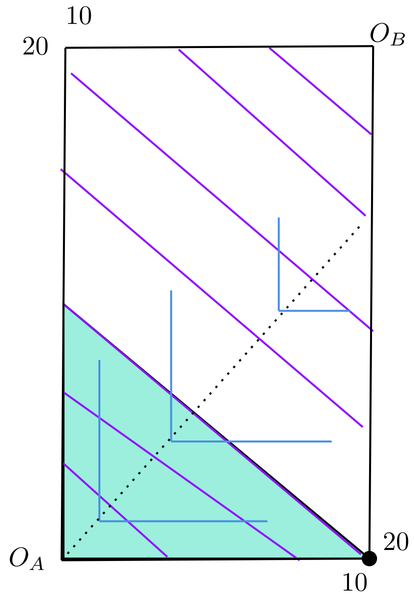
$$\begin{aligned} U_A(X_A, Y_A) =& \min(2X_A, Y_A) + \min(X_A, 2Y_A) \\ \omega_A =& (10, 0) \\ U_B(X_B, Y_B) =& X_B + Y_B \\ \omega_B =& (0, 20) \end{aligned}$$

Dibuje la caja de Edgeworth e identifique:

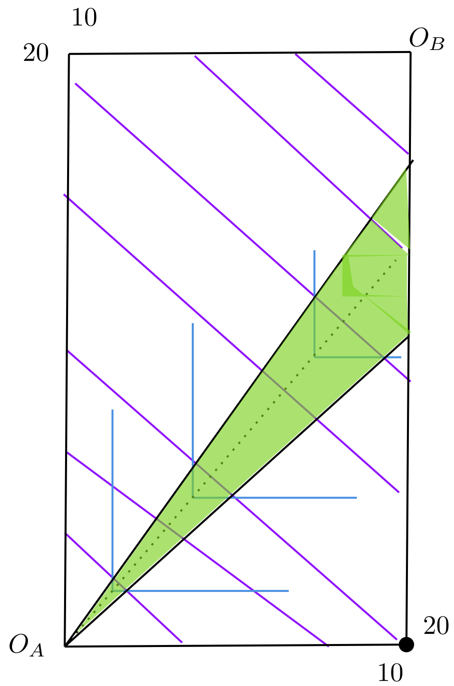
- El punto inicial



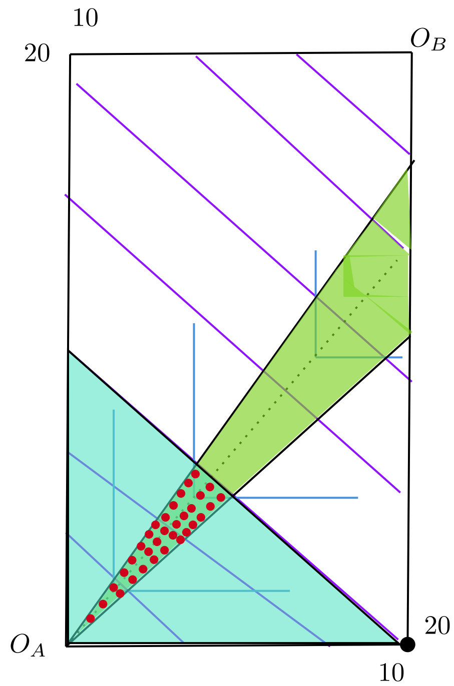
- El área de comercio



- La curva de contrato



- El punto final



El punto final puede ser cualquier punto (como cualquiera de los rojos) entre la zona de comercio y la zona de contrato.

Ejemplo 51 [Dos agentes y dos bienes]. Suponga una economía de dos agentes: A y B. En este economía existen dos bienes: x y y. A y B tienen las siguientes funciones de utilidad:

$$U_A = x_A^{\frac{1}{3}} y_A^{\frac{2}{3}} \qquad U_B = x_B^{\frac{2}{3}} y_B^{\frac{1}{3}}$$

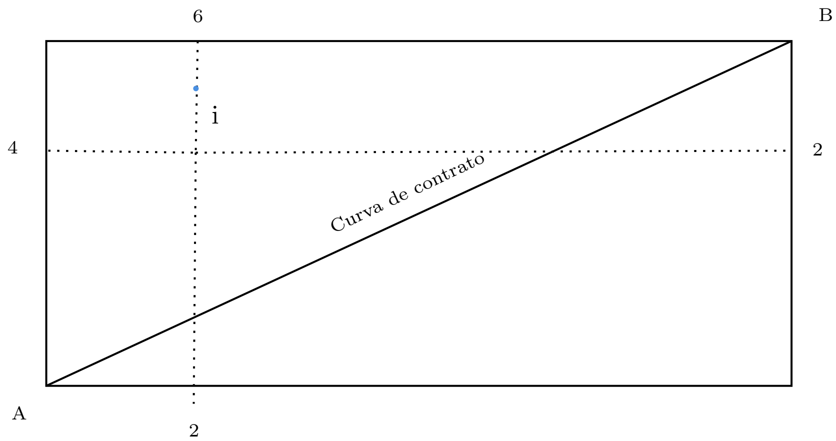
A continuación, se denotan las dotaciones de esta economía:

$$(\overline{x_A}, \overline{y_A}) = (2, 4)$$

$$(\overline{x_B}, \overline{y_B}) = (6, 2)$$

a) Calcule la curva de contrato
b) Calcules los precios relativos de equilibrio
c) Calcule el equilibrio general competitivo

En primer lugar, es importante hacer uso del instrumental aprendido para tener una mejor comprensión del problema. A continuación, así se ve la caja de Edgeworth para este problema.



Note que las dimensiones de la caja fueron determinadas obteniendo las dotaciones totales de la economía. En particular para este problema:

$$(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x_A} + \overline{x_B}, \overline{y_A} + \overline{y_B})$$
$$(\overline{x}, \overline{y}) = (8, 6)$$

Una vez que se tienen las dotaciones totales y el punto inicial de esta economía, se puede proceder a encontrar la curva de contrato.

Recuerde que la curva de contrato es la línea que une todos los puntos que son eficientes u óptimos de Pareto en esta economía, de manera que uno de esos puntos Pareto-óptimos, será el equilibrio competitivo general de la economía. De esta manera, se procede buscando la máxima utilidad posible que puede obtener cada uno de los agentes, dada la utilidad del otro agente. Siguiendo la lógica del principio de arbitraje, se tiene que:

$$TMS_A = TMS_B \Leftrightarrow \frac{UMg_{xA}}{UMg_{yA}} = \frac{UMg_{x_B}}{UMg_{y_B}}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\frac{1}{3}x_A^{\frac{1}{3}-1}y_A^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x_A^{\frac{1}{3}}y_A^{\frac{2}{3}-1}} = \frac{\frac{2}{3}x_B^{\frac{2}{3}-1}y_A^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_B^{\frac{2}{3}}y_B^{\frac{1}{3}-1}}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{6}\frac{y_A}{x_A} = \frac{6}{3}\frac{y_B}{x_B}$$
$$\Rightarrow \frac{y_A}{2x_A} = \frac{2y_B}{x_B}$$

Ahora, se ha logrado alcanzar una expresión que resume el comportamiento de la curva de contrato, pues es el resultado de igualar las pendientes de las curvas de indiferencia. Note que se tiene una ecuación con cuatro variables, sin embargo, haciendo uso de las restricciones dotacionales de esta economía, se pueden plantear las siguientes sustituciones:

$$\overline{x_A} + \overline{x_B} = 8 \Rightarrow \overline{x_B} = 8 - \overline{x_A}$$
$$\overline{y_a} + \overline{y_B} = 6 \Rightarrow \overline{y_B} = 6 - \overline{y_A}$$

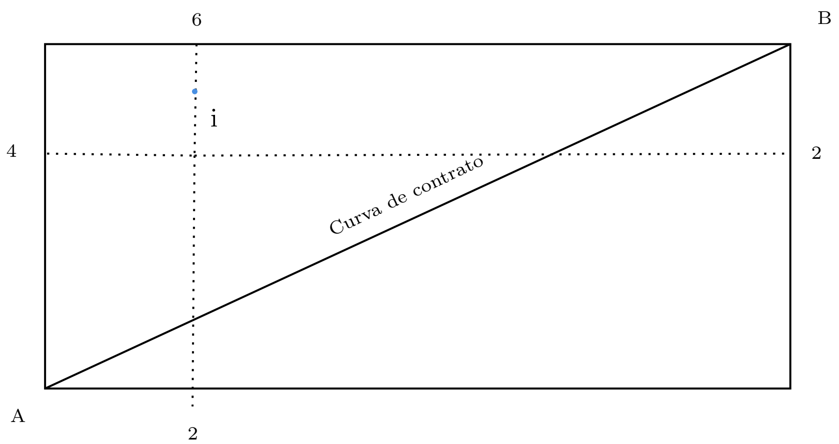
De manera que la igualdad obtenida de la igualación de las tasas marginales de sustitución, puede plantearse mediante el uso de las anteriores sustituciones, en términos de dos variables únicamente:

$$\Rightarrow \frac{y_A}{2x_A} = \frac{2(6 - y_A)}{8 - x_A}$$

Ahora, se puede despejar alguna de las dos variables restantes para obtener la curva de contrato. Por tradición, se despejará y_A.

$$8y_A - y_A x_A = 24x_A - 4y_A x_A \Rightarrow 8y_A - y_A x_A + 4y_A x_A = 24x_A$$
$$8y_A + 3y_A x_A = 24x_A \Rightarrow y_A = \frac{24x_A}{8 + 3x_A}$$

Note que la forma resultante de la curva de contrato es una función de la forma $y = mx + b$, es decir, lineal, por lo tanto, la curva de contrato ha de ser una línea recta que va de esquina a esquina.



Para proceder a encontrar los precios relativos de est equilibrio general competitivo, se debe resolver el problema de optimización o maximización de cada uno de los consumidores.

Tómese a la persona A. Su condición de optimalidad es que: $TMS_{x_A,y_A} = \frac{p_x}{p_y}$, por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\frac{1}{3}x_A^{\frac{1}{3}-1}y_A^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}x_A^{\frac{1}{3}}y_A^{\frac{2}{3}-1}} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \frac{x_A^{-\frac{2}{3}}y_A^{\frac{2}{3}}}{2x_A^{\frac{1}{3}}y_A^{\frac{-1}{3}}} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{y_A}{2x_A} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_A = 2\frac{p_x}{p_y}x_A$$

Ahora, evaluando en la restricción "presupuestaria.[en] términos de las dotaciones:

$$p_x x_A + p_y y_A = p_x\overline{x_A} + p_y\overline{y_A}$$

$$\Rightarrow p_x x_A + \cancel{p_y}(\frac{2p_x}{\cancel{p_y}}x_A) = 2p_x + 4p_y$$

$$\Rightarrow 3p_x x_A = 2p_x + 4p_y$$

$$x_A^M = \frac{2p_x + 4p_y}{3p_x}$$

$$\Rightarrow y_A = \frac{2\cancel{p_x}}{p_y}(\frac{2p_x + 4p_y}{3\cancel{p_x}})$$

$$y_A^M = \frac{4p_x + 8p_y}{3p_y}$$

Tómese ahora a la persona B. Su condición de optimalidad es que: $TMS_{x_B,y_B} = \frac{p_x}{p_y}$, por lo tanto, se tiene que:

$$\frac{\frac{2}{3}x_B^{\frac{2}{3}-1}y_A^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_B^{\frac{2}{3}}y_B^{\frac{1}{3}-1}} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \frac{2x_B^{\frac{2}{3}-1}y_B^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_B^{\frac{2}{3}}y_B^{\frac{1}{3}-1}} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{2x_B^{\frac{-1}{3}}y_B^{\frac{1}{3}}}{x_B^{\frac{2}{3}}y_B^{\frac{-2}{3}}} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_B = \frac{1}{2}\frac{p_x}{p_y}x_B$$

Evaluando en la restriccón "presupuestaria en términos de dotaciones:

$$p_x x_B + p_y y_B = p_x\overline{x_B} + p_y\overline{y_B}$$

$$\Rightarrow p_x x_B + \cancel{p_y}(\frac{p_x}{2\cancel{p_y}}x_B) = 6p_x + 2p_y$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}p_x x_B = 6p_x + 2p_y$$

$$x_B^M = \frac{12p_x + 4p_y}{3p_x}$$

$$\Rightarrow y_B = \frac{\cancel{p_x}}{\cancel{2}p_y}(\frac{\cancel{12}p_x + \cancel{4}p_y}{3\cancel{p_x}})$$

$$y_B^M = \frac{6p_x + 2p_y}{3p_y}$$

Habiendo encontrado las demandas marshallianas óptimas de los agentes de esta economía, la manera de proceder para encontrar los precios relativos es mediante el establecimiento de un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 8 \\ y_A + y_B = 6 \end{cases}$$

Nótese que tanto la demanda por el bien de x como la demanda por el bien y de ambos agentes, deben sumarse e igualar las dotaciones globales de esta economía. Sin embargo, por la ley de Walras, si hay n mercados (en este caso 2), si $n-1$ mercados (en este caso 1) están en equilibrio, el n-ésimo mercado también lo estará, por lo que basta solucionar una ecuación solamente:

$$x_A + x_B = 8 \Rightarrow \frac{2p_x + 4p_y}{3p_x} + \frac{12p_x + 4p_y}{3p_x} = 8$$

$$\frac{2p_x + 4p_y + 12p_x + 4p_y}{3p_x} = 8 \Rightarrow 14p_x + 8p_y = 24p_x$$

$$8p_y = 10p_x \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{p_x}{p_y}$$

Finalmente, para calcular el equilibrio competitivo general es importante observar en primer lugar si la asignación inicial de los agentes forma parte de la curva de contrato. ¿Cómo saber si esto se cumple? Piénsese en el agente A, al evaluar en la curva de contrato $y_A = \frac{24x_A}{8+3x_A}$ la cantidad de dotación de la mercancía $\overline{x_A}$ debe obtenerse como resultado la cantidad de dotación de la mercancía y_A que le fue entregada al agente A. Note que $\frac{24(2)}{8+3(2)} = \frac{24}{7} \neq 4$ y por ende la asignación inicial del agente A no forma parte de la curva de contrato. Si la dotación inicial formara parte de la curva de contrato, dicha asignación sería el equilibrio competitivo general, sin embargo, cuando no sucede esto, como en este caso, dado que ya se sabe la relación de precios de la economía, se puede proceder a encontrar las cantidades de equilibrio.

Sabiendo que $\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{p_y}{p_x} = \frac{5}{4}$ entonces:

$$x_A^M = \frac{2p_x + 4p_y}{3p_x} \Rightarrow x_A^M = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\frac{p_y}{p_x} \Rightarrow x_A^M = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\frac{5}{4} \Rightarrow x_A^M = \frac{2}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow x_A^M = \frac{7}{3}$$

$$y_A^M = \frac{4p_x + 8p_y}{3p_y} \Rightarrow y_A^M = \frac{4}{3}\frac{p_x}{p_y} + \frac{8}{3} \Rightarrow y_A^M = \frac{4}{3}\frac{4}{5} + \frac{8}{3} \Rightarrow y_A^M = \frac{16}{15} + \frac{8}{3} \Rightarrow y_A^M = \frac{56}{15}$$

$$x_B^M = \frac{12p_x + 4p_y}{3p_x} \Rightarrow x_B^M = 4 + \frac{4}{3}\frac{p_y}{p_x} \Rightarrow x_B^M = 4 + \frac{4}{3}\frac{5}{4} \Rightarrow x_B^M = 4 + \frac{5}{3} \Rightarrow x_B^M = \frac{17}{3}$$

$$y_B^M = \frac{6p_x + 2p_y}{3p_y} \Rightarrow y_B^M = 2\frac{p_x}{p_y} + \frac{2}{3} \Rightarrow y_B^M = 2\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \Rightarrow y_B^M = \frac{8}{5} + \frac{2}{3} \Rightarrow y_B^M = \frac{34}{15}$$

Obsérvese que $\frac{7}{3} + \frac{56}{15} = \frac{105+168}{45} = \frac{273}{45} \approx 6{,}06$, mientras que $\frac{17}{3} + \frac{34}{15} = \frac{255+102}{45} = \frac{357}{45} = \frac{119}{15} \approx 7{,}933$

Note que dadas las utilidades que representan las preferencias de cada agente, los precios de equilibrio de esta economía y las dotaciones iniciales de cada persona, decidieron intercambiar hasta alcanzar asignaciones que se ajustaran a sus demandas óptimas marshallianas, las cuales, sumadas, siguen cumpliendo con las restricciones de dotaciones de la economía.

Ejemplo 52 [Equilibrio general en una economía (Macroeconomía): corto plazo: agente representativo y empresa representativa sin gobierno]. Suponga una economía sin gobierno en la que hay un agente representativo con la siguiente función de utilidad: $u(c,l) = log(c) + \gamma l$ y una función de producción de la forma: $Y = zK^{\alpha}(h-l)^{1-\alpha}$

El consumidor tiene una restricción presupuestaria de la forma: $c = wN + \pi + rK - \cancel{T}$ y la función de beneficios de la empresa es de la forma: $\pi = F(K, N^d) - wN^d - rK$.

a) Defina el equilibrio competitivo de esta economía. (5 puntos)

El equilibrio competitivo general de esta economía se define:

- Una asignación (vector) compuesto por las siguientes entradas $[C, Y, N, K]$.
- Un sistema de precios de la forma: $[w, r]$.
- Si hubiera gobierno: una política gubernamental $[G, T]$.

Tal que:

- El agente representativo (quien representa a los hogares ("households") de esta economía) maximice su utilidad u y c, dado el sistema de precios $[w.r]$.
- La empresa representativa (que representa a las empresas de esta economía) maximiza π ("profits") eligiendo N^d y K, dado el sistema de precios $[w, r]$.
- Si hubiera un gobierno: una política gubernamental tal que el gobierno mantuviera un presupuesto balanceado; es decir: $G = T$.

Y los mercados se vacían. Esto significa:

- $N^d = N^s = N^*$
- $Y^* = c^* + \cancel{G}$
- $K^* = \overline{K}$

b) Plantee el problema del hogar representativo y caracterice su solución. (4 puntos)
Asumiendo que los hogares son los propietarios de las empresas:

$$\begin{aligned}
\max_{(c,l)\in\mathbb{R}^{\not{z}}} \quad & u = log(c) + \gamma l \\
\text{s.t.} \quad & c = wN + \pi + rK \\
& c = wN + [F(K,N) - wN - rK] + rK \\
& c = \cancel{wN} + F(K,N) - \cancel{wN} - \cancel{rK} + \cancel{rK} \\
& c = F(K,N) \\
& c = Y
\end{aligned}$$

Ahora, recordando la condición de optimalidad:

$$TMS_{c,l} = \frac{p_l}{p_c}$$

Y sabiendo que $p_l = w$ normalizando $p_c = 1$ entonces:

$$\frac{\gamma}{\frac{1}{c}} = w \Rightarrow \gamma c = w$$

c) Plantee el problema de la empresa representativa y caracterice su solución en el corto plazo. (3 puntos)
Se sabe que en el óptimo la empresa debe comportarse de tal manera que:

$$PMg_N = w$$

Y recordando que: $h = N + l \Rightarrow h - l = N$. Por lo que:

$$Y = zK^\alpha N^{1-\alpha}$$

$$PMg_N = (1-\alpha)zK^\alpha N^{-\alpha}$$

Así que debe ser que, en el equilibrio:

$$(1-\alpha)zK^\alpha N^{-\alpha} = w$$

d) Encuentre explícitamente el equilibrio general de corto plazo de esta economía. Analice un shock de productividad de $\Delta z < 0$ sobre las variables de equilibrio. (7 puntos)

Observe que la variable que çonecta.ª los hogares con las empresas es w, de manera que encontrar el equilibrio competitivo general se resume a encontrar el w que garantice que se vacíen los mercados (ley de Walras). Por lo tanto, empleando las condiciones de primer orden del agente representativo y de la empresa representativa se obtiene que:

$$\gamma c = (1-\alpha)zK^\alpha N^{-\alpha}$$

Sin embargo, de la restricción inicial se sabe que $c = Y$ y $h - l = N$. Por tanto:

$$\gamma zK^\alpha N^{1-\alpha} = (1-\alpha)zK^\alpha N^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{zK^\alpha N^{1-\alpha}}{zK^\alpha N^{-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{z}\cancel{K^\alpha}N^{1\cancel{-\alpha}}}{\cancel{z}\cancel{K^\alpha}N^{\cancel{-\alpha}}} = \frac{1-\alpha}{\gamma}$$

$$\Rightarrow N^* = \frac{1-\alpha}{\gamma}$$

Sabiendo el valor de N que garantiza el vaciado de mercados, se procede a averiguar los otros elementos que conforman el equilibrio competitivo general:

$$Y^* = zK^\alpha N^{*1-\alpha} \Rightarrow Y^* = zK^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{1-\alpha}$$

$$c^* = Y^* \Rightarrow c^* = zK^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{1-\alpha}$$

Y dado que se está en un escenario de corto plazo entonces:

$$K^* = \overline{K}$$

Y, bajo el supuesto de la teoría neoclásica en donde cada insumo recibe como remuneración su productividad marginal, entonces:

$$\begin{aligned} w^* =& (1-\alpha)zK^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{-\alpha} \\ r^* =& \alpha z K^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Shock $\Delta z < 0$:

- N^* no depende de z
- Y^* :
$$\frac{\partial Y^*}{\partial z} = K^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{1-\alpha} > 0$$
- c^* :
$$\frac{\partial Y^*}{\partial z} = K^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{1-\alpha} > 0$$
- K^* no depende de z
- w^*:
$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = (1-\alpha)K^\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{1-\alpha} > 0$$
- r^*:
$$\alpha K^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)^{1-\alpha} > 0$$

Ahora, recuerde que $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ implica una relación directa entre las variables, de manera que ante un cambio o shock negativo de z se tendría que ante un shock $\Delta z < 0$:

- $Y^* \downarrow$
- $c^* \downarrow$
- $w^* \downarrow$
- $r^* \downarrow$

Ejemplo 53 [Decisión de consumo y oferta de trabajo[1]]. Suponga una economía sin gobierno en la que hay un agente representativo con la siguiente función de utilidad:

$$u(c, N) = \frac{1}{1-\gamma}(c - \psi\frac{N^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

y una función de producción de la forma: $Y = z(uK)^\alpha N^{1-\alpha}$ donde u es un parámetro de utilización del capital. Las familias son dueñas de las empresas.
El consumidor tiene una restricción presupuestaria de la forma: $c = wN + \pi + rK - \cancel{T}$ y la función de beneficios de la empresa es de la forma: $\pi = F(K, N^d) - wN^d - rK$.
a) Defina el equilibrio competitivo de esta economía. (5 puntos)
El equilibrio competitivo general de esta economía se define:

[1]Ejercicio tomado de Jose Andrés Ortega para el curso Teoría Macroeconómica II

- Una asignación (vector) compuesto por las siguientes entradas $[C, Y, N, K]$.
- Un sistema de precios de la forma: $[w, r]$.
- Si hubiera gobierno: una política gubernamental $[G, T]$.

Tal que:

- El agente representativo (quien representa a los hogares ("households") de esta economía) maximice su utilidad u y c, dado el sistema de precios $[w.r]$.
- La empresa representativa (que representa a las empresas de esta economía) maximiza π ("profits") eligiendo N^d y K, dado el sistema de precios $[w, r]$.
- Si hubiera gobierno: una política gubernamental tal que el gobierno mantuviera un presupuesto balanceado; es decir: $G = T$.

Y los mercados se vacían. Esto significa:

- $N^d = N^s = N^*$
- $Y^* = c^* + \cancel{G}$
- $K^* = \overline{K}$

b) Plantee el problema del hogar representativo y caracterice su solución. (4 puntos)
Asumiendo que los hogares son los propietarios de las empresas:

$$\begin{aligned}
\max_{(c,l)\in\mathbb{R}^{\neq}} \quad & u(c, N) = \frac{1}{1-\gamma}(c - \psi\frac{N^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{1}{1-\gamma}} \\
\text{s.t.} \quad & c = wN + \pi + rK \\
& c = wN + [F(K, N) - wN - rK] + rK \\
& c = \cancel{wN} + F(K, N) - \cancel{wN} - \cancel{rK} + \cancel{rK} \\
& c = F(K, N) \\
& c = Y
\end{aligned}$$

Ahora, recordando la condición de optimalidad:

$$TMS_{c,l} = \frac{p_l}{p_c}$$

Y sabiendo que $p_l = w$ normalizando $p_c = 1$ entonces reacomodando:

$$U(c, l) = \frac{1}{1-\gamma}\left(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$TMS_{c,l} = \frac{UMg_l}{UMg_c}$$

$$UMg_l = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma}(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{1}{1-\gamma}-1} \cdot -\cancel{(1+\theta)}\frac{\psi(h-l)^{1+\theta-1}}{\cancel{1+\theta}} \cdot -\psi$$

$$UMg_l = \frac{1}{(1-\gamma)^2}\psi(h-l)^{\theta}(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$UMg_l = \frac{\psi(h-l)^{\theta}}{(1-\gamma)^2}(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Ahora para el consumo:

$$UMg_c = \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{1-\gamma}(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{1}{1-\gamma}-1} \cdot 1$$

$$UMg_c = \frac{1}{(1-\gamma)^2}(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Entonces ahora:

$$TMS_{c,l} = \frac{\frac{\psi(h-l)^{\theta}}{(1-\gamma)^2}(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}{\frac{1}{(1-\gamma)^2}(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta})^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}$$

$$TMS_{c,l} = \frac{\frac{\psi(h-l)^{\theta}}{\cancel{(1-\gamma)^{2}}} \cancel{\left(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}}{\frac{1}{\cancel{(1-\gamma)^{2}}} \cancel{\left(c - \psi\frac{(h-l)^{1+\theta}}{1+\theta}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}}}$$

$$TMS_{c,l} = \psi(h-l)^{\theta}$$

Y por ende, la solución del agente representativo se caractiza por la siguiente condición de primer orden:

$$\psi(h-l)^{\theta} = w$$

c) Plantee el problema de la empresa representativa y caracterice su solución en el corto plazo. (3 puntos)
Se sabe que en el óptimo la empresa debe comportarse de tal manera que:

$$PMg_N = w$$

Y recordando que: $h = N + l \Rightarrow h - l = N$. Por lo que:

$$Y = zK^{\alpha}N^{1-\alpha}$$

$$PMg_N = (1-\alpha)z(uK)^{\alpha}N^{-\alpha}$$

Así que debe ser que, en el equilibrio:

$$(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}N^{-\alpha} = w$$

d) Encuentre explícitamente el equilibrio general de corto plazo de esta economía. Analice un shock de productividad de $\Delta z < 0$ sobre las variables de equilibrio. (7 puntos)

Observe que la variable que çonecta.ª los hogares con las empresas es w, de manera que encontrar el equilibrio competitivo general se resume a encontrar el w que garantice que se vacíen los mercados (ley de Walras). Por lo tanto, empleando las condiciones de primer orden del agente representativo y de la empresa representativa se obtiene que:

$$\psi(h-l)^{\theta} = (1-\alpha)z(uK)^{\alpha}N^{-\alpha}$$

Expresando la $TMS_{c,l}$ en términos de N:

$$\psi N^{\theta} = (1-\alpha)z(uK)^{\alpha}N^{-\alpha}$$

$$\frac{N^{\theta}}{N^{-\alpha}} = \frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}$$

$$N^{\theta+\alpha} = \frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}$$

$$N^{*} = \left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta+\alpha}}$$

Sabiendo el valor de N que garantiza el vaciado de mercados, se procede a averiguar los otros elementos que conforman el equilibrio competitivo general:

$$K^{*} = \overline{K}$$

$$Y^{*} = z(uK^{*})^{\alpha}N^{*1-\alpha} \Rightarrow Y^{*} = z(u\overline{K})^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta-\alpha}\;1-\alpha}$$

$$c^{*} = Y^{*} \Rightarrow c^{*} = z(u\overline{K})^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta-\alpha}\;1-\alpha}$$

Y, bajo el supuesto de la teoría neoclásica en donde cada insumo recibe como remuneración su productividad marginal, entonces:

$$w^{*} = (1-\alpha)z(u\overline{K})^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)z(u\overline{K})^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta+\alpha}\;1-\alpha}$$

$$r^{*} = \alpha z(u\overline{K})^{\alpha-1}\left(\frac{(1-\alpha)z(u\overline{K})^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta+\alpha}\;1-\alpha}$$

Shock $\Delta z < 0$:

- N^*:

$$\frac{\partial N^*}{\partial z} = \frac{(1-\alpha)(uK)^\alpha}{\psi(\theta-\alpha)} \left(\frac{z(1-\alpha)(uK)^\alpha}{\psi} \right)^{\frac{1+\alpha-\theta}{\theta-\alpha}} > 0 \quad para \quad z > 0$$

- Y^* :

$$(u\overline{K})^\alpha \left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^\alpha}{\psi} \right)^{\frac{1}{\theta-\alpha}} 1-\alpha > 0 \quad para \quad z > 0$$

- c^* :

$$(u\overline{K})^\alpha \left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^\alpha}{\psi} \right)^{\frac{1}{\theta-\alpha}} 1-\alpha > 0 \quad para \quad z > 0$$

- K^* no depende de z
- w^*:

$$(1-\alpha)(u\overline{K})^\alpha \left(\frac{(1-\alpha)z(u\overline{K})^\alpha}{\psi} \right)^{\frac{1}{\theta+\alpha}} 1-\alpha \quad para \quad z > 0$$

- r^*:

$$\alpha z(u\overline{K})^{\alpha-1} \left(\frac{(1-\alpha)(u\overline{K})^\alpha}{\psi} \right)^{\frac{1}{\theta+\alpha}} 1-\alpha \quad para \quad z > 0$$

Ahora, recuerde que $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ implica una relación directa entre las variables, de manera que ante un cambio o shock negativo de z se tendría que ante un shock $\Delta z < 0$:

- $Y^* \downarrow$
- $c^* \downarrow$
- $w^* \downarrow$
- $r^* \downarrow$

e) Resuelva el problema de corto plazo de un planificador social benevolente. ¿Se cumplen los Teoremas del Bienestar? Justifique su respuesta. (6 puntos)

El planificador social maximiza la utilidad del agente representativo dados G y K:

$$\max_{(c,l)\in\mathbb{R}^{\not{2}}} \quad u(c,l)$$
$$\text{s.t.} \quad c + G = Y$$

Entonces, imponiendo la restricción:

$$\max_{(l)\in\mathbb{R}^{\not{2}}} \quad u(Y-G,l)$$
$$\text{s.t.} \quad c + G = Y$$

Condición de primer orden respecto a l:

$$-u_c PMg_N + u_l = 0 \Rightarrow u_l = u_c PMg_N \Rightarrow \frac{u_l}{u_c} = PMg_N$$

Y se sabe que:

$$\frac{u_l}{u_c} = \psi(h-l)^\theta$$

Mientras que:

$$PMg_N = (1-\alpha)z(uK)^\alpha N^{-\alpha}$$

De manera que el planificador social maximiza la utilidad del ingreso cuando:

$$\psi N^\theta = (1-\alpha)z(uK)^\alpha N^{-\alpha}$$

Note que el planificador social llega a la misma condición hallada descentralizadamente. De manera que:

$$\frac{N^\theta}{N^{-\alpha}} = \frac{(1-\alpha)z(uK)^\alpha}{\psi}$$

$$N^{\theta+\alpha} = \frac{(1-\alpha)z(uK)^\alpha}{\psi}$$

$$N^* = \left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta+\alpha}}$$

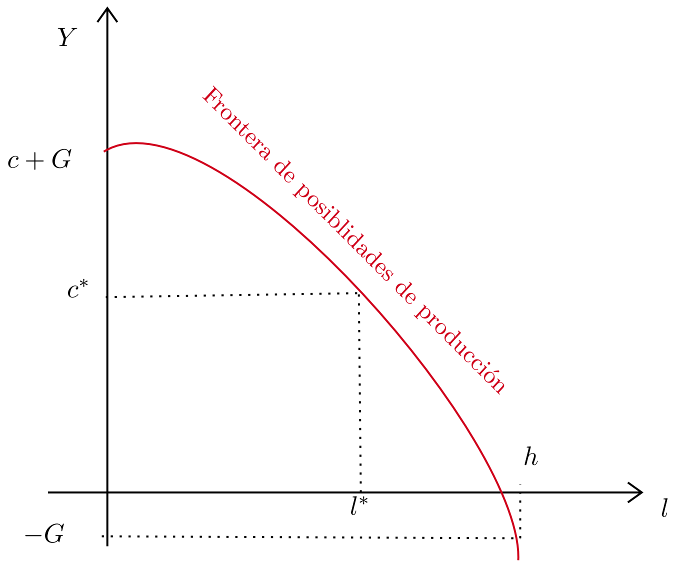
Sabiendo el valor de N que garantiza el vaciado de mercados, se procede a averiguar los otros elementos que conforman el equilibrio competitivo general:

$$\begin{aligned} K^* =& \overline{K} \\ Y^* = z(uK^*)^{\alpha}N^{*1-\alpha} \Rightarrow Y^* =& z(u\overline{K})^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta-\alpha}\,1-\alpha} \\ c^* = Y^* \Rightarrow c^* =& z(u\overline{K})^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)z(uK)^{\alpha}}{\psi}\right)^{\frac{1}{\theta-\alpha}\,1-\alpha} \end{aligned}$$

Para el planificador social no hay precios, entonces no hay ni w ni r.

¿Se cumplen los teoremas del bienestar? $\rightarrow$ Sí. ¿Por qué? Observe que el primer teorema dice que todo equilibrio general del modelo estudiado, es un óptimo de Pareto. Esto se puede traducir de otra forma: las condiciones de equilibrio general son iguales a las condiciones de optimalidad de un planificador social. Revísese que tanto en el equilibrio competitivo general como en el problema del planificador social, se llegó a la misma asignación del vector $[C^*, Y^*, N^*, K^*]$. De manera que las condiciones del ECG y dle planificador social coinciden, aunque una es una manera centralizada de alcanzarlo y otra es descentralizada.

Con respecto al segundo teorema, este dice que existe un sistema de precios con el cual se puede construir un equilibrio general igual al óptimo del planificador social. Nótese que gráficamente el modelo se ve así:



Nótese que la frontera de posiblidades de producción representa todas las posiblidades de equilibrio competitivo general en esta economía. Sin embargo, note que existe la posibilidad de alcanzar óptimos de Pareto distintos al equilibrio competitivo general. Es así que si sigue la ley de Walras y se vacían todos los mercados, necesariamente eso va a ser un óptimo de Pareto, pero no necesariamente va a ser un punto del equilibrio competitivo general de este modelo. Es así que se podrían hallar óptimos de Pareto que vacíen el mercado sin que estos sean el equilibrio competitivo general: recuerde el primero teorema del bienestar: "todo equilibrio competitivo general es óptimo de Pareto, pero no todo óptimo de Pareto es un equilibrio competitivo general necesariamente". Es así que el segundo teorema también se cumple.

Ejercicio 102 [N-agentes con función de utilidad cuasilineal con 2 bienes[2]]. Considere una economía con n individuos, cada uno con una función de utilidad dada por

$$U_i = x_i + \ln y_i.$$

Cada uno tiene una dotación igual a $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.

[2] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

1. Encuentre los precios de equilibrio para esta economía.
   → Condición de equilibrio marginal:

$$\text{TMS}^i_{xy} = \frac{1}{y_i} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_i = \frac{p_y}{p_x}$$

   Como todos los agentes tienen la misma demanda de y_i, entonces:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i = n \cdot \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{\bar{y}}{n}$$

   Por la ley de Walras, este valor de $\frac{p_x}{p_y}$ garantiza que se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i.$$

2. Encuentre la curva de contrato.
   → Como todos los agentes consumen la misma cantidad óptima de y, entonces:

$$y_i = \frac{\bar{y}}{n}$$

   Esa es la condición que define la curva de contrato en este caso: todos los agentes consumen la misma cantidad de y.

Ejercicio 103 [Una economía con n-agentes y 2 bienes[3]]. N individuos posee cada uno la función de utilidad

$$U_i = \frac{x_i}{2} + y_i^{0,5}.$$

1. Los precios de equilibrio de esta economía.
   → Los precios de equilibrio son:

$$\text{TMS}_i = \frac{1}{2\sqrt{y_i}} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \sqrt{y_i} = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow y_i = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_y}{p_x} \cdot i\right)^2 = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

   Como

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

   entonces:

$$\bar{y} = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2 \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \left(\frac{6\bar{y}}{(n+1)(2n+1)}\right)^{1/2}$$

2. La curva de contrato para dos individuos representativos.
   → La curva de contrato sería:

$$\text{TMS}_i = \text{TMS}_k \Rightarrow \frac{\bar{y} - y_i}{i} = \frac{\bar{y} - y_k}{k} \Rightarrow y_i = \bar{y} - \frac{i}{k}(\bar{y} - y_k)$$

$$\Rightarrow y_i = \frac{i^2}{k^2} y_k + \left(1 - \frac{i^2}{k^2}\right)\bar{y} = \frac{i^2\bar{y}}{k^2 + i^2}$$

[3] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Ejercicio 104 [N-agentes con función de utilidad Cobb-Douglas con 2 bienes[4]]. Considere una economía con n individuos, cada uno con una función de utilidad dada por

$$U_i = x_i^{\alpha_i} y_i^{1-\alpha_i}.$$

Cada uno tiene una dotación igual a $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$.

1. Encuentre los precios de equilibrio para esta economía.
$\rightarrow$ Condición de equilibrio marginal:

$$\text{TMS}_{xy}^i = \frac{\alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} y_i^{1-\alpha_i}}{(1-\alpha_i) x_i^{\alpha_i} y_i^{-\alpha_i}} = \frac{\alpha_i y_i}{(1-\alpha_i)x_i} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_i = \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \cdot \frac{p_x}{p_y} \right) x_i$$

Restricción presupuestaria:

$$p_x \bar{x}_i + p_y \bar{y}_i = p_x x_i + p_y y_i = p_x x_i + p_y \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \cdot \frac{p_x}{p_y} \right) x_i = \frac{p_x}{\alpha_i} x_i$$

Despejando x_i:

$$x_i = \frac{\alpha_i}{p_x}(p_x \bar{x}_i + p_y \bar{y}_i)$$

Ley de Walras (no es necesario encontrar y_i):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{p_x}(p_x \bar{x}_i + p_y \bar{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i + \frac{p_y}{p_x} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i$$

De ahí:

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i}$$

2. Encuentre la curva de contrato.
$\rightarrow$ Volvemos a la condición de equilibrio:

$$y_i = \left(\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} \cdot \frac{p_x}{p_y} \right) x_i$$

Sustituyendo la expresión para $\frac{p_x}{p_y}$:

$$\frac{\alpha_i y_i}{(1-\alpha_i)x_i} = \frac{p_x}{p_y} = \frac{\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i}$$

Entonces, la curva de contrato está dada por:

$$y_i = \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} x_i \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{y}_i}{\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i} \right)$$

Ejercicio 105 [Equilibrio General de una economía de dotación[5]]. Una economía está representada por n individuos de dos tipos. La mitad de los individuos son de tipo A y poseen la siguiente función de utilidad

$$U(x_A, y_A) = \min\{x_A, y_A\}.$$

La otra mitad de individuos son de tipo B y tienen una función de utilidad

$$U(x_B, y_B) = x_B + \ln y_B.$$

La dotación global de x y de y son idénticas y todos los individuos son dotados con la misma cantidad de x y de y.

[4] Ejercicio tomado de Casasola (2024)
[5] Ejercicio tomado de Casasola (2024)

1. Encuentre los precios de equilibrio general para esta economía y demuestre cuál será el consumo de equilibrio para cada tipo de individuo.
 $\rightarrow$ Se sabe que las dotaciones deben cumplir:

$$\bar{X} = \bar{Y} = \omega$$

Agente representativo A

$$\omega_x^A = \frac{\omega}{n} = \omega_y^A$$
$$u_A = \text{mín}\{x_A, y_A\} \Rightarrow x_A = y_A$$

Restricción presupuestaria:

$$p_x x_A + p_y y_A = \frac{\omega}{n}(p_x + p_y)$$
$$x_A(p_x + p_y) = \frac{\omega}{n}(p_x + p_y) \Rightarrow x_A = \frac{\omega}{n} = y_A$$

Agente representativo B

$$\omega_x^B = \frac{\omega}{n} = \omega_y^B$$
$$u_B = x_B + \ln y_B$$

FOC:

$$\frac{1}{y_B} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y_B = \frac{p_y}{p_x}$$

Restricción presupuestaria:

$$p_x x_B + p_y y_B = \frac{\omega}{n}(p_x + p_y)$$
$$x_B = \frac{\omega}{np_x}(p_x + p_y) - \frac{p_y}{p_x} = \frac{\omega}{n} + \frac{\omega}{n}\frac{p_y}{p_x} - \frac{p_y}{p_x}$$

Condición de equilibrio: mercado de x y y
Como hay $\frac{n}{2}$ agentes tipo A y $\frac{n}{2}$ tipo B:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{n}{2}x_A + \frac{n}{2}x_B \quad \wedge \quad \omega = \frac{n}{2}y_A + \frac{n}{2}y_B \\ &= \frac{n}{2}\cdot\frac{\omega}{n} + \frac{n}{2}\left(\frac{\omega}{n} + \frac{\omega}{n}\cdot\frac{p_y}{p_x} - \frac{p_y}{p_x}\right) \\ &= \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2}\cdot\frac{p_y}{p_x} - \frac{n}{2}\cdot\frac{p_y}{p_x}\end{aligned}$$

Agrupando:

$$\omega = \omega + \left(\frac{\omega}{2} - \frac{n}{2}\right)\cdot\frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \left(\frac{\omega}{2} - \frac{n}{2}\right)\cdot\frac{p_y}{p_x} = 0$$

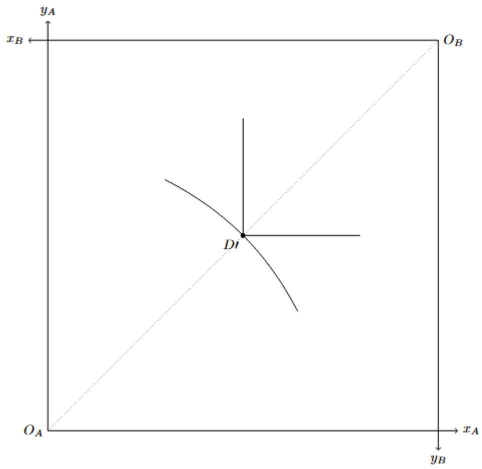
Entonces:

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{n}{\omega}$$

Consumos de equilibrio:

$$x_A = y_A = \frac{\omega}{n}$$
$$x_B = y_B = \frac{\omega}{n}$$

2. A partir de la dotación inicial y utilizando el equilibrio encontrado en el inciso anterior, muestre cómo sería el punto inicial, punto final, la zona de comercio, y la curva de contrato entre un individuo tipo A y un individuo tipo B.
   → La Caja de Edgeworth con los elementos indicados sería la siguiente:



Ejercicio 106 [N-agentes y $m+1$ bienes[6]]. Una economía está compuesta por 2 individuos quienes tienen la siguiente función de utilidad en n bienes:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \ln x_i$$

1. Encuentre los precios de equilibrio para cualquier dotación arbitraria.
   → Se tiene que:

$$\mathrm{TMS}^i_{xy_j} = \frac{i}{2\,\bar{y}_{ji}} = \frac{p_x}{p_{y_j}} \Rightarrow \bar{y}_{ji} = \frac{2}{i}\frac{p_x}{p_{y_j}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_{ji} \equiv \bar{y}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i}\frac{p_x}{p_{y_j}} \Rightarrow \frac{p_x}{p_{y_j}} = \frac{\bar{y}_j}{2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$$

[6]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Capítulo 23

Una economía con producción

Ejemplo 54 [Robinson Crusoe y los cocos[1]]. Suponga que Robinson Crusoe produce y consume pescado (F) y cocos (C). Asuma que, durante un cierto período, ha decidido trabajar 200 horas y no le importa si pasa este tiempo pescando o recolectando cocos. La producción de Robinson para peces viene dada por $F = \sqrt{\ell_F}$ y para los cocos por $C = \sqrt{\ell_c}$, donde ℓ_F y ℓ_C son la cantidad de horas dedicadas a pescar o a recolectar cocos. En consecuencia, $\ell_F + \ell_C = 200$. La utilidad de Robinson Crusoe para pescado y cocos viene dada por $u(F, C) = \sqrt{F \cdot C}$.

- Si Robinson no puede comerciar con el resto del mundo, ¿cómo elegirá asignar su trabajo? ¿Cuáles serán los niveles óptimos de F y C? ¿Cuál será su utilidad? ¿Cuál será el RPT (del pescado para los cocos)?

$$\begin{aligned} F =& \sqrt{\ell_F} \Leftrightarrow F^2 = \ell_F \\ C =& \sqrt{\ell_C} \Leftrightarrow C^2 = \ell_C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore F^2 + C^2 =& 200 \\ \Leftrightarrow 200 - F^2 =& C^2 \end{aligned}$$

$$RTP = -\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{F}{C}$$

$$\begin{aligned} TMSS_{F,C} =& \frac{\frac{1}{2}F^{\frac{-1}{2}}C^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}F^{\frac{1}{2}}C^{\frac{-1}{2}}} \\ TMSS_{F,C} =& \frac{F}{C} \end{aligned}$$

Para encontrar los niveles óptimos de F y C, la tasa marginal de transformación y la tasa marginal de sustitución deben ser iguales, es decir, $RTP_{L,C} = TMSS_{L,C}$, de forma tal que igualando:

$$\begin{aligned} \frac{F}{C} =& \frac{C}{F} \\ \Leftrightarrow F^2 =& C^2 \\ \Leftrightarrow F^2 =& 200 - F^2 \\ \Leftrightarrow 2F^2 =& 200 \\ \Leftrightarrow F^2 =& 100 \\ \Leftrightarrow F =& \pm 10 \end{aligned}$$

[1]Ejercicio tomado y transcrito de Mendoza, Daniel (2020)

Luego de descartar la alternativa negativa, se tiene que:

$$F = 10$$
$$C = 10$$

Ahora bien, como la asignación del trabajo se determina por $F^2 = \ell_F \wedge C^2 = \ell_C$, entonces dedicará 100 horas a cada uno.
En cuanto a la utilidad, $u(F,C) = \sqrt{F \cdot C} \Leftrightarrow u(10,10) = 10$. Por último, dado que los niveles óptimos de pescado y cocos son iguales, el RTP del pescado para los cocos igual a 1.

- Suponga ahora que se abre el comercio y Robinson puede comerciar pescado y cocos a una relación de precios de $\frac{p_F}{p_C} = \frac{2}{1}$. Si Robinson continúa produciendo las cantidades de F y C de la parte (a), ¿qué elegirá consumir una vez que tenga la oportunidad de comerciar? ¿Cuál será su nuevo nivel de utilidad?
  Dada la relación de precios, Robinson decidirá consumir en las cantidades tales que:

$$TMSS_{F,C} = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{C}{F} = 2$$
$$\Leftrightarrow C = 2F$$

Junto con esto, la recta presupuestaria de Robinson ante esta relación de precios es:

$$2F + C = 2 \cdot 10 + 10$$
$$\Leftrightarrow 2F + C = 30$$

Sustituyendo $C = 2F$, se tiene que:

$$4F = 30$$
$$F = 7{,}5$$

Y como C es del doble de F, el consumo de C es de 15. Además, el nuevo nivel de utilidad será: $u(7{,}5, 15) = \frac{15\sqrt{2}}{2}$. En este caso, Robinson se encuentra en una situación que le genera más utilidad que en el inciso (a), por lo que es más conveniente que este.

- ¿Cómo respondería usted ante el cambio de la parte (b) si Robinson ajusta su producción para aprovechar los precios mundiales?
  En el caso de que Robinson ajustara su producción tendría que producir de forma que:

$$RTP = \frac{F}{C} = 2 \Leftrightarrow F = 2C \Leftrightarrow F^2 = 4C^2$$
$$\Leftrightarrow 200 - C^2 = 4C^2 \Leftrightarrow 40 = C^2$$
$$C_p = 2\sqrt{10}$$
$$F_p = 4\sqrt{10}$$

Debido a la nueva relación de precios y al cambio en las cantidades producidas, la nueva restricción presupuestaria de Robinson Crusoe es la siguiente:

$$2F_C + C_C = 2F_p + C_p \Leftrightarrow 2F_C + C_C = 2 \cdot 4\sqrt{10} + 2\sqrt{10}$$
$$\Leftrightarrow 2F_C + C_c = 10\sqrt{10}$$
$$C_C + C_c = 10\sqrt{10}$$
$$\Leftrightarrow C_C = 5\sqrt{10}$$
$$\Leftrightarrow F_C = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

Además, el nuevo nivel de utilidad será de $5\sqrt{5}$. Este es el caso más deseable para Robinson Crusoe ya que produce dentro de su frontera de posibilidades de producción, pero consumo fuera de ella, en un punto donde su utilidad es mayor que en (a) y (b). Por lo tanto, este es el mejor de los tres casos.

- Grafique sus resultados para las partes (a), (b) y (c).

Ejercicio 107 [Teoremas del comercio[2]].

Ejercicio 108 [Teoremas del comercio y función de mínimos[3]].

Ejercicio 109 [Teoremas del comercio y producción con dotación[4]].

[2]Ejercicio tomado de Casasola (2024)
[3]Ejercicio tomado de Casasola (2024)
[4]Ejercicio tomado de Casasola (2024)

Parte IV

Equilibrio de Mercado

El primer gran tema de estudio en la teoría microeconómica es una especie de repaso muy básico de un tema del curso de introducción a la economía: el equilibrio de mercado. Para efectos de este curso, será útil pensar en un mercado como una institución en la cual interactúan dos grandes elementos o fenómenos: la oferta y la demanda. A partir de este gran modelo básico y primitivo de lo que es un mercado, se pueden introducir complicaciones o elementos adicionales: un gobierno, impuestos de suma fija, impuestos proporcionales, externalidades, subsidios, etc.

Para estos efectos, es importante tomar en cuenta que la teoría microeconómica requiere de un instrumental matemático fundamental: el cálculo. Además, con respecto a cursos anteriores, este curso implica un gran cambio fundamental: a partir de ahora, lo normal será el uso de las funciones multivariables. Esto quiere decir que entonces a menudo será fundamental también conocer el instrumental básico del álgebra lineal y el cálculo en varias variables.

Este capítulo, además de introducir el tema de equilibrio de mercado, será la última oportunidad para repasar el instrumental matemático pre-cálculo así como una ligera introdución al cálculo en varias variables.

En esencia, puede entenderse un equilibrio de mercado como una situación particular: una situación o estado en el cual hay una falta de tendencia al cambio, razón por la cual, al análisis del equilibrio de mercado suele conocerse como análisis estático. De momento, no se hacen consideraciones éticas o morales de dicho estado equilibrio (si es deseable, no deseable, injusto, moral, etc.), sino que lo importante, de momento, es comprender que el equilibrio es una situación en la cual, de mantenerse las variables externas fijas, tenderá a mantenerse en perpetuidad.

Capítulo 24

Modelos económicos

Un modelo económico es una marco analítico deliberadamente simplificado cuyo propósito es ser una representación de la economía real. De esta manera, todo modelo económico es una abstracción de la realidad, y por tanto, necesariamente implicará una selección de factores y relaciones por estudiar en el modelo, dado que, en principio, sería (prácticamente) imposible incorporar en un modelo todas las posibles interrelaciones que ocurren en la realidad económica.

Inicialmente, los modelos económicos eran de orden intuitivo y político, y con el pasar de los años, estos han ido evolucionando, adquiriendo cada vez más complejidad, principalmente por medio de la introducción de las matemáticas. Así, las relaciones y condiciones asumidas para un determinado modelo económico-matemático, generalmente son planteadas mediante ecuaciones que describen la estructura del modelo.

Es por esta razón que es una sana práctica, antes de comenzar propiamente con los modelos, estudiar cómo funcionan estos modelos. Generalmente, estos modelos contienen variables, constantes y parámetros.

Definición 41 [Variable]. Se define como variable a aquel valor que no permanece inalterado o cambia. El valor de una variable suele variar según los parámetros y alcances de un problema determinado. Generalmente se le denota a las constantes con las letras: z,y,x... En economía, algunas variables, por ejemplo, pueden ser: el precio, la cantidad, los bienes, los insumos, etc.

Lo usual es que, si un modelo económico está correctamente construido, este debe poder ser solucionado de tal manera que se puedan obtener una serie de valores que solucionen cierto conjunto de variables. Dichas variables del modelo, son variables llamadas **endógenas**. Sin embargo, también es posible que el modelo asuma la presencia de "fuerzas.$^{\text{ex}}$ternas al modelo, las cuales se asumen como dadas, las cuales se llaman variables **exógenas**.

Es común ver que las variables, en ocasiones, aparezcan combinadas o al lado de constantes, como por ejemplo $7p$ o $5q$.

Definición 42. Se define como constante a aquel valor que permanece inalterado o no cambia. Independientemente de que no se sepa su valor, el valor de una constante permanece fijo. Es decir, una constante es la antítesis de una variable. Es decir, que las constantes pueden ser valores denotados por números, pero, también pueden ser representadas simbólicamente. Generalmente se le denota a las constantes con las letras: a,b,c... Cuando una constante aparece unida a una variable, se le suele llamar a la constante como *coeficiente* de la variable.

En ocasiones, para alcanzar mayores grados de abstracción, las constantes de un modelo no tienen asignados valores específicos, por lo que se representan simbólicamente en lugar de numéricamente. En estos casos, las constantes pueden variar, como las variables, pero para efectos del modelo, son asumidos como valores constantes desconocidos, por lo que se les conoce como parámetros.

Capítulo 25

Equilibrio parcial de mercado: un modelo lineal

El problema de un equilibrio parcial, usualmente se reduce a hallar el conjunto de variables endógenas (precio y cantidad) que garanticen una condición de equilibrio para el modelo. De esta manera, en este primer tema se estudiará el análisis de mercados aislados.

Así, en el mercado de una determinada mercancía o servicio cualquiera, se definen 4 variables endógenas:

- Precio de demanda
- Precio de oferta
- Cantidad demandada
- Cantidad ofrecida

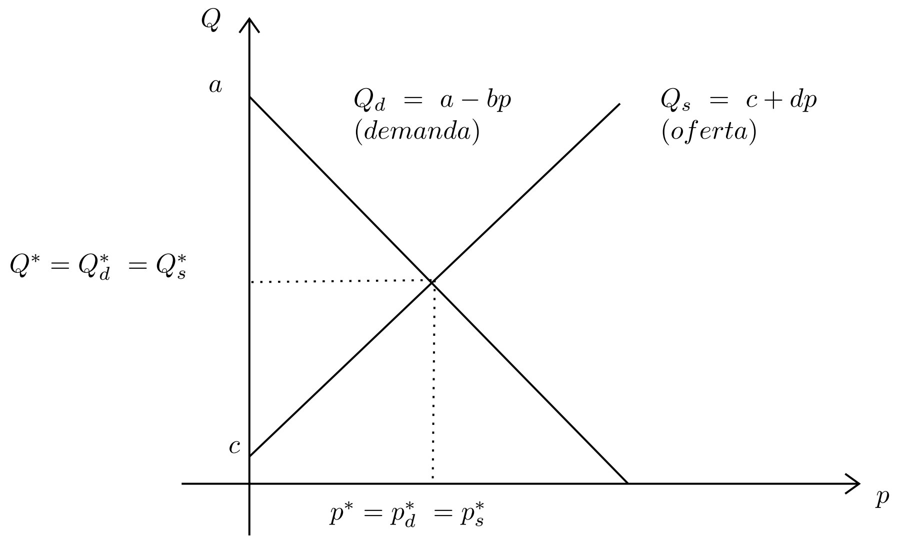
La condición de equilibrio en estos modelos se define como el estado o situación en que el exceso de demanda, es igual a 0. Esta condición se resume bajo la siguiente ecuación:

$$Q_s = Q_d \Leftrightarrow Q_s - Q_d = 0 \tag{25.1}$$

Esta condición de equilibrio también es conocida como condición de vaciado de mercado.

Así, Q_s y Q_d se definen como funciones del precio ofrecido y del precio demandado respectivamente. La función de demanda $Q_d(P_d)$ es una función lineal decreciente en precio, mientras que la función de oferta $Q_s(P_s)$ es una función lineal creciente en precio. Además, es necesario añadir una condición adicional: el mercado ocurre y transa siempre y cuando el precio al cual se tranza la mercancía o servicio, sea positivo. De lo contrario, el mercado no puede existir.

Geométricamente, el equilibrio de mercado se puede observar como sigue:



Matemáticamente, el modelo se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_s \\ Q_d &= a - bp \qquad (a, b > 0) \\ Q_s &= c + dp \qquad (d > 0) \end{aligned} \tag{25.2}$$

Note que en la función de oferta, el parámetro c puede ser positivo, negativo o igual a 0, ante lo cual la gráfica de la función variará correspondientemente. Note que quizá el supuesto donde $c < 0$ sería el que mejor represente la condición necesaria de un precio positivo para que ocurra el mercado. Además, la necesariedad de que $d > 0$ sea estrictamente positiva, representa la relación positiva y creciente entre la cantidad ofrecida y el precio ofrecido. Sin embargo, más adelante se estudiará la posibilidad de que la pendiente de la curva de oferta, sea perfectamente horizontal, es decir $d = 0$.

En el caso de la función de demanda, b sí debe ser necesariamente positivo, para que $-b < 0$, es decir, que su opuesto debe ser negativo, y con ello la pendiente de la función de demanda siempre ha de ser negativa, esto en representación de que, existe una relación inversa entre la cantidad demandada y el precio demandado.

Nótese que, de en apego a la convención matemática, en una función de la forma $y = f(x)$, la variable dependiente, es decir y, se grafica en el eje vertical, mientras que la variable indepediente x, es graficada en el eje horizontal. En el caso anterior, al representarse una función de la forma $Q = f(p)$, la cantidad q se grafica verticalmente mientras que el precio p, horizontalmente.

En ocasiones, se recurrirá a una notación de la forma $p = f(Q)$, es decir, el precio en función de la cantidad, por lo que el precio se graficaría en el eje vertical y la cantidad en el eje horizontal.

La solución de un modelo de equilibrio, consiste en hallar los valores de equilibrio de las variables endógenas. Dichas variables, al encontrar los valores de equilibrio, deben garantizar las igualdades anteriormente expuestas al evaluar o sustituir dichos valores de equilibrio.

Para efectos prácticos, la condición de equilibrio de mercado señala que, en el equilibrio, tanto la cantidad ofrecida como la cantidad demandada han de ser iguales, lo mismo para el precio. Por lo tanto, el sistema de ecuaciones arriba, puede ser reducido evaluando y sustituyendo una ecuación en otra.

En el equilibrio, $Q^* = Q^*_s = Q^*_d$, a partir de lo cual, geográficamente también se puede ver que en ese punto $p^* = p^*_s = p^*_d$. Esta segunda expresión es más útil en el caso en el que se tengan funciones de la forma $p = f(Q)$. Ahora, en el caso de una función de la forma $Q = f(p)$, la condición de equilibrio de mercado señala que $Q^* = Q^*_s = Q^*_d$:

$$\begin{aligned} Q^* = Q^*_s = Q^*_d \Leftrightarrow a - bp = c + dp \\ a - c = dp + bp \Leftrightarrow a - c = p(d + b) \\ \frac{a - c}{d + b} = p^* \end{aligned} \tag{25.3}$$

Nótese que la expresión del precio de equilibrio hallada, depende únicamente de parámetros, lo cual signfica que, si los valores para dichos parámetros han sido dados, una solución numérica para p^* puede ser explícitamente encontrada.

Observe que, geométricamente, $a > c$, por lo que la expresión $a - c > 0$ siempre será positiva, extrictamente. Esto es indistamente del valor de c y de su signo, por lo cual, el numerador de la expresión siempre será positivo, y el denominador es una suma de positivos, haciendo que el precio de equilibrio siempre sea positivo, lo cual es consistente con el modelo.

En palabras sencillas, lo que se hizo fue aplicar la condición de equilibrio, para suponer que ambos precios y ambas cantidades, en el equilibrio, han de ser iguales, lo cual permite plantear un sistema de dos ecuaciones con dos variables, permitiendo plantear ambas ecuaciones en términos de la misma variable Q, para igualarlas entre ellas y simplemente despejar la variable restante, en este caso, el precio.

Ahora, sabiendo el precio de equilibrio, dicha expresión puede ser ahora sustituida en cualquiera de las dos funciones de demanda o oferta, y ahí averiguar la cantidad de equilibrio.

Así:

$$\begin{aligned} Q^*_d = a - bp^* \Leftrightarrow Q^*_d = a - b\left(\frac{a - c}{d + b}\right) \\ Q^*_d = a - \frac{b(a - c)}{d + b} \Leftrightarrow= Q^*_d = a - \frac{ab - bc}{d + b} \\ Q^*_d = \frac{a(d + b) - [(ab - bc)]}{d + b} \Leftrightarrow Q^*_d = \frac{ad + ab - ab + bc}{d + b} \\ Q^*_d = \frac{ad + bc}{d + b} \end{aligned} \tag{25.4}$$

Observe qué hubiera pasado si más bien se hubiera sustituido en la función de la cantidad ofrecida:

$$
\begin{aligned}
Q_s^* = c + dp^* \Leftrightarrow Q_s^* = c + d\left(\frac{a-c}{d+b}\right) \\
Q_s^* = c + \frac{d(a-c)}{d+b} \Leftrightarrow Q_s^* = c + \frac{ad-cd}{d+b} \\
Q_s^* = \frac{c(d+b)+ad-cd}{d+b} \Leftrightarrow Q_s^* = \frac{cd+bc+ad-cd}{d+b} \\
Q_s^* = \frac{bc+ad}{d+b} \Leftrightarrow Q_s^* = \frac{ad+bc}{d+b}
\end{aligned}
\tag{25.5}
$$

Observe que la expresión para la cantidad ofrecida es la misma que se encontró en la cantidad demandada.

Es decir, que la cantidad de equilibrio es la misma indistintamente de si se evalúa el precio de equilibrio en la cantidad demandada o en la cantidad ofrecida, lo cual refuerza la idea de que en el equilibrio, la cantidad de equilibrio es la misma tanto para la oferta como para la demanda.

Ahora, observe que en la expresión de la cantidad de equilibrio, el denominador es una suma entre d y b, y al ser ambos positivos, la suma será también positiva. Ahora, para que en el mercado se trance una cantidad positiva, deberá ser el caso que $ad > bc$, puesto que como señaló anteriormente, podría ser el caso que $c < 0$, por lo que podría tenerse una expresión como $ad - bc$, y así, se garantiza que la intersección entre la oferta y la demanda, sea por encima del eje horizontal, es decir, que haya una cantidad de equilibrio positiva tranzada.

Capítulo 26

La función de demanda

[1] **Para efectos de este capítulo**[2], resulta útil pensar en la demanda como una relación entre dos grandes elementos: la cantidad demandada y el precio. Dicha relación, puede ser representada por medio de una ecuación, a la cual se le conocerá como función de demanda.

Tómese entonces una ecuación de demanda básica como una ecuación de la forma:

$$q = a - bp \tag{26.1}$$

Nótese que para este primer capítulo, por una cuestión meramente ilustrativa y de simplicidad, se presenta una ecuación de demanda como una relación lineal e inversa entre la cantidad demandada (q) y el precio (p). Nótese que la simplicidad radica en la similitud presente con la función lineal tradicional estudidada desde el colegio.

Es así que entonces si esta ecuación se tratase como una función, y se tratase de de graficar esta representación lineal, se obtendría algo similar de la siguiente manera:

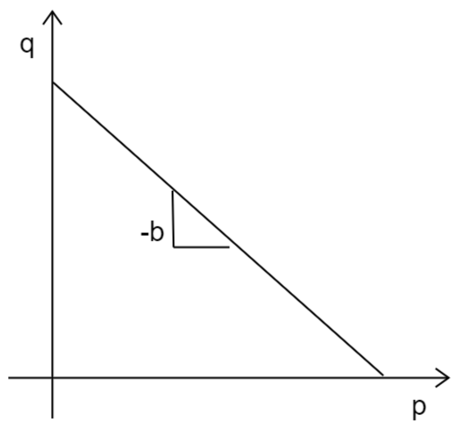


Figura 26.1: Una demanda lineal tradicional básica

Nota algo particular? Recuerde que en las funciones de la forma $f(x) = y$, la variable y, es dependiente de la variable x, siendo que entonces x es una variable independiente. A esto se le suele conocer como función de demanda: una función en donde la demanda queda en función del precio. Nótese que esto, matemáticamente, sería decir que la cantidad (q) es la variable dependiente del precio (p), que sería la variable independiente.

Nótese que según lo que se ha aprendido tradicionalmente, las funciones $f(x) = y$ se suelen graficar de manera que la variable independiente se grafica en el eje horizontal (eje de las abscisas), y la variable dependiente se grafica verticalmente (eje de las ordenadas).

[1] Consultar : Vicuña, 2017

[2] Es importante tener presente que para la gran parte de este curso, la tendencia será utilizar el cálculo multivariable y las funciones, no las ecuaciones.

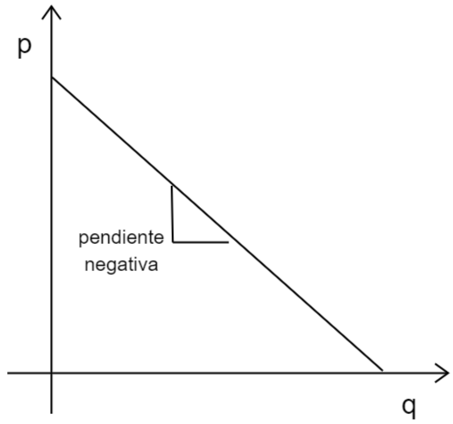


Figura 26.2: Una función de demanda que representa al precio como variable dependiente de la cantidad

Ahora, recuerde que por ley de demanda, debe ser que haya una relación inversa entre la cantidad demandada y el precio, lo cual sí se ve reflejado en la ecuación de demanda presentada. Sin embargo, es hora de introducir uno de los conceptos más importantes de la economía: *la demanda marshalliana*.

De momento, lo importante a saber sobre las demandas de Marshall radica en un elemento gráfico y no tanto matemático:

Nótese ahora, que se está presentando a la demanda como una relación en la cual el precio es la variable dependiente de la cantidad, puesto que se está graficando la función con el precio en el eje de las ordenadas.

Sin embargo, observe que la forma de la función de demanda tiene al precio como la variable independiente, y es la cantidad que depende del precio, sin embargo, las demandas marshallianas se grafican con el precio como variable dependiente de la cantidad, lo cual no correspondería con la función presentada.

Esto se hace así por una conveniencia gráfica, lo cual quedará más claro cuando se introduzca el tema de la oferta, la cual presenta una relación positiva entre el precio y la cantidad, por lo cual, gráficamente será más conveniente verlo en términos de demandas marshallianas.

26.1. Elasticidad de demanda

La elasticidad es una medida de sensibilidad o de respuesta de una variable ante un cambio en otra variable relacionada. A continuación se introducen algunas de las medidas de elasticidad más comunes para la elasticidad.

Definición 43 [Elasticidad]. Defínase la elasticidad de la demanda como el cambio porcentual en una variable ante un cambio porcentual en otra variable.

26.1.1. Elasticidad precio

La elasticidad precio es una medida de sensiblidad de la cantidad demandada ante un cambio en el precio.

Definición 44. Defínase la elasticidad precio de la demanda como el cambio porcentual en la cantidad demandada ante un cambio en el precio.

$$\mathcal{E} = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} \tag{26.2}$$

26.1.2. Clasificación de la elasticidad precio

- Demanda perfectamente inelástica $\mathcal{E} = 0 \Rightarrow$ una variación en el precio no provoca cambios en la cantidad demandada.

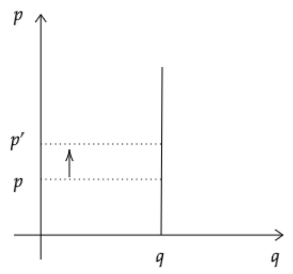


Figura 26.3: Una función de demanda perfectamete inelástica

- Demanda inelástica $\mathcal{E} < 1 \Rightarrow$ la variación porcentual en el precio es mayor que la variación porcentual en la cantidad.

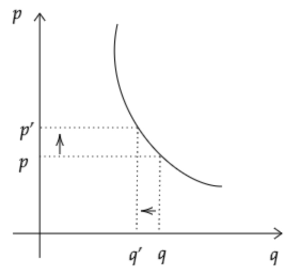


Figura 26.4: Una función de demanda inelástica

- Demanda de elasticidad unitaria $\mathcal{E} = 1 \Rightarrow$ la variación porcentual en el precio es igual a la variación porcentual en la cantidad demandada.

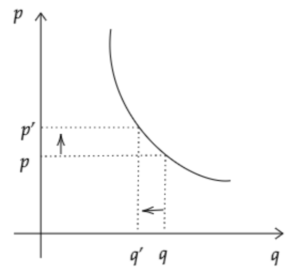


Figura 26.5: Una función de demanda de elasticidad unitaria

- Demanda elástica $\mathcal{E} > 1 \Rightarrow$ la variación porcentual en el precio es menor que la variación porcentual en la cantidad.

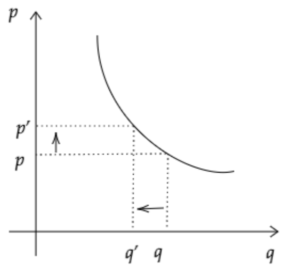


Figura 26.6: Una función de demanda elástica

- Demanda perfectamente elástica $\mathcal{E} = \infty \Rightarrow$
$$\begin{cases} \text{Si el precio es superior al precio de equilibrio entonces la cantidad demandada es cero} \\ \text{Si el precio es igual al precio de equilibrio la cantidad demandada} \in [0, +\infty[\\ \text{Si el precio es menor al precio de equilibrio entonces la cantidad demandada es infinita, se indefine} \end{cases}$$

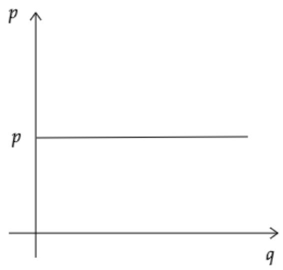


Figura 26.7: Una función de demanda perfectament elástica

26.1.3. Elasticidad precio para un precio fijo

Dado que lo que se quieren examinar son cambios porcentuales, se puede expresar la elasticidad precio de la demanda, dado un precio fijo $\hat{p}$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = \frac{q_1 - q_0}{p_1 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{q_1} \tag{26.3}$$

Haciendo estática comparativa en aras de alcanzar un resultado general, suponga el siguiente escenario en el cual se comparan varias demandas que comparten un mismo precio de comparación $\hat{p}$. La intención es encontrar alguna forma en la que se pueda, gráficamente, distinguir distintas funciones de demanda con base en sus elasticidades precio:

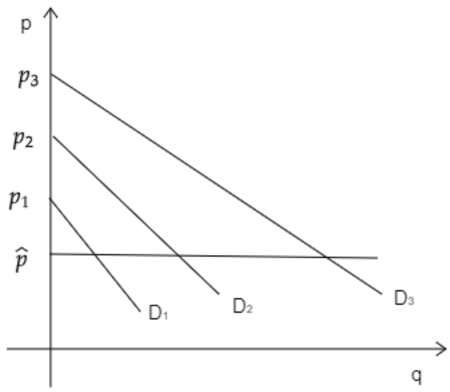


Figura 26.8: Varias funciones de demanda intersecadas por un mismo precio $\hat{p}$.

Observe que para estas demandas, también se tienen las respectivas cantidades alcanzadas al precio $\hat{p}$ como a continuación:

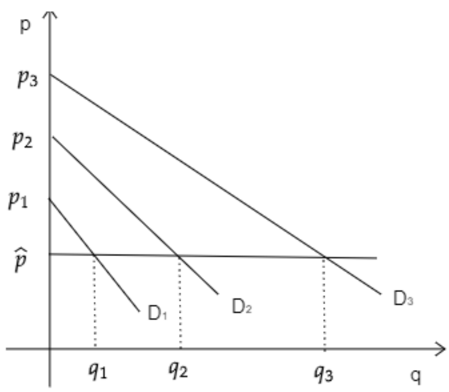


Figura 26.9: Funciones de demanda y sus cantidades respectivas cantidades al precio $\hat{p}$.

Ahora, procédase a encontrar las elasticidades precio para cada una de las funciones de demanda:

- $\mathcal{E}_1 = \frac{q_1-0}{p_1-\hat{p}}\frac{\hat{p}}{q_1} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{\cancel{q_1}}{p_1-\hat{p}}\frac{\hat{p}}{\cancel{q_1}} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{\hat{p}}{p_1-\hat{p}}$
- $\mathcal{E}_2 = \frac{q_2-0}{p_2-\hat{p}}\frac{\hat{p}}{q_2} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{\cancel{q_2}}{p_2-\hat{p}}\frac{\hat{p}}{\cancel{q_2}} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{\hat{p}}{p_2-\hat{p}}$
- $\mathcal{E}_3 = \frac{q_3-0}{p_3-\hat{p}}\frac{\hat{p}}{q_3} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{\cancel{q_3}}{p_3-\hat{p}}\frac{\hat{p}}{\cancel{q_3}} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{\hat{p}}{p_3-\hat{p}}$

Note que todas las elasticidades anteriores tienen el mismo numerador, lo único que varía es la expresión del denominador. Ahora, note la relación existente entre los diversos precios: $p_3 > p_2 > p_1 > \hat{p}$, mientras que para las cantidades se tiene que: $q_3 > q_2 > q_1$.

Entonces, a partir de la relación de los precios, se puede decir entonces que:

$$|p_3 - \hat{p}| > |p_2 - \hat{p}| > |p_1 - \hat{p}|$$

Note entonces que la la expresión del denominador de la primera elasticidad es menor que la de la segunda elasticidad, y esta a su vez, es menor que la expresión del denominador de la tercera elasticidad. Y recuerde que: $\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \quad \forall b < c$.

Es así que entonces se concluye que:

$$\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_3$$

Note que la conclusión general que se puede extraer de aquí es que: **a medida que una demanda interseca el eje de precios más alto o más arriba, más inelástica es la elasticidad precio.** Note que para efectos de una función de demanda básica de la forma $q = a - bp \Rightarrow p = \frac{a}{b} - \frac{q}{b}$, esto se traduce a que mayor $\frac{a}{b}$, más inelástica la demanda. Recuerde que en las funciones de demanda de esta forma lineal, $\frac{a}{b}$ es la intersección con el eje de los precios, lo cual puede ser interpretado en términos económicos como la máxima disposición a pagar por una mercancía.

Así pues, intuitivamente puede decirse que: *a mayor máxima disposición de pago, menos inelástica en términos de precio, es la demanda.* Esto puede ser muy intuitivo, puesto que mientras mayor sea la máxima disposición de pago, menos se verá afectada la cantidad demandada ante cambios en los precios.

26.1.4. Elasticidad precio para una cantidad fija

Dado que lo que se quieren examinar son cambios porcentuales, se puede expresar la elasticidad precio de la demanda, dado una cantidad fija $\hat{q}$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = \frac{q_1 - \hat{q}}{p_1 - p_0} \frac{\hat{p}}{q_1} \tag{26.4}$$

Haciendo estática comparativa en aras de alcanzar un resultado general, suponga el siguiente escenario en el cual se comparan varias demandas que comparten una misma cantidad de comparación $\hat{q}$. La intención es encontrar alguna forma en la que se pueda, gráficamente, distinguir distintas funciones de demanda con base en sus elasticidades precio:

Observe que para estas demandas, también se tienen los respectivos precios alcanzados a la cantidad $\hat{q}$ como

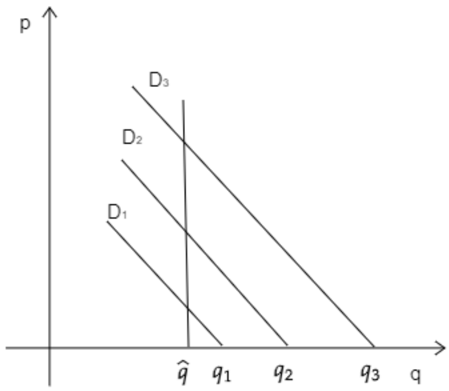


Figura 26.10: Varias funciones de demanda intersecadas por una misma cantidad $\hat{q}$.

a continuación:

Ahora, procédase a encontrar las elasticidades precio para cada una de las funciones de demanda:

- $\mathcal{E}_1 = \frac{q_1 - \hat{q}}{p_1 - 0} \frac{\hat{p}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{q_1 - \hat{q}}{\cancel{p_1}} \frac{\cancel{p_1}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{q_1 - \hat{q}}{\hat{q}}$
- $\mathcal{E}_2 = \frac{q_2 - \hat{q}}{p_2 - 0} \frac{\hat{p}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{q_2 - \hat{q}}{\cancel{p_2}} \frac{\cancel{p_2}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{q_2 - \hat{q}}{\hat{q}}$
- $\mathcal{E}_3 = \frac{q_3 - \hat{q}}{p_3 - 0} \frac{\hat{p}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{q_3 - \hat{q}}{\cancel{p_3}} \frac{\cancel{p_3}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{q_3 - \hat{q}}{\hat{q}}$

Note que todas las elasticidades anteriores tienen el mismo denominador, lo único que varía es la expresión del numerador. Ahora, note la relación existente entre los diversos precios: $p_3 > p_2 > p_1$, mientras que para las cantidades se tiene que: $q_3 > q_2 > q_1 > \hat{q}$.

Entonces, a partir de la relación de las cantidades, se puede decir entonces que:

$$|q_3 - \hat{p}| > |q_2 - \hat{p}| > |q_1 - \hat{p}|$$

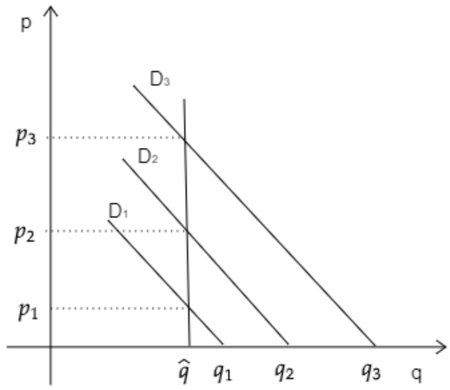


Figura 26.11: Funciones de demanda y sus precios respectivos a la misma cantidad $\hat{q}$.

Note entonces que la la expresión del numerador de la primera elasticidad es menor que el numeraodor de la segunda elasticidad, y esta a su vez, es menor que la expresión del numerador de la tercera elasticidad. Es así que entonces se concluye que:

$$\mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$$

Note que la conclusión general que se puede extraer de aquí es que: **a medida que una demanda interseca el eje de la cantidad más alto o más a la derecha, más elástica es la elasticidad precio.** Note que para efectos de una función de demanda básica de la forma $q = a - bp \Rightarrow p = \frac{a}{b} - \frac{q}{b}$, y la intersección con el eje de la cantidad sería de la forma $0 = \frac{a}{b} - \frac{q}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{q}{b} \Rightarrow a = q$ esto se traduce a que mayor a, más elástica la demanda. Recuerde que en las funciones de demanda de esta forma lineal, a es la intersección con el eje de la cantidad.

Capítulo 27

La función de oferta

Para efectos de este capítulo, resulta útil pensar en la oferta como una relación entre dos grandes elementos: la cantidad ofrecida y el precio. Dicha relación, puede ser representada por medio de una función, a la cual se le conocerá como función de oferta.

Tómese entonces una función de oferta básica como una ecuación de la forma:

$$q = c + dp \tag{27.1}$$

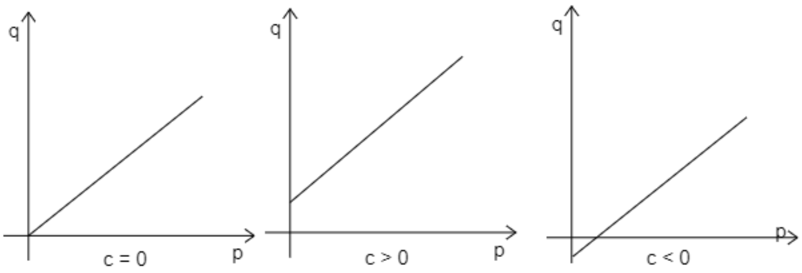


Figura 27.1: Tres posibles casos de una función de oferta

Es importante señalar que en el lado de la oferta, queda en evidencia una relación positiva entre el precio y la cantidad ofrecida. Se suele decir que el área bajo la función de oferta representa los costos de la producción.

27.1. Elasticidad de oferta

La elasticidad es una medida de sensibilidad o de respuesta de una variable ante un cambio en otra variable relacionada. A continuación se introducen algunas de las medidas de elasticidad más comunes para la elasticidad.

$$\mathcal{E} = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} \tag{27.2}$$

Definición 45. Defínase la elasticidad precio de la oferta como el cambio porcentual en la cantidad ofrecida ante un cambio en el precio.

27.1.1. Elasticidad precio

La elasticidad precio es una medida de sensiblidad de la cantidad ofrecida ante un cambio en el precio.

$$\mathcal{E} = \frac{dq_s}{dp}\frac{p}{q_s} \tag{27.3}$$

27.1.2. Clasificación de la elasticidad precio

- Oferta perfectamente inelástica $\mathcal{E} = 0 \Rightarrow$ una variación en el precio no provoca cambios en la cantidad demandada.

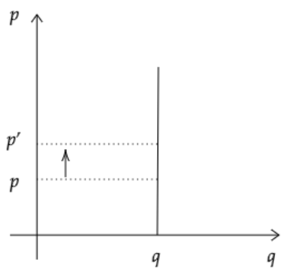


Figura 27.2: Una función de oferta perfectamete inelástica

- Oferta inelástica $\mathcal{E} < 1 \Rightarrow$ la variación porcentual en el precio es mayor que la variación porcentual en la cantidad.

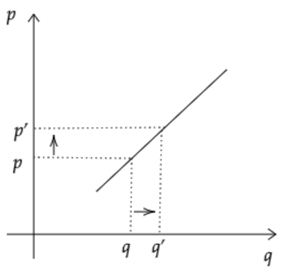


Figura 27.3: Una función de oferta inelástica

- Oferta de elasticidad unitaria $\mathcal{E} = 1 \Rightarrow$ la variación porcentual en el precio es igual a la variación porcentual en la cantidad demandada.

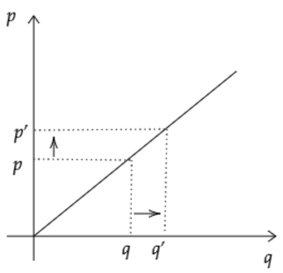


Figura 27.4: Una función de oferta de elasticidad unitaria

- Oferta elástica $\mathcal{E} > 1 \Rightarrow$ la variación porcentual en el precio es menor que la variación porcentual en la cantidad.

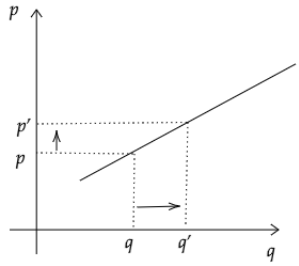


Figura 27.5: Una función de oferta elástica

- Oferta perfectamente elástica $\mathcal{E} = \infty \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{Si el precio es superior al precio de equilibrio entonces la cantidad ofrecio es infinita, se indefine} \\ \text{Si el precio es igual al precio de equilibrio la cantidad ofrecida} \in [0, +\infty[\\ \text{Si el precio es menor al precio de equilibrio entonces la cantidad ofrecio es cero} \end{cases}$$

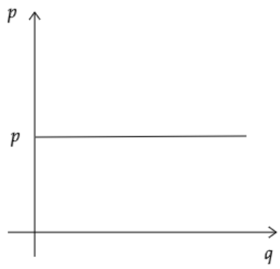


Figura 27.6: Una función de oferta perfectament elástica

27.1.3. Elasticidad precio para un precio fijo

Dado que lo que se quieren examinar son cambios porcentuales, se puede expresar la elasticidad precio de la oferta, dado un precio fijo $\hat{p}$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = \frac{q_1 - q_0}{p_1 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{q_1} \tag{27.4}$$

Haciendo estática comparativa en aras de alcanzar un resultado general, suponga el siguiente escenario en el cual se comparan varias ofertas que comparten un mismo precio de comparación $\hat{p}$. La intención es encontrar alguna forma en la que se pueda, gráficamente, distinguir distintas funciones de demanda con base en sus elasticidades precio:

Observe que para estas ofertas, también se tienen las respectivas cantidades alcanzadas al precio $\hat{p}$ como a continuación:

Ahora, procédase a encontrar las elasticidades precio para cada una de las funciones de oferta:

- $\mathcal{E}_1 = \frac{q_1 - 0}{p_1 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{q_1} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{\cancel{q_1}}{p_1 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{\cancel{q_1}} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{\hat{p}}{p_1 - \hat{p}}$
- $\mathcal{E}_2 = \frac{q_2 - 0}{p_2 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{q_2} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{\cancel{q_2}}{p_2 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{\cancel{q_2}} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{\hat{p}}{p_2 - \hat{p}}$
- $\mathcal{E}_3 = \frac{q_3 - 0}{p_3 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{q_3} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{\cancel{q_3}}{p_3 - \hat{p}} \frac{\hat{p}}{\cancel{q_3}} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{\hat{p}}{p_3 - \hat{p}}$

Note que todas las elasticidades anteriores tienen el mismo numerador, lo único que varía es la expresión del denominador. Ahora, note la relación existente entre los diversos precios: $p_3 > p_2 > p_1 > \hat{p}$, mientras que para las cantidades se tiene que: $q_3 > q_2 > q_1$.

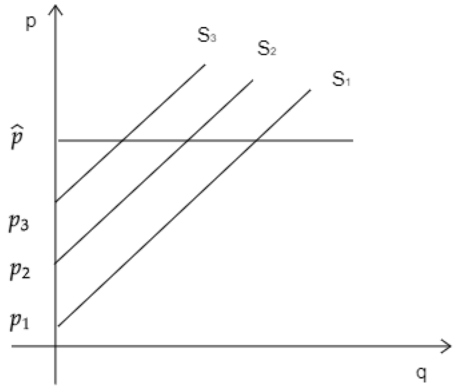


Figura 27.7: Varias funciones de oferta intersecadas por un mismo precio $\hat{p}$.

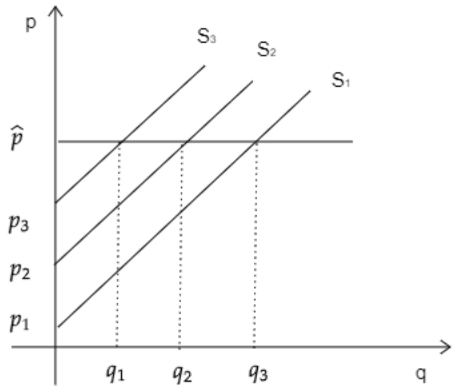


Figura 27.8: Funciones de oferta y sus cantidades respectivas cantidades al precio $\hat{p}$.

Entonces, a partir de la relación de los precios, se puede decir entonces que:

$$|p_3 - \hat{p}| < |p_2 - \hat{p}| < |p_1 - \hat{p}|$$

Note entonces que la la expresión del denominador de la primera elasticidad es mayor que la de la segunda elasticidad, y esta a su vez, es mayor que la expresión del denominador de la tercera elasticidad. Y recuerde que: $\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \quad \forall b < c$.

Es así que entonces se concluye que:

$$\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_3$$

Note que la conclusión general que se puede extraer de aquí es que: **a medida que una oferta interseca el eje de precios más alto o más arriba, más elástica es la elasticidad precio.** Note que para efectos de una función de oferta básica de la forma $q = c + dp \Rightarrow p = \frac{q}{b} - \frac{c}{b}$, esto se traduce a que mayor $\frac{c}{b}$, más inelástica la demanda. Recuerde que en las funciones de oferta de esta forma lineal, $\frac{c}{b}$ es la intersección con el eje de los precios, lo cual puede ser interpretado en términos económicos como el costo m ínimo a pagar por producir una mercancía.

Así pues, intuitivamente puede decirse que: *a menor costo por producir una unidad adicional, más inelástica en términos de precio, es la oferta.* Esto puede ser muy intuitivo, puesto que mientras menor sea el costo por producir una unidad adicional, menos se verá afectada la cantidad ofrecida ante cambios en los precios.

27.1.4. Elasticidad precio para una cantidad fija

Dado que lo que se quieren examinar son cambios porcentuales, se puede expresar la elasticidad precio de la oferta, dado una cantidad fija $\hat{q}$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = \frac{q_1 - \hat{q}}{p_1 - p_0}\frac{\hat{p}}{q_1} \tag{27.5}$$

Haciendo estática comparativa en aras de alcanzar un resultado general, suponga el siguiente escenario en el cual se comparan varias demandas que comparten una misma cantidad de comparación $\hat{q}$. La intención

es encontrar alguna forma en la que se pueda, gráficamente, distinguir distintas funciones de demanda con base en sus elasticidades precio:
Observe que para estas demandas, también se tienen los respectivos precios alcanzados a la cantidad $\hat{q}$ como

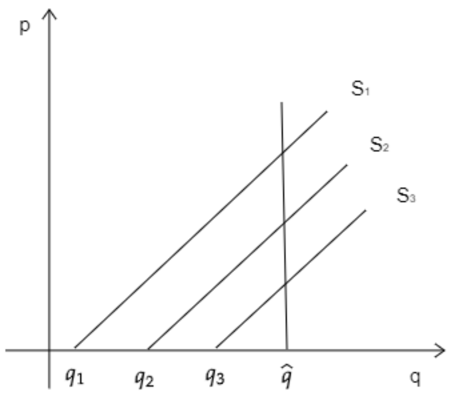


Figura 27.9: Varias funciones de oferta intersecadas por una misma cantidad $\hat{q}$.

a continuación:

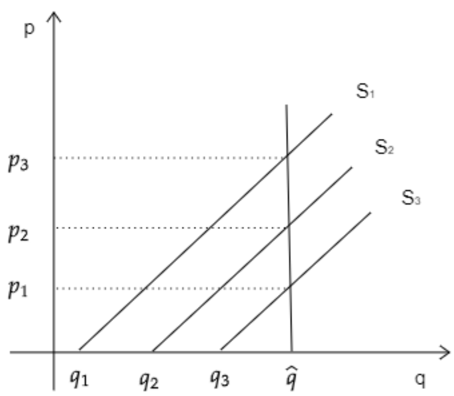


Figura 27.10: Funciones de ofertas y sus precios respectivos a la misma cantidad $\hat{q}$.

Ahora, procédase a encontrar las elasticidades precio para cada una de las funciones de demanda:

- $\mathcal{E}_1 = \frac{q_1-\hat{q}}{p_1-0}\frac{\hat{p}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{q_1-\hat{q}}{\cancel{p_1}}\frac{\cancel{p_1}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{q_1-\hat{q}}{\hat{q}}$
- $\mathcal{E}_2 = \frac{q_2-\hat{q}}{p_2-0}\frac{p_2}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{q_2-\hat{q}}{\cancel{p_2}}\frac{\cancel{p_2}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = \frac{q_2-\hat{q}}{\hat{q}}$
- $\mathcal{E}_3 = \frac{q_3-\hat{q}}{p_3-0}\frac{p_3}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{q_3-\hat{q}}{\cancel{p_3}}\frac{\cancel{p_3}}{\hat{q}} \Rightarrow \mathcal{E}_3 = \frac{q_3-\hat{q}}{\hat{q}}$

Note que todas las elasticidades anteriores tienen el mismo denominador, lo único que varía es la expresión del numerador. Ahora, note la relación existente entre los diversos precios: $p_3 > p_2 > p_1$, mientras que para las cantidades se tiene que: $q_3 > q_2 > q_1 > \hat{q}$.

Entonces, a partir de la relación de las cantidades, se puede decir entonces que:

$$|q_3 - \hat{p}| < |q_2 - \hat{p}| < |q_1 - \hat{p}|$$

Note entonces que la la expresión del numerador de la primera elasticidad es menor que el numeraodor de la segunda elasticidad, y esta a su vez, es menor que la expresión del numerador de la tercera elasticidad.

Es así que entonces se concluye que:

$$\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$$

Note que la conclusión general que se puede extraer de aquí es que: **a medida que una oferta interseca el eje de la cantidad más alto o más a la derecha, más inelástica es la elasticidad precio.** Note que para efectos de una función de oferta básica de la forma $q = c + dp \Rightarrow p = \frac{q}{b} - \frac{c}{b}$, y la intersección con el eje de la cantidad sería de la forma $0 = \frac{q}{b} - \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{q}{b} \Rightarrow c = q$ esto se traduce a que mayor c, más inelástica la oferta.

Capítulo 28

El equilibrio en el mercado

Definición 46 [Mercado]. Defínase un mercado como el medio a través del cual se desarrolla el intercambio de bienes y servicios entre demandantes y oferentes, ya sea directamente, o mediante la intervención de intermediarios o instituciones.

Para efectos de este capítulo, piénsese en un mercado como el escenario en el cual interactuúan la oferta y la demanda, y eventualmente, el gobierno. Es en este mercado, en el cual se ha de alcanzar un equilibrio y a partir del cual se define la cantidad y precio de equilibrio.

Dicho mercado puede ser alterado mediante la introducción de impuestos, subsidios, aranceles, etc.

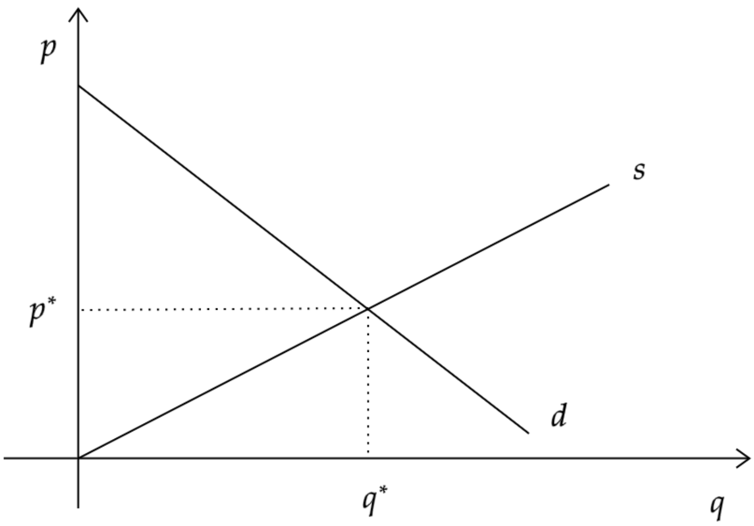


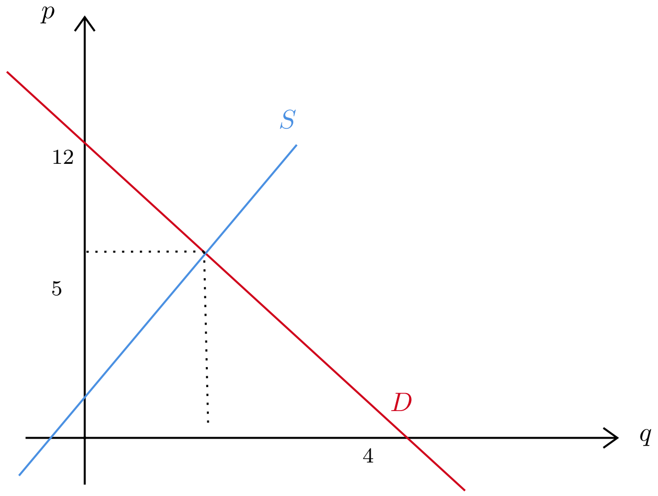
Figura 28.1: Con un mercado en equilibrio se puede determinar la cantidad y el precio de equilibrio

Entonces el equilibrio en un mercado de oferta y demanda sería el punto en el cual la oferta y la demanda se igualan, siendo que las coordenadas de ese punto geométrico (q^*, p^*) son el precio y cantidad de equilibrio.

Ejemplo 55 [Ejemplo de mercado]. Suponga que en el mercado de una mercanciá se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\text{Demanda: } q = 12 - 3p$$
$$\text{Oferta: } q = 1 + 2p$$

Dicha situación de mercado se ve de la siguiente manera:



¿Cuál es el equilibrio de ese mercado? → Nótese que las ecuaciones de oferta y demanda configuran un sistema de ecuaciones lineales, el cual puede ser resuelto para encontrar el punto en el cual la oferta y la demanda son iguales, es decir, el punto en el cual las rectas se intersecan.

$$\begin{cases} q = 12 - 3p \\ \\ q = 1 + 2p \end{cases} \rightarrow 12 - 3p = 1 + 2p \Rightarrow 11 = 5p \Rightarrow \frac{11}{5} = p$$

Ahora, sabiendo que el valor de x que hace que la oferta y la demanda se igualen $p = \frac{11}{5}$, queda por encontrar la cantidad de equilibrio correspondiente al punto de equilibrio, para lo cual se puede evaluar el valor $p = \frac{11}{5}$ en cualquiera de las dos ecuaciones, pues ambas deben tener el mismo valor de q^* para $p = \frac{11}{5}$.

$$\begin{cases} q = 12 - 3(\frac{11}{5}) \Rightarrow q = 12 - \frac{33}{5} \Rightarrow q = \frac{60-33}{5} \Rightarrow q = \frac{27}{5} \\ \\ q = 1 + 2(\frac{11}{5}) \Rightarrow q = 1 + \frac{22}{5} \Rightarrow q = \frac{5+22}{5} \Rightarrow q = \frac{27}{5} \end{cases}$$

Note que al evaluar el valor de p^* en ambas ecuaciones se obtiene el mismo valor, lo cual era lo esperado, sin embargo sólo era necesario evaluarlo en una (cualquiera) de las ecuaciones.

Ejemplo 56 [Catástrofe natural]. Suponga un mercado de venta de gasolina que se ve afectado por una catástrofe. En dicho mercado, la oferta de gasolina era perfectamente inelástica e igual a 180 millones de galones antes de la catástrofe y perfectamente inelástica e igual a 150 millones después de esta. Además, la función de demanda, expresada en millones de galones, viene dada por $Q = 240 - 30P$, donde P es el precio en dólares que pagan los consumidores por cada galón de gasolina.

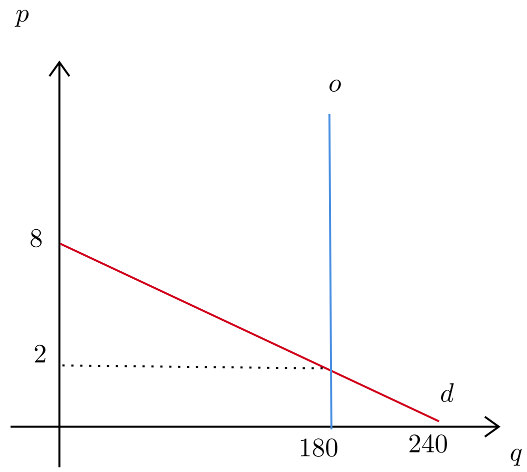
1. ¿Cuál sería el precio de equilibrio de mercado de la gasolina antes y después de la catástrofe?
   A continuación se plantean cada uno de los escenarios:
   - Antes de la catástrofe
     En el equilibrio sucede que $Q^D = Q^S$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} Q^D =& Q^S \\ \Leftrightarrow 240 - 30p =& 180 \\ \Leftrightarrow 240 - 180 =& 30p \\ \Leftrightarrow 60 =& 30p \\ \Leftrightarrow 2 =& p \end{aligned}$$

     Y por lo tanto la cantidad de equilibrio sería:

$$\begin{cases} Q^* = & 240 - 30(2) \Rightarrow Q^* = 240 - 60 \Rightarrow Q^* = 180 \\ Q^* = & 180 \end{cases}$$

Note que al tratarse de una oferta perfectamente inelástica, la cantidad de equilibrio es la cantidad ofrecida. En este caso, se dice que la oferta determina la cantidad ofrecida en el mercado pero la demanda determina el precio.



- Después de la catástrofe

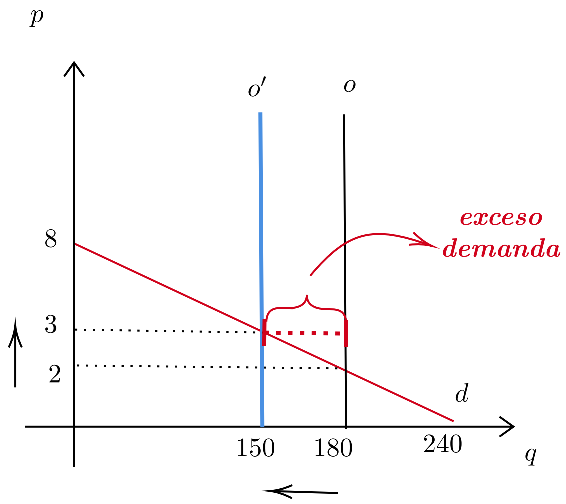
  En el equilibrio sucede que $Q^D = Q^S$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
Q^D &= Q^S \\
\Leftrightarrow 240 - 30p &= 150 \\
\Leftrightarrow 240 - 150 &= 30p \\
\Leftrightarrow 90 &= 30p \\
\Leftrightarrow 3 &= p
\end{aligned}
$$

  Y por lo tanto la cantidad de equilibrio sería:

$$
\begin{cases}
Q^* = & 240 - 30(3) \Rightarrow Q^* = 240 - 90 \Rightarrow Q^* = 150 \\
Q^* = & 150
\end{cases}
$$

  Note que, nuevamente, al tratarse de una oferta perfectamente inelástica, la cantidad de equilibrio coincide con la cantidad ofrecida nueva.



2. Suponga que tanto antes como después, se cobra un impuesto de 10 centavos por cada galón de gasolina. ¿Cuánto dinero recibirían los oferentes por galón de gasolina antes y después?
   Nuevamente se procede a analizar los casos descritos:

- Impuesto antes de la catástrofe

  Un impuesto se refleja como un encarecimiento para los demandantes, por lo cual la nueva curva de demanda que refleja el impuesto es la siguiente:

$$Q^{D'} = 240 - 30p - 10$$

  En el equilibrio sucede que $Q^{D'} = Q^S$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} Q^{D'} &= Q^S \\ \Leftrightarrow 240 - 30p - 10 &= 180 \end{aligned}$$

- Impuesto después de la catástrofe

3. Suponga que, después del desastre, se suprimió el impuesto sobre la gasolina. ¿Cuántos ingresos dejaría de recaudar el Estado por suprimir el impuesto? ¿Quiénes se benefician y quiénes resultan perjudicados por la supresión del impuesto?
4. Ahora, suponga que, después del desastre, se suprime el impuesto de 10 centavos en unos Estados, pero no en otros. Los Estados en los que se suprime representan la mitad de la demanda total. Sea p el precio de equilibrio para los consumidores de la parte del país en la que se suprime el impuesto. Formule una ecuación de la demanda total en función de p. Halle el precio pagado por los consumidores de los estados que suprimen el impuesto y el precio pagado por los consumidores de los estados que no suprimen el impuesto. ¿Cuánto dinero reciben los oferentes por galón de gasolina vendido en cada estado?

Capítulo 29

Los excedentes y la eficiencia de mercado

29.1. Excedente del consumidor

Definición 47 [Excedente del consumidor]. Defínase el excedente del consumidor como la diferencia entre la máxima disposición de pago del consumidor y el precio efectivo pagado por dicho consumidor.

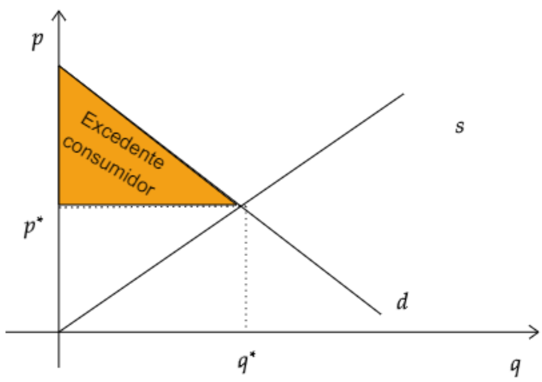


Figura 29.1: El excedente del consumidor

29.2. Excedente del productor

Definición 48 [Excedente del consumidor]. Defínase el excedente del productor como la diferencia entre el precio recibido por el productor y el costo de producción.

Ejemplo 57 [Impuesto y excedentes]. En un mercado perfectamente competitivo se consumen 250 unidades a un precio de 1000 colones. La elasticidad precio de la oferta es de 0.4 y la elasticidad precio de la demanda es de 2.

- En una situación de equilibrio, determine el excedente del consumidor, el excedente del productor y el excedente total.

$$\text{funciones directas} \begin{cases} Q_D = & a - bP \\ Q_S = & c + dP \end{cases}$$

$$\text{funciones inversas} \begin{cases} P_D = & \frac{a}{b} - \frac{Q_D}{b} \\ P_S = & \frac{Q_S}{d} - \frac{c}{d} \end{cases}$$

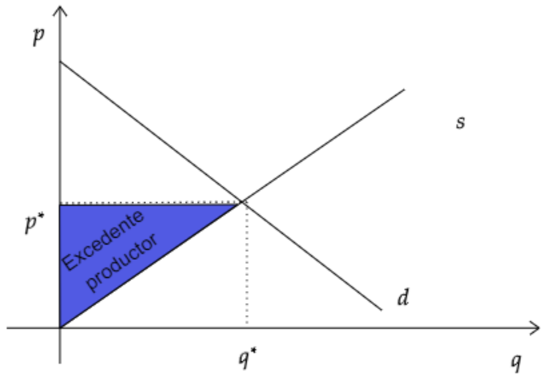


Figura 29.2: El excedente del productor

$$\eta_D = \frac{\partial Q_D}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_D} \Rightarrow \quad -2 = -b \cdot \frac{1000}{250} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$
$$\eta_S = \frac{\partial Q_S}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_S} \Rightarrow \quad 0{,}4 = d \cdot \frac{1000}{250} \Rightarrow d = \frac{1}{10}$$

- Funciones de oferta y demanda directas

$$Q_D = 750 - \frac{1}{2} P_D$$
$$Q_S = 250 + \frac{1}{20} P_S$$

- Funciones de oferta y demanda inversas

$$P_D = 1500 - \frac{1}{2} Q_D$$
$$P_S = 10 Q_S - 1500$$

En el equilibrio:

$$P_S = P_D = P^*$$
$$\Leftrightarrow 1500 - \frac{1}{2} Q^* = 10Q^* - 1500$$
$$\Leftrightarrow 1500 + 1500 = \frac{1}{2} Q^* + 10Q^*$$
$$\Leftrightarrow 3000 = \frac{Q^* + 20Q^*}{2}$$
$$\Leftrightarrow 3000 = \frac{21Q^*}{2}$$
$$\Leftrightarrow 6000 = 21Q^*$$
$$\Leftrightarrow 285{,}71 = Q^* \Rightarrow P^* = 1357{,}145$$

- Ahora, suponga que el gobierno está valorando implementar o no un impuesto unitario de 200 colones. Calcule cómo variarían todos los excedentes, cuál sería el costo en bienestar y el precio que paga cada agente.

$$
\begin{aligned}
P_D' =& P_S + t \Rightarrow 1500 - \frac{1}{2}Q_D = 10Q_S - 1500 + 200 \\
1500 - \frac{1}{2}Q^* =& 10Q^* - 1500 + 200 \\
1500 - \frac{1}{2}Q^* =& 10Q^* - 1300 \\
1500 + 1300 =& 10Q^* + \frac{1}{2}Q^* \\
2800 =& \frac{20Q^* + Q^*}{2} \\
2800 =& \frac{21Q^*}{2} \\
5600 =& 21Q^* \\
\frac{800}{3} =& Q^* \\
\Rightarrow P_S =& 1166{,}67 \\
\Rightarrow P_D =& 1366{,}67
\end{aligned}
$$

Ahora, para ver el costo en el bienestar, habría que examinar los cambios en los excedentes:

- Excedente del consumidor

$$
\begin{aligned}
\Delta EC =& \left(\frac{\frac{400}{3} \cdot \frac{800}{3}}{2}\right) - 62500 \\
=& -\frac{402500}{9} \\
=& -44722{,}22
\end{aligned}
$$

- Excedente del productor

$$
\Delta EP = \left[\left(\frac{\frac{800}{3} \cdot \frac{800}{3}}{2}\right) + \left(\frac{150 \cdot \frac{3500}{3}}{2}\right)\right] - 200000
$$

Capítulo 30

Las imperfecciones del mercado: impuestos, subsidios y externalidades

30.1. Impuestos

30.1.1. Impuestos de suma fija

Suponga que para el caso del mercado de la mercancíá cualquiera estudiado anteriormente, se dedecide introducir un impuesto.

30.1.1.1. Impuesto a los demandantes

El efecto general que tienen los impuestos sobre la demanda es que la desplazan hacia la izquierda en la misma proporción que el monto del impuesto.

$$q = a - bp - t \tag{30.1}$$

Note que al ser t un término constante, la función de demanda quedará de la forma $q = (a - t) + bp$, lo cual en última instancia corresponde a un desplazamiento hacia la izquierda de la función de demanda, o en otras palabras, una reducción de la demanda. Nótese que, como consecuencia del impuesto sobre la demanda, la

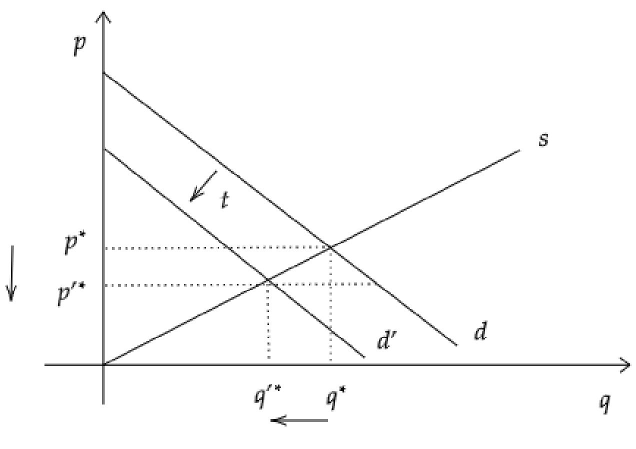


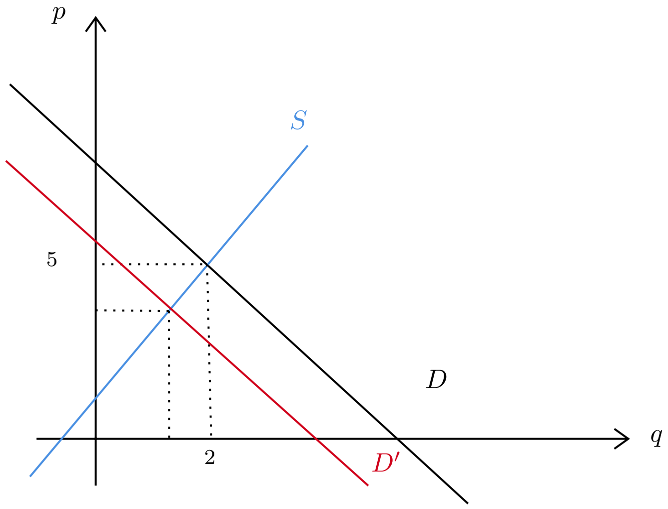
Figura 30.1: El efecto de un impuesto de suma fija sobre la demanda

cantidad y precio de equilibrio se disminuyen en comparación al escenario en el que no hay impuesto, razón por la cual se habla de que los impuestos generan una pérdida de eficiencia.

Ejemplo 58 [Impuesto de suma fija unitario]. Inicialmente, se introduce un impuesto de suma fija por una unidad monetaria por cada unidad consumida que decidan adquirir las personas demandantes. ¿Qué efecto tiene esto? → Note que ahora por cada unidad comprada, los demandantes deberán pagar una unidad adicional monetaria, por lo que en esencia, los compradores perciben que el precio de la mercancía ha subido en una unidad. De manera que ahora ha cambiado la relación de cantidad demandada por precio, de manera que la demanda ha cambiado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q = 12 - 3p - 1 \\ \\ q = 1 + 2p \end{cases} \rightarrow 12 - 3p - 1 = 1 + 2p \Rightarrow 10 = 5p \Rightarrow \frac{10}{5} = p \Rightarrow 2 = p$$

De tal manera que la cantidad de equilibrio sería $q = 1 + 2(2) \Rightarrow q = 5$ Note que ahora esta nueva situación se ve de la siguiente manera:



Note que la demanda original (en negro) se ha desplazada hacia la izquierda, y la nueva demanda (en rojo) ahora interseca con la curva de oferta en un precio y cantidad de equilibrio menores que bajo el escenario original sin impuesto.

30.1.1.2. Impuesto a los oferentes

El efecto general que tienen los impuestos sobre la oferta es que la desplazan hacia la izquierda en la misma proporción que el monto del impuesto.

$$q = c + dp + t \tag{30.2}$$

Note que al ser t un término constante, la función de oferta quedará de la forma $q = (a - t) + bp$, lo cual en última instancia corresponde a un desplazamiento hacia la izquierda de la función de demanda, o en otras palabras, una reducción de la demanda. Nótese que, como consecuencia del impuesto sobre la demanda, la

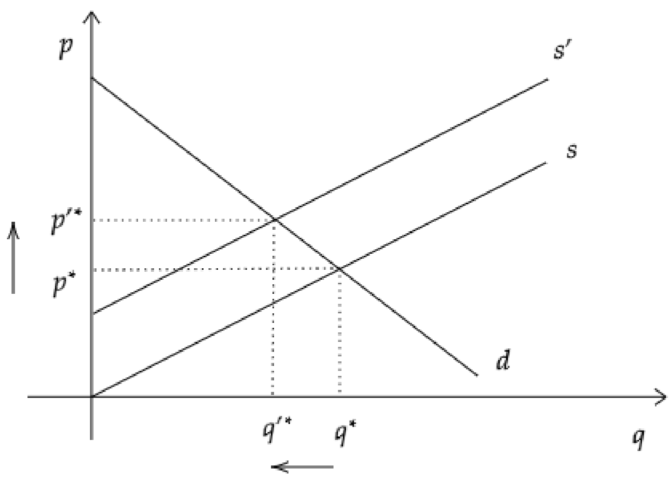


Figura 30.2: El efecto de un impuesto de suma fija sobre la demanda

cantidad y precio de equilibrio se disminuyen en comparación al escenario en el que no hay impuesto, razón por la cual se habla de que los impuestos generan una pérdida de eficiencia.

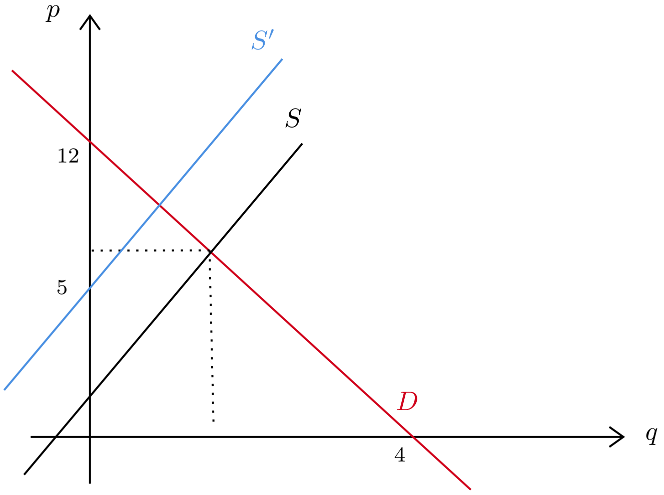
¿Nota algo particular? Observe que tanto en el caso del impuesto a la demanda como en la demanda a la oferta se generan efectos idénticos en la cantidad de equilibrio: esta se reduce con el impuesto en comparación a la ausencia del impuesto. Lo que sí varía es que, con la reducción en la demanda (impuesto a los demandantes), al precio inicial se genera un exceso de oferta que hace la oferta disminuya inducidamente, ocasionado una disminución en el precio de equilibrio, mientras que con la reducción en la oferta (impuesto a los oferentes), al precio de equilibrio inicial se genera un exceso de demanda, lo cual hace que la demanda aumente inducidamente, provocando que el precio de equilibrio aumente.

Así, se puede observar que consignarle el impuesto a los demandantes o a los oferentes tiene diferencia en el efecto sobre los precios, mientras que el efecto sobre la cantidad no varía.

Ejemplo 59 [Impuesto unitario a los oferentes]. Inicialmente, se introduce un impuesto de suma fija por una unidad monetaria por cada unidad vendida que decidan vender las personas oferentes o productoras. ¿Qué efecto tiene esto? → Note que ahora por cada unidad vendida, los oferentes deberán pagar una unidad adicional monetaria, por lo que en esencia, los vendedores perciben que el precio de la mercancía se ha reducido en una unidad. De manera que ahora ha cambiado la relación de cantidad demandada por precio, de manera que la ofera ha cambiado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} q = 12 - 3p \\ \\ q = 1 + 2p + 1 \end{cases} \rightarrow 12 - 3p = 1 + 2p + 1 \Rightarrow 10 = 5p \Rightarrow \frac{10}{5} = p \Rightarrow 2 = p$$

De tal manera que la cantidad de equilibrio sería $q = 1 + 2(2) \Rightarrow q = 5$ Note que ahora esta nueva situación se ve de la siguiente manera:



Es importante ver que en esta ocasión, el impuesto a los oferentes genera el mismo efecto en la cantidad de equilibrio que un impuesto a los demandantes, sin embargo genera un efecto diferente en el precio de equilibrio.

30.1.2. Impuestos proporcionales

Ejemplo 60 [Impuestos proporcionales a los demandantes]. Suponga que en el mercado de un servicio se tienen las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\text{Demanda: } q = 100 - p$$

$$\text{Oferta: } q = 40 + 2p$$

De manera que se tiene la siguiente solución de equilibrio:

$$\begin{cases} q = 100 - p \\ \\ q = 40 + 2p \end{cases} \quad 100 - p = 40 + 2p \Rightarrow 60 = 3p \Rightarrow 20 = p$$

Por ende, sabiendo el precio de equilibrio se puede proceder a averiguar la cantidad de equilibrio: $q = 100 - (20) \Rightarrow q = 100 - 20 \Rightarrow q = 80$.

Ahora, un impuesto proporcional de **tasa** t aplicado a los demandantes se ve de la siguiente forma:

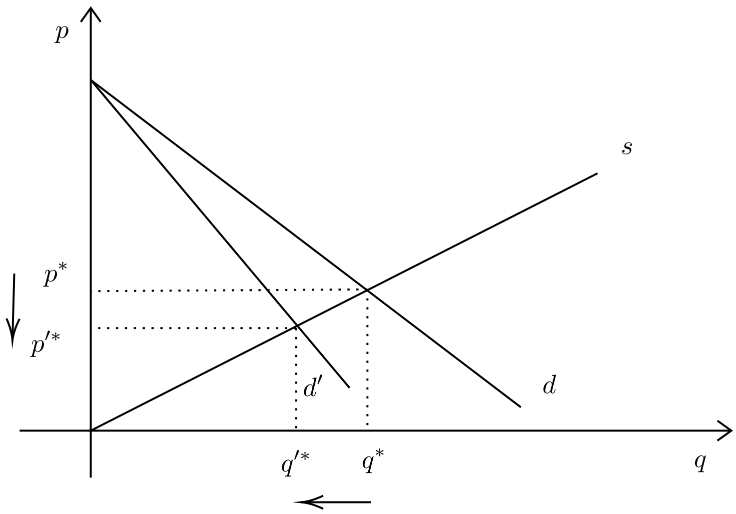
$$q = a + b(1+t)p \tag{30.3}$$

Es importante notar, por la ecuación, que un impuesto proporcional repercute sobre la pendiente de la curva de demanda, siendo que la intersección con el eje de los precios (demanda marshalliana) no se ve afectada por un impuesto proporcional.

Por lo tanto, suponga que en el mercado anterior se impone un impuesto del 30 % por unidad consumida a los demandantes. Este impuesto tiene el siguiente efecto:

$$\begin{cases} q = 100 - (1+0{,}4)p \\ \\ q = 40 + 2p \end{cases} \quad 100 - (1+0{,}4)p = 40 + 2p \Rightarrow 60 = \frac{7}{5}p + 2p \Rightarrow 60 = \frac{17}{5}p \Rightarrow 300 = 17p \Rightarrow \frac{300}{17} = p$$

Note que $20 > \frac{300}{17}$ y el precio bajó, ahora a encontrar la cantidad de equilibrio: $q = 100 - (1+0{,}4)(\frac{300}{17}) \Rightarrow q = \frac{1280}{17}$ y note que $80 > \frac{1280}{17}$. Note que que el efecto de un impuesto proporcional a la demanda, es el siguiente:



Note que geométricamente un impuesto proporcional a la demanda debe tener el efecto que la pendiente de la curva de demanda ha de aumentar, es decir, ser más vertical, con el efecto de que se vea desplazada hacia la izquierda, y por eso que ha de introducirse como se indicó anteriormente.

30.1.2.1. Impuestos proporcionales a los oferentes

Un impuesto proporcional aplicado a los oferentes tiene el siguiente efecto:

$$q = c + d(1+t)p$$

Ejemplo 61 [Elasticidades e impuestos]. Considere un mercado con las siguientes funciones de oferta y demanda:

$$\begin{aligned} P_s =& 100 + 2Q \\ P_d =& 1000 - Q \end{aligned}$$

- Calcule la elasticidad precio de la demanda y elasticidad precio de la oferta
  Primero se procede a calcular las formas funcionales (es decir, las funciones) de las elasticidades. Luego, se encuentran la cantidad y el precio de equilibrio para evaluar ese precio y cantidad en las funciones de elasticidad encontradas. Así:

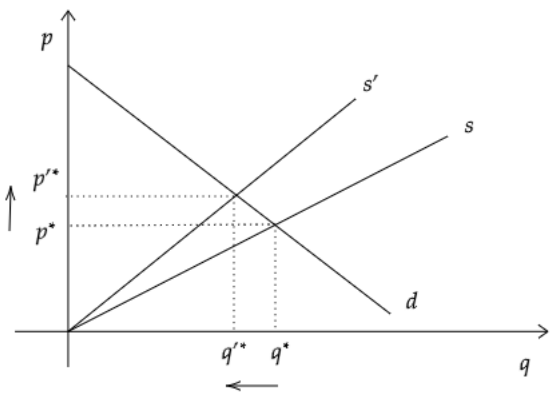


Figura 30.3: Un impuesto proporcional a los oferentes

- Elasticidad precio de la demanda

$$\eta_{p_d,Q_d} = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} P_d &= 1000 - Q_d \\ \Leftrightarrow Q_d &= 1000 - P_d \end{aligned}$$

Y la elasticidad sería:

$$\begin{aligned} \eta_{P_d,Q_d} &= \frac{\partial Q_D}{\partial P_d}\frac{P_d}{Q_D} \\ \Leftrightarrow &= \frac{\partial}{\partial P_d}\left[1000 - P_d\right] \cdot \frac{P_d}{1000 - P_d} \\ \Leftrightarrow &= -1 \cdot \frac{P_d}{1000 - P_d} \end{aligned}$$

- Elasticidad precio de la oferta

$$\eta_{P_s,Q_s} = \frac{dQ_s}{dP_s}\frac{P_s}{Q_s}$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} P_s &= 100 + 2Q_s \\ \Leftrightarrow Q_s &= \frac{P_s - 100}{2} \end{aligned}$$

Y la elasticidad sería:

$$\begin{aligned} \eta_{P_s,Q_s} &= \frac{\partial Q_s}{\partial P_s}\frac{P_s}{Q_s} \\ \Leftrightarrow &= \frac{\partial}{\partial P_s}\left[\frac{P_s - 100}{2}\right] \cdot \frac{P_s}{\frac{P_s - 100}{2}} \\ \Leftrightarrow &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2P_s}{P_s - 100} \end{aligned}$$

Ahora, en el equilibrio debe ser el caso que:

$$
\begin{aligned}
Q_s = Q_d = Q \Leftrightarrow P_s = Pd = P \\
\Leftrightarrow 100 + 2Q =& 1000 - Q \\
\Leftrightarrow 3Q =& 900 \\
\Leftrightarrow Q^* =& 300
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto:

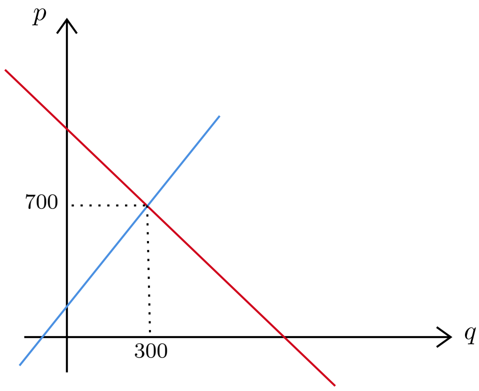
$$P^* = 700$$

Evaluando las cantidades de equilibrio en las funciones de elasticidades encontradas se obtiene:

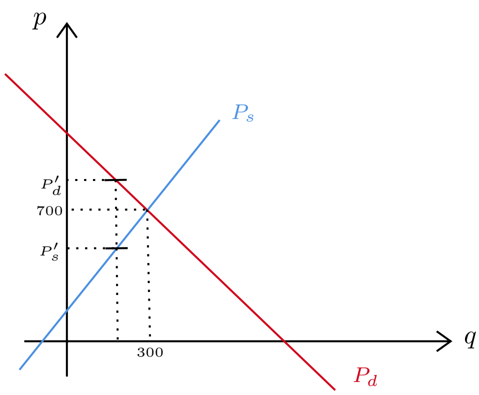
$$
\begin{aligned}
\eta_{P_d,Q_d} =& -1 \cdot \frac{P_d}{1000 - P_d} = -\frac{700}{1000-700} = \frac{-7}{3} \\
\eta_{P_s,Q_s} =& \frac{1}{2} \cdot \frac{2P_s}{P_s - 100} = \frac{2(700)}{2(700-100)} = \frac{1400}{2(600)} = \frac{1400}{1200} = \frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

- Suponga que ahora se quiere establecer un impuesto por unidad que reduzca la cantidad transada a $Q = 200$
  - Encuentre el impuesto por unidad

    Observe que inicialmente en equilibrio se tiene:



Y el objetivo del impuesto es hacer que la cantidad efectivamente transada pase a ser 200 unidades en lugar de 300. Es decir, que el resultado que se busca es lograr que:

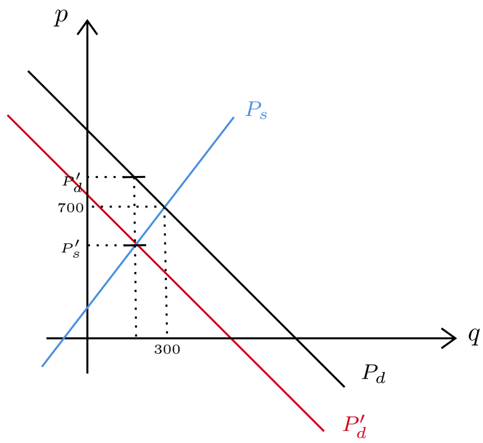


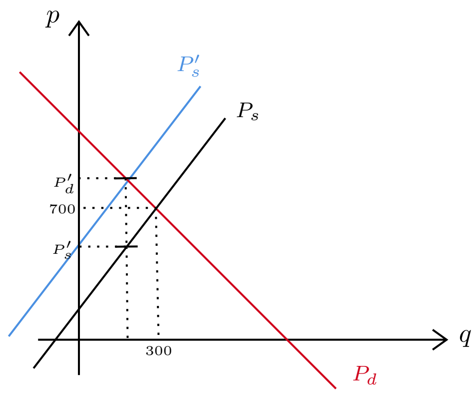
Sin embargo, al alterar la cantidad transada en equilibrio por una distinta, equivale a crear una distorsión o diferencia entre la oferta y la demanda, por lo cual, suceden varias cosas:

  - En primer lugar, surge una brecha entre lo que pagan los demandantes y lo que reciben los oferentes. Esta diferencia la recauda o la recoge el gobierno según se trate de un impuesto o un subsidio.

- En segundo lugar, la pérdida del bienestar corresponde a la cantidad de unidades que se han dejado de producir.
- En tercer lugar hay una redistribución de los excedentes entre los agentes que participan en el mercado.
- Finalmente, la diferencia entre la oferta y la demanda ocasionada por esta distorsión, implica que se puede llegar a este nuevo punto de 200 unidades transadas ya sea aplicando el impuesto a la oferta o a la demanda, puesto que es irrelevante quién lo pague oficialmente, dado que lo realmente importante son las elasticidades de cada agente.

Es así que pues, para lograr reducir la cantidad transada en el mercado a 200 mediante un impuesto, se puede realizar de dos formas:





Una primer manera es aplicar el impuesto a los demandantes (tal y como se observa en la imagen de la izquierda) y una segunda manera es aplicar el impuesto a los oferentes (como se observa en la imagen de la derecha).

- Impuesto a los demandantes

$$
\begin{aligned}
P_d =& 1000 - Q \\
P_d' =& 1000 - Q - t
\end{aligned}
$$

Y en el nuevo equilibrio tiene que ser que $P_d' = P_s = Q \Leftrightarrow Q_d = Q_s = Q$:

$$
\begin{aligned}
P_d' =& Q_s \\
\Leftrightarrow 1000 - Q - t =& 100 + 2Q
\end{aligned}
$$

Y, siendo $Q = 200$ se despeja t para ver cuál es el impuesto que logra alcanzar esa cantidad:

$$
\begin{aligned}
1000 - (200) - t =& 100 + 2(200) \\
\Leftrightarrow 800 - t =& 100 + 400 \\
\Leftrightarrow 800 =& 500 + t \\
\Leftrightarrow 800 - 500 =& t \\
\Leftrightarrow & \boxed{300 = t}
\end{aligned}
$$

- Impuesto a los oferentes

$$
\begin{aligned}
P_s =& 100 + 2Q \\
P_s' =& P_s + t
\end{aligned}
$$

Y en el nuevo equilibrio tiene que ser que $P_d = P_s' = Q \Leftrightarrow Q_d = Q_s = Q$:

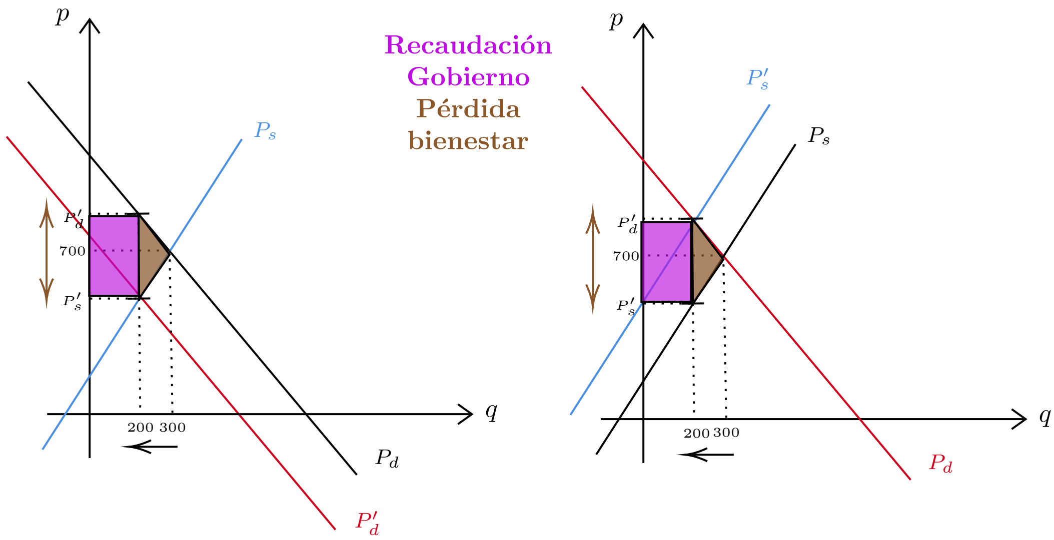
$$\begin{aligned} P_d &= P_s' \\ \Leftrightarrow 1000 - Q &= 100 + 2Q + t \end{aligned}$$

Y, siendo $Q = 200$ se despeja t para ver cuál es el impuesto que logra alcanzar esa cantidad:

$$\begin{aligned} 1000 - (200) &= 100 + 2(200) + t \\ \Leftrightarrow 800 &= 100 + 400 + t \\ \Leftrightarrow 800 &= 500 + t \\ \Leftrightarrow 800 - 500 &= t \\ \Leftrightarrow & \boxed{300 = t} \end{aligned}$$

- Encuentre el costo en bienestar de este impuesto

  Primero hay que encontrar geométricamente cuál es el costo en bienestar en el mercado actual:



Note que indistintamente de a quién se le cobre el impuesto, el costo o la pérdida en bienestar es igual en ambos casos, y corresponde al triángulo café cuya área equivale a esa pérdida. Entonces, habría que encontrar P_d' y P_s' para poder aplicar la fórmula del área de un triángulo: área $= \frac{b \cdot h}{2}$.

En este caso concreto podría pensarse que la altura h equivale a $300 - 200 = 100$ y la base del triángulo sería $P_d' - P_s' = b$. Por lo cual, habría que encontrar estos datos. Las ecuaciones ya habían sido específicadas anteriormente:

$$\begin{aligned} P_s &= 100 + 2Q \Rightarrow P_s = 100 + 2(200) = 500 \\ P_d &= 1000 - Q \Rightarrow P_d = 1000 - 200 = 800 \end{aligned}$$

Por lo tanto la base del triángulo es igual a $800 - 500 = 300$ y con esto se puede proceder a estimar la pérdida en bienestar:

$$\begin{aligned} \text{área} &= \frac{b \cdot h}{2} \\ \Leftrightarrow &= \frac{300 \cdot 100}{2} \\ \Leftrightarrow &= \frac{30000}{2} \\ \Leftrightarrow &= 15000 \end{aligned}$$

- Determine el cambio en la porción del impuesto que pagan los consumidores y productores si la función de oferta de mercado fuera $P_s = 500$. Explique este resultado.

Ejercicio 110 [Demandas marshallianas e impuestos[1]]. Tai consume solo vino (x) y queso (y). Sus preferencias pueden expresarse mediante la siguiente función de utilidad: $U(x, y) = xy^3$. El precio del vino es p_x, el precio del queso es p_y, y Tai tiene un ingreso de m dólares.

1. *(2 puntos)* Escribe la restricción presupuestaria de Tai.
$\rightarrow$ La restricción presupuestaria de Tai es

$$p_x x + p_y y = m$$

2. *(4 puntos)* Calcula la Tasa Marginal de Sustitución (TMS) en una canasta arbitraria (x, y).
$\rightarrow$ La tasa marginal de sustitución entre vino y queso es

$$TMS = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = -\frac{y^3}{3xy^2} = -\frac{1}{3}\frac{y}{x}$$

3. *(4 puntos)* Calcula la demanda de Tai por vino y queso como función de p_x, p_y, y m.
$\rightarrow$ La tasa marginal de sustitución entre vino y queso es

$$TMS = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} = -\frac{y^3}{3xy^2} = -\frac{1}{3}\frac{y}{x}$$

En el óptimo

$$TMS = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y = 3\frac{p_x}{p_y}x$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria

$$p_x x + p_y \cdot 3\frac{p_x}{p_y}x = m \Rightarrow 4p_x x = m \Rightarrow x = \frac{1}{4}\frac{m}{p_x}, \quad y = \frac{3}{4}\frac{m}{p_y}$$

4. *(4 puntos)* Repite los apartados 2 y 3, esta vez suponiendo que las preferencias de Tai son $U(x, y) = x + 3y$.
$\rightarrow$ Si las preferencias son $U(x, y)$, entonces la TMS es constante y igual a $TMS = -\frac{1}{3}$. Esto significa que Tai está dispuesto a cambiar tres unidades de vino por una unidad de queso. Dicho de otro modo, está dispuesto a pagar tres veces más por una unidad de queso que por una unidad de vino. Entonces, hay tres casos:

$$x = \begin{cases} 0 & 3p_x > p_y \\ \in \left[0, \frac{m}{p_x}\right] & 3p_x = p_y \\ \frac{m}{p_x} & 3p_x < p_y \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{m}{p_y} & 3p_x > p_y \\ \in \left[0, \frac{m}{p_y}\right] & 3p_x = p_y \\ 0 & 3p_x < p_y \end{cases}$$

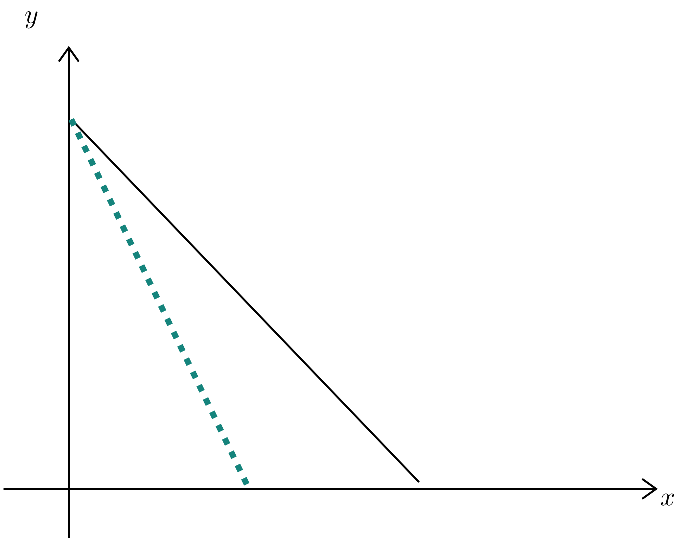
Regresa a las preferencias originales dadas por $U(x, y) = xy^3$. Supón que el gobierno impone un impuesto al vino, de modo que si el precio del vino es p_x, el consumidor debe pagar $(1 + \tau)p_x$.

5. *(2 puntos)* ¿Cuál es la nueva restricción presupuestaria? En un gráfico xy, dibuja la restricción presupuestaria antes y después de la implementación del impuesto al vino.
$\rightarrow$ La nueva restricción presupuestaria es

$$(1 + \tau)p_x x + p_y y \leq m$$

Gráficamente:

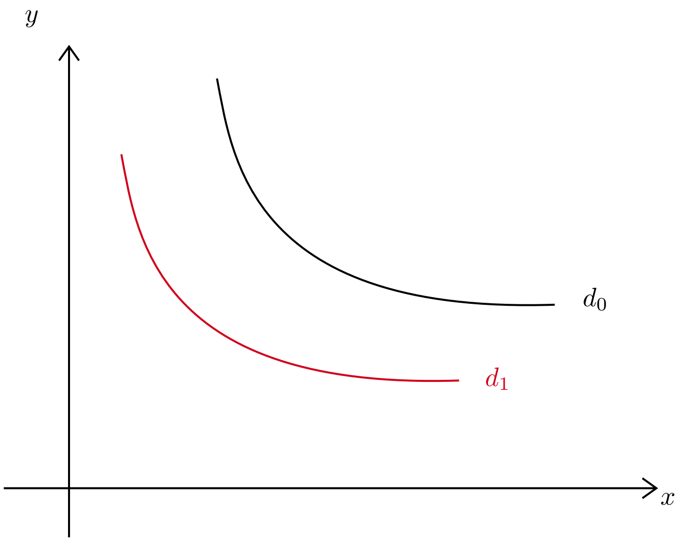
[1] Ejercicio tomado de Gruber (2023)



6. *(4 puntos)* ¿Cuál es la nueva función de demanda por vino? Dibuja la curva de demanda antes y después del impuesto y explica brevemente la diferencia entre ambas. (No necesitas usar valores específicos de m, τ, pero asegúrate de que el gráfico sea cualitativamente correcto).
$\rightarrow$ La nueva curva de demanda es

$$x = \frac{1}{4} \cdot \frac{m}{(1+\tau)p_x}$$

Gráficamente, el impuesto funciona como un aumento en el precio que los consumidores deben pagar por el vino. Para cada precio p_x, ahora los consumidores deben pagar $(1+\tau)p_x$, por lo tanto, por la ley de la demanda, la cantidad demandada será menor a cualquier precio p_x.

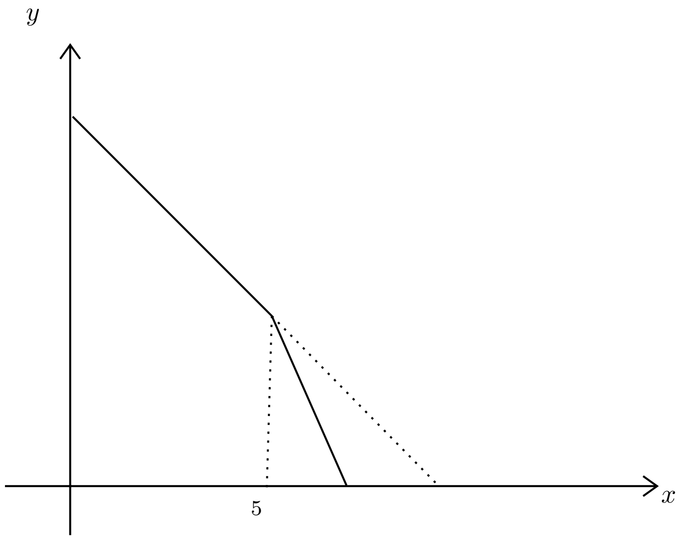


Regresa al caso en donde las preferencias de Tai están dadas por $U(x,y) = xy^3$. Suponga que Tai tiene un cupón del 50 % de descuento en las primeras 5 botellas de vino que compra.

7. *(5 puntos)* Supón que $\frac{m}{p_x} > 5$. Escribe el nuevo conjunto presupuestario de Tai. Dibuja el nuevo conjunto presupuestario en un gráfico xy.
$\rightarrow$ El nuevo conjunto presupuestario es

$$m = \begin{cases} \frac{1}{2}p_x x + p_y y & \text{si } x \leq 5 \\ \frac{1}{2}p_x \cdot 5 + p_x(x-5) + p_y y & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Gráficamente:



8. *(5 puntos)* Sean $p_x = 2$, $p_y = 1$ y $m = 40$. ¿Cuánto vino y queso consumirá Tai?
$\rightarrow$ Suponemos que Tai consume más de 5 botellas de vino. Si consume más de 5 botellas, entonces el precio relativo de una botella adicional de vino es igual a $\frac{p_x}{p_y}$; en cambio, si consume menos de cinco botellas, el precio habría sido $\frac{1}{2}\frac{p_x}{p_y}$ debido al descuento. A partir de $MRS = -\frac{p_x}{p_y}$, tenemos que $y = 3\frac{p_x}{p_y}x$. Sustituyendo en la restricción presupuestaria:

$$\frac{1}{2}5p_x + p_x(x-5) + p_y 3\frac{p_x}{p_y}x = m$$

$$4p_x x - \frac{5}{2}p_x = m$$

Entonces:

$$x = \frac{1}{4}\frac{m + \frac{5}{2}p_x}{p_x}, \quad y = \frac{3}{4}\frac{m + \frac{5}{2}p_x}{p_y}$$

Sustituyendo $p_x = 2$, $p_y = 1$ y $m = 40$, Tai consume:

$$x = \frac{45}{4} = 11{,}25, \quad y = \frac{135}{4} = 33{,}75$$

30.2. Subsidios

Los subsidios suelen ser equivalentes a los impuestos de suma fija tanto para la oferta como para la demanda, solo que su efecto neto suele ser inverso: se producen más unidades de las que producirían sin intervención alguna.

30.2.1. Subsidio de suma fija a los demandantes

Un subsidio a los demandantes se ve de la siguiente manera:

$$\text{q} = \text{a} + \text{bp} + \text{t}$$

Esto, siguiendo con el ejemplo del mercado de una mercancía cualquiera se vería de la siguiente manera:

30.2.2. Subsidio de suma fija a los productores

Un subsidio t a los oferentes se ve de la siguiente manera:

$$\text{q} = \text{c} + \text{dp - t}$$

Esto, siguiendo con el ejemplo del mercado de una mercancía cualquiera se vería de la siguiente manera:

Ejemplo 62 [Subsidio a las importaciones]. Considere una economía que se encuentra en equilibrio doméstico. A partir de esta situación, considere el siguiente escenario:

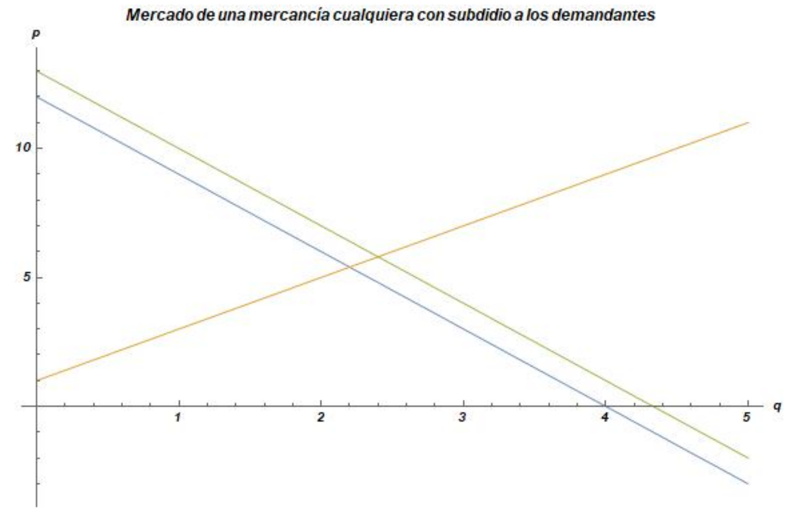


Figura 30.4: Un subsidio a los demandantes

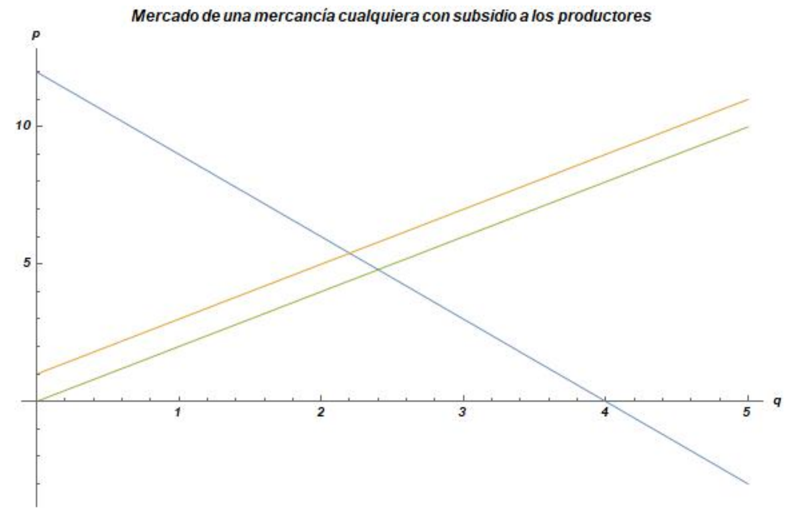
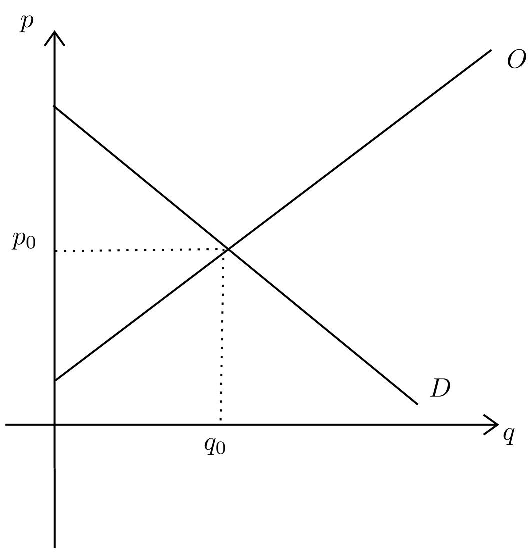
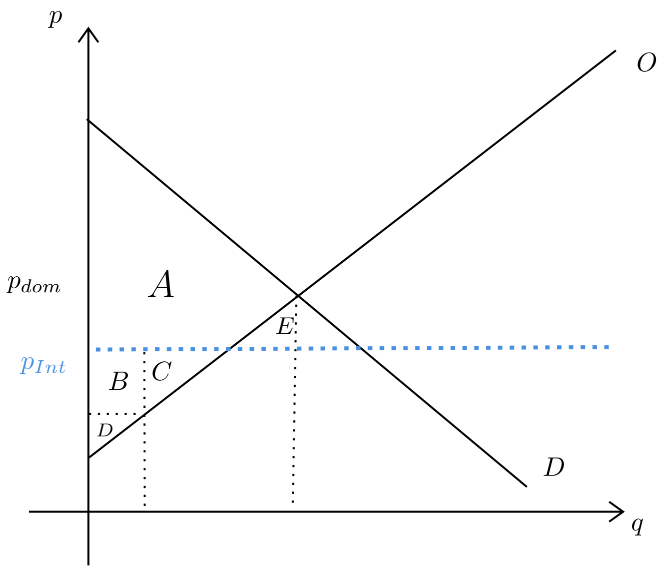


Figura 30.5: Un subsidio a los demandantes

- Encuentre el costo en bienestar de un subsidio sobre las importaciones. Indique quienes se benefician y se perjudican con el subsidio.
  El equilibrio doméstico inicialmente se ve así:



Luego, considere que para que el país sea importador, se debe cumplir que el precio internacional sea menor al precio de equilibrio local. De este modo, los consumidores locales tendrán incentivos para comprar el producto en el extranjero.



A partir de la situación descrita, se pueden calcular o medir los excedentes de la siguiente manera:

- Excedente del consumidor:

$$EC = A + E$$

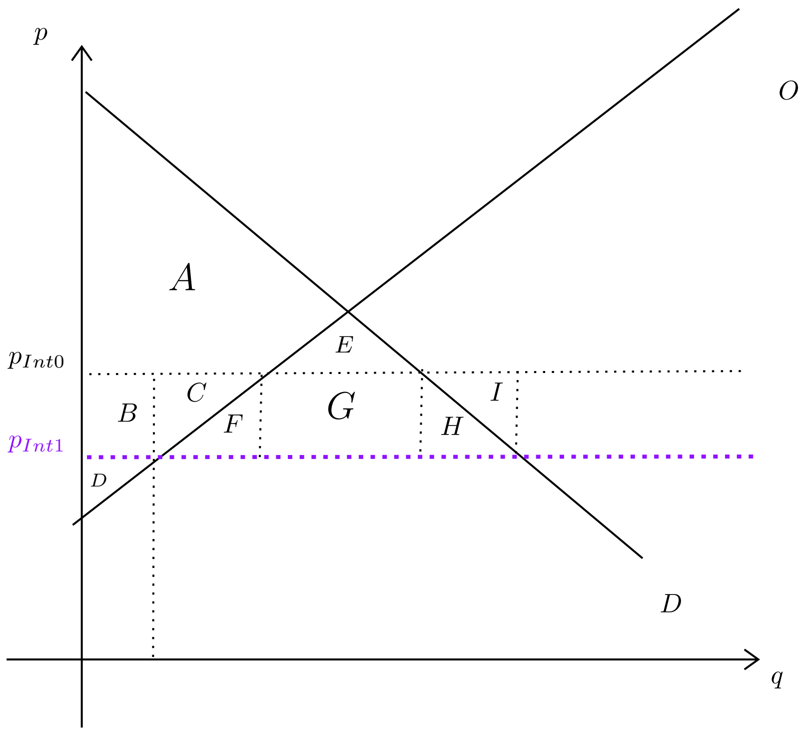
- Excedente del productor:

$$EP = B + C + D$$

Y por tanto el excedente total sería la suma de ambos excedentes:

$$\begin{aligned} ET =& EC + EP \\ =& A + E + B + C + D \end{aligned}$$

Ahora ya se puede entrar a analizar el impacto que tendría un subsidio sobre las importaciones: un subsidio de esta naturaleza equivaldría a decir que se abaratan las importaciones, porque parte del precio ahora lo estaría cubriendo el emisor del subsidio, por lo cual, desde la perspectiva del consumidor está disminuyendo el precio internacional, y se tendría un nuevo precio internacional menor al original:



Esta nueva situación provoca una reconfiguración de los excedentes del mercado. De esta manera se tiene:

- Excedente del consumidor:

$$EC = A + B + C + E + F + G + H$$

- Excedente del productor:

$$EP = D$$

- Excedente del gobierno:

$$EG = -C - F - G - H - I$$

Y por tanto el excedente total sería la suma de todos los excedentes:

$$\begin{aligned} ET =& EC + EP + EG \\ =& \underbrace{A + B + C + E + F + G + H}_{EC} + \underbrace{D}_{EP} + \underbrace{-C - F - G - H - I}_{EG} \\ =& A + B + D + E - I \end{aligned}$$

Finalmente, note que la diferencia entre los excedentes es $C + I$, la cual es el costo en bienestar.

30.3. Precios mínimos y máximos

30.3.1. Precios mínimos

Definición 49 [Precio mínimo]. Defínase un precio mínimo como aquel precio "piso.ª partir del cual se puede empezar a cobrar por tranzar una determinada mercancía o servicio en un mercado. Es decir, se puede cobrar un precio mayor a este, pero no uno menor.

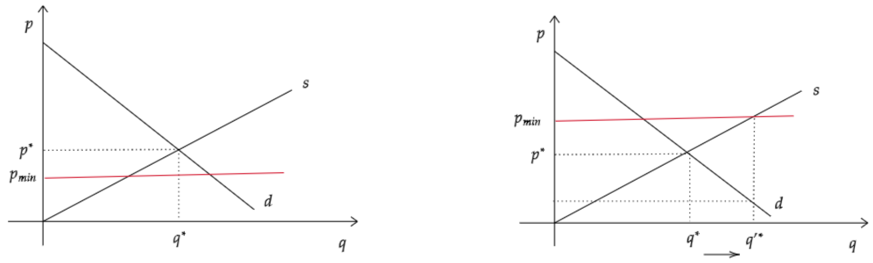


Figura 30.6: Precio mínimo en dos supuestos distintos

Nótese que entonces un precio mínimo surtiría efectos en un mercado con un precio de equilibrio mayor a este, de lo contrario, no surtiría efectos puesto que ya de por sí el mercado tranza a un precio menor.

Note que en el caso de un precio mínimo por debajo del precio de equilibrio del mercado, no surte efectos, puesto que el "pisoïmpuesto sigue estando por debajo del precio al que normalmente se tranza en el mercado. Sin embargo, cuando se impone un precio mínimo por encima del precio de equilibrio de mercado (caso de la derecha), se genera que al precio mínimo impuesto la oferta sea mayor que la demanda, de manera que se genera un exceso de cantidad ofrecida, más que las que serían producidas bajo un mercado libre.

Observe que al punto del precio máximo el costo de producción de una unidad adicional es mayor que la valoración marginal por cada unidad, de manera que se están produciendo unidades que no se deberían estar produciendo, traduciéndose en una pérdida de eficiencia.

30.3.2. Precios máximos

Definición 50 [Precio máximo]. Defínase un precio máximo como aquel precio "techo.ª partir del cual no se puede empezar a cobrar más allá por tranzar una determinada mercancía o servicio en un mercado. Es decir, se puede cobrar un precio menor a este, pero no uno mayor.

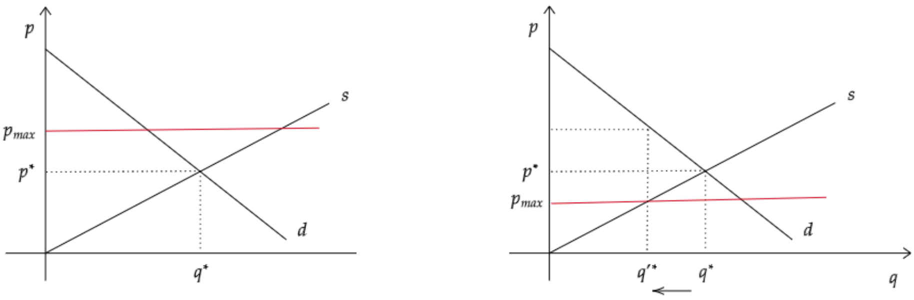


Figura 30.7: Precio mínimo en dos supuestos distintos

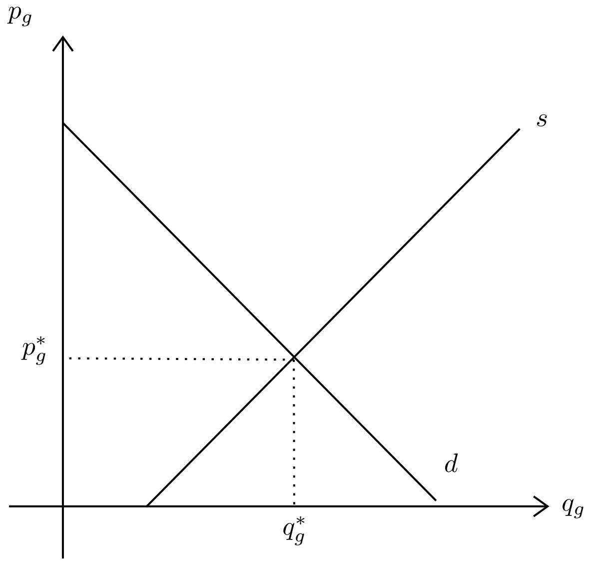
Note que en el primer caso (izquierda) el precio máximo impuesto se encuentra por debajo del precio de equilibrio del mercado, de manera que se genera que al nivel del precio máximo impuesto, la demanda sea mayor que la oferta, de manera que en el mercado se ofertará una menor cantidad del bien o servicio tranzado que las unidades que se generarían en un supuesto de libre mercado.

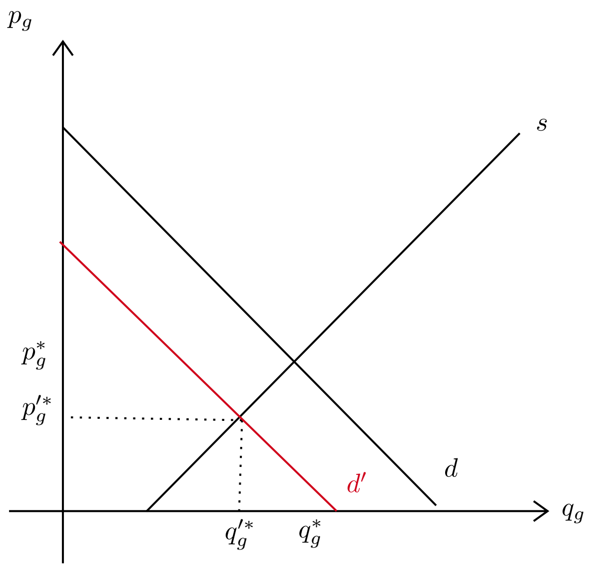
Ejercicio 111 [Equilibrio de mercado y precios máximos[2]]. Considera la siguiente función de demanda de gasolina entre los residentes de Cambridge:

$$Q_d = \alpha + \beta P_g + \gamma P_t$$

donde P_g es el precio de la gasolina y P_t es el precio de un boleto de metro de ida.

[2]Ejercicio tomado de Gruber (2023)

1. *(2 puntos)* ¿Qué signo esperarías que tenga γ? Proporciona una intuición económica.
   $\rightarrow$ γ debería ser positiva porque los viajes en metro y la gasolina son sustitutos: si es más barato tomar el metro, entonces menos personas usarán su automóvil y, por tanto, disminuirá la demanda de gasolina.
2. *(3 puntos)* Supón que $\alpha = 10$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, y $P_t = 1$, y que la oferta está dada por
   $$Q_s = 10 + P_g$$
   Resuelve el precio de equilibrio P^* y la cantidad de equilibrio Q^*. En un gráfico xy, dibuja las curvas de oferta y demanda, y muestra el equilibrio de mercado.
   $\rightarrow$ La oferta y la demanda están dadas por:
   $$Q_d = 11 - 2P_g, \quad Q_s = 10 + P_g$$
   En equilibrio:
   $$Q_d = Q_s \Rightarrow 11 - 2P_g = 10 + P_g \Rightarrow P^* = \frac{1}{3}, \quad Q^* = \frac{31}{3}$$
   

3. *(5 puntos)* Supón que el precio del boleto de metro disminuye a $P_t' = 0{,}5$. Resuelve el nuevo precio de equilibrio $P^{*'}$ y cantidad $Q^{*'}$. ¿Cómo se comparan con los valores anteriores? Proporciona una intuición económica. En un gráfico xy, dibuja las curvas de demanda antigua y nueva, y muestra los equilibrios antiguo y nuevo.
   $\rightarrow$ La nueva función de demanda es:
   $$Q_d = 10{,}5 - 2P_g$$
   La oferta sigue siendo:
   $$Q_s = 10 + P_g$$
   

En equilibrio:

$$Q_d = Q_s \Rightarrow 10{,}5 - 2P_g = 10 + P_g \Rightarrow P^{*'} = \frac{1}{6}, \quad Q^{*'} = \frac{61}{6}$$

Una disminución en el precio del boleto de metro reduce la demanda de gasolina. En el precio de equilibrio anterior P^*, hay un exceso de oferta porque la demanda ha disminuido. Por tanto, el mercado se ajusta con una caída en el precio hasta que la demanda coincide con la oferta.

4. *(5 puntos)* Regresa a la curva de demanda original donde $P_t = 1$. Supón que la oferta disminuye a:

$$Q_s = 5 + P_g$$

Resuelve el nuevo precio de equilibrio $P^{*'}$ y cantidad $Q^{*'}$. ¿Cómo se comparan con P^* y Q^*? Proporciona una intuición económica. En un gráfico xy, dibuja las curvas de oferta antigua y nueva, y muestra los equilibrios antiguo y nuevo.
→ La demanda es:

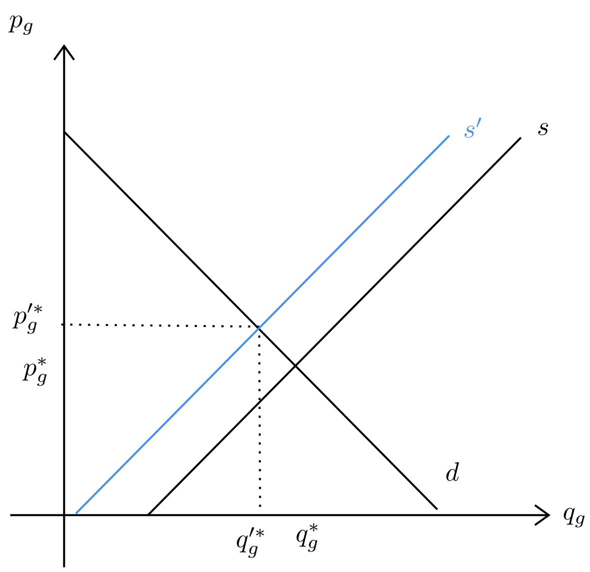
$$Q_d = 11 - 2P_g$$

y la nueva oferta:

$$Q_s = 5 + P_g$$

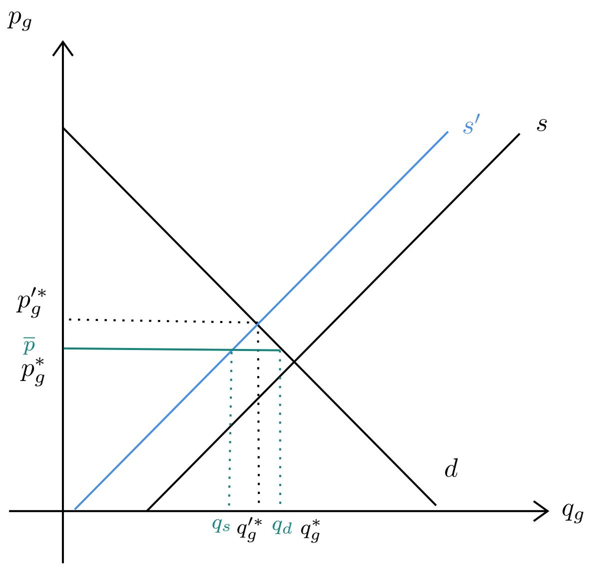
En equilibrio:

$$Q_d = Q_s \Rightarrow 11 - 2P_g = 5 + P_g \Rightarrow P^{*'} = 2, \quad Q^{*'} = 7$$



Una disminución en la oferta implica que al precio de equilibrio anterior P^* hay exceso de demanda. Por tanto, el mercado se ajusta con un aumento en el precio hasta que la demanda coincide con la oferta.

5. *(5 puntos)* Supón que en respuesta a la disminución en la oferta, el gobierno impone un precio tope sobre la gasolina. En particular, supón que el gobierno fija un tope de precio $\bar{P}$ menor que el valor de equilibrio obtenido en el inciso 4. Bajo esta política, ¿el mercado de gasolina está en equilibrio? Si la respuesta es negativa, muestra si hay exceso de demanda o de oferta. En un gráfico xy, muestra lo que sucede en el mercado bajo esta política.
→ Bajo esta política, el precio está por debajo del precio de equilibrio, por lo tanto hay exceso de demanda: como la demanda es decreciente, entonces al precio $\bar{P}$ se tiene que $Q_d > Q^{*'}$; y como la oferta es creciente, entonces a ese precio se tiene $Q_s < Q^{*'}$, por lo tanto $Q_d > Q_s$.



30.4. Externalidades

El objetivo de las secciones anteriores ha sido dejar en evidencia que el mercado por sí solo es capaz de obtener las cantidades y precios que maximicen los excedentes del consumidor y productor. Más allá de esto, cualquier otra intervención en el mercado (impuestos, subsidios, precios mínimos o máximos) crearán distorsiones que conllevarán a situaciones distintas de las que se alcanzarían bajo el libre mercado sin intervención.

Esto, sin embargo, cambia frente a la presencia de externalidades, puesto que la aparición de las externalidades, tanto positivas como negativas, conlleva a que haya un punto óptimo que es distinto al punto de equilibrio que normalmente se produciría bajo el libre mercado, por lo cual, sin la intervención en el mercado, no se estaría alcanzando ese óptimo social. Es bajo estos escenarios, que en efecto la intervención es los mercados puede generar una mejoría social con respecto al punto que se encontraría bajo el mecanismo del libre mercado.

Definición 51 [Externalidades]. Defínase externalidad como el efecto no compensado que surge a partir de las transacciones que ocurren entre terceros y que no es asumido por ninguna de las partes involucradas directamente en esa transacción.

Definición 52 [Externalidad positiva]. Defínase una externalidad positiva como un efecto positivo que recae sobre un tercero ante una transacción u operación llevada a cabo entre partes que no asumen el costo de dicho efecto.

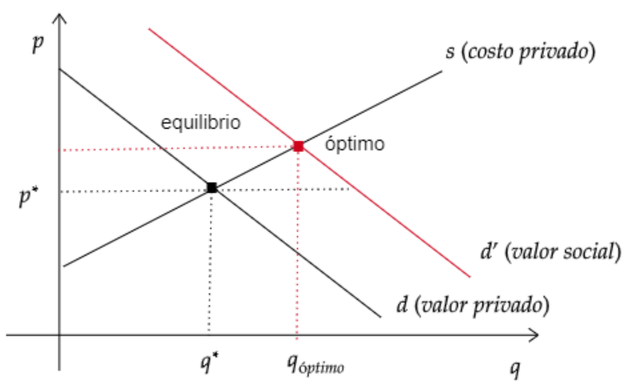


Figura 30.8: Una externalidad positiva

Definición 53 [Externalidad negativa]. Defínase una externalidad negativa como un efecto negativo que recae sobre un tercero ante una transacción u operación llevada a cabo entre partes que no asumen el costo de dicho efecto.

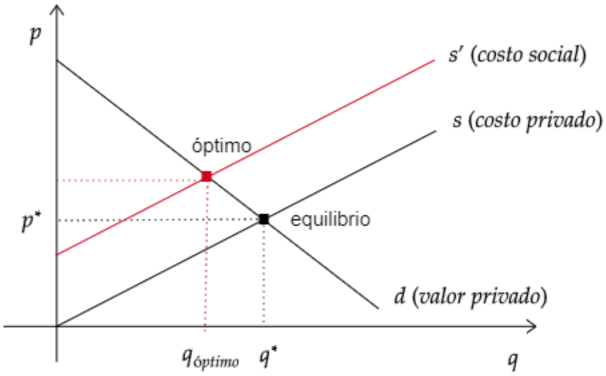


Figura 30.9: Una externalidad negativa

Para concluir este capítulo, suponga un mercado como el siguiente: Ahora, supóngase que en dicho

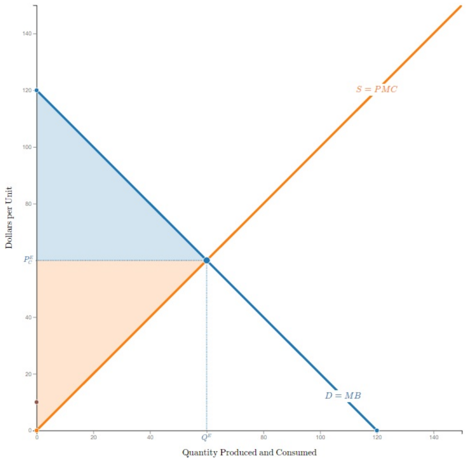


Figura 30.10: Un mercado en equilibrio

mercado, hay una externalidad negativa con un costo marginal social (CMS) asociado que es mayor al costo marginal privado del productor, de tal manera que se ve así: Nótese entonces que la presencia de

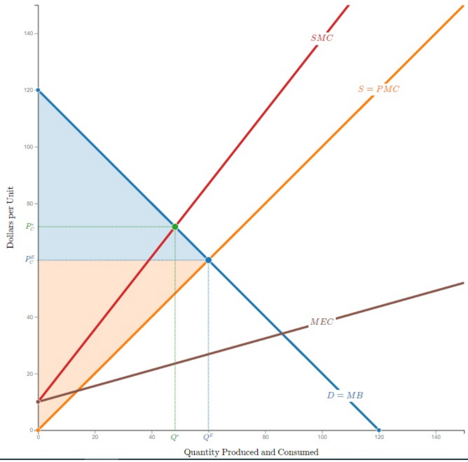


Figura 30.11: Un mercado en equilibrio pero con una externalidad negativa presente.

externalidades (positiva como negativa) lo que hace es que surja un punto óptimo distinto al punto de equilibrio al que llegaría el mercado por sí solo, porque los costos sociales no son todos incorporados en los costos privados de la producción.

De esta manera, mediante impuestos piguvianos (en el caso de las externalidades negativas) o subsidios (para las externalides positivas) se podría ajustar dicho mercado para alcanzar el óptimo.

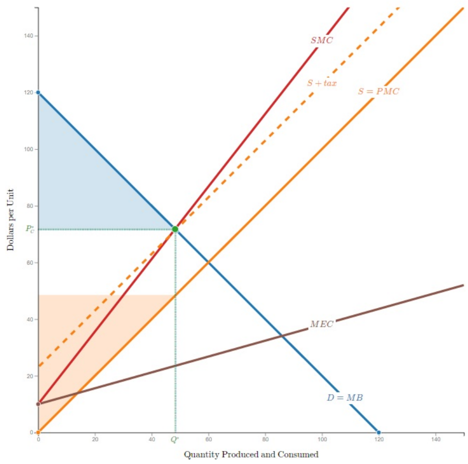


Figura 30.12: Un mercado con externalidad negativa en el óptimo social por medio de un impuesto piguviano.

Parte V

Apéndice Matemático

Capítulo 31

Repaso de pre-cálculo

[1]

31.1. Álgebra

31.1.1. Fórmulas notables

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
- $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

31.1.2. Leyes de potencias

- $a^0 = 1$
- $a^1 = 1$
- $a^n \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- $(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$
- $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$
- $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

31.1.3. Leyes de radicales

- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

[1]Extraído de Sullivan, 1997 y Mena González y Rodríguez Ramírez, s.f.

31.1.4. Funciones

Definición 54 [Función]. Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales (si fueran complejos entonces sería una función compleja); una función de X en Y es una regla o correspondencia que asocia cada elemento de X a un **único** elemento de Y. El conjunto X es el dominio de la función mientras que el conjunto Y es el codominio de la función. Para cada elemento $x \in X$ el elemento correspondiente $y \in Y$ es la imagen o valor de la función en x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el rango de la función.

Definición 55 [Función creciente y decreciente]. Dada una función real $f : D_f \to \mathbb{R}$, si $]x_1, x_2[\subseteq D_f$ tal que $a, b \in]x_1, x_2[$ donde $a < b$ si:

- $f(a) < f(b)$ f es una función estrictamente creciente en $]x_1, x_2[$.
- $f(a) > f(b)$ f es una función estrictamente decreciente en $]x_1, x_2[$.

Definición 56 [Función positiva y función negativa]. Dada una función real $f : D_f \to \mathbb{R}$, si $]a, b[\subseteq D_f$ tal que $\forall x \in]a, b[$ si:

- $f(x) < 0$ f es una función negativa en $]a, b[$.
- $f(x) > 0$ f es una función positiva en $]a, b[$.

31.2. Función polinomial

Definición 57 [Función polinomial]. Una función polinomial se define como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_o \tag{31.1}$$

donde $a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ y los exponentes de la variable x son números reales.

31.2.1. Función constante

Definición 58 [Función constante]. Defínase una función constante como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = a_0 \tag{31.2}$$

31.2.2. Función lineal

Definición 59 [Función lineal]. Defínase una función lineal como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = a_1 x + a_0 \tag{31.3}$$

con $a_1 \neq 0$

31.2.3. Función cuadrática

Definición 60 [Función cuadrática]. Defínase una función cuadrática como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = a_2 x^2 + a_1 x_1 + a_0 \tag{31.4}$$

con $a_2 \neq 0$

31.2.4. Función cúbica

Defínase una función cúbica como:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{31.5}$$

con $a_3 \neq 0$

31.3. Factorización de polinomios

1. Comprobar siempre si existe factor común (monomio o polinomio que está en común en todos los términos del polinomio original).
2. Verificar la cantidad de términos en el polinomio.
   - Binomio: verificar si es:
     - Diferencia de cuadrados: determinar que cada término del binomio tenga raíz cuadrada.
       $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
     - Suma-diferencia de cubos: determinar que cada término del binomio tenga raíz cúbica.
       $$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
       $$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$
3. Trinomio: de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$.
   - Trinomio cuadrado perfecto
   - Inspección
   - Fórmula general
     $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
     Donde $b^2 - 4ac = \Delta$
     - $\Delta > 0 \Rightarrow$ se puede factorizar; hay dos ceros distintos ($x_1 \neq x_2$):
       $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
     - $\Delta = 0 \Rightarrow$ se puede factorizar; hay dos ceros iguales ($x_1 = x_2$):
       $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$
     - $\Delta < 0 \Rightarrow$ no se puede factorizar en los números reales.
4. Polinomio en una variable: aplicar
   - División sintética
   - Teorema del residuo (para determinar los ceros del polinomio)
   - Teorema del factor (para determinar los factores del polinomio)
5. Polinomio en varias variables
   - Agrupar términos con alguna característica en común.

Capítulo 32

Repaso de cálculo

[1]

32.1. Derivación

32.1.1. Derivada por definición

Definición 61 [Derivada]. Defínase la derivada de una función f en un número a, denotada con $f'(a)$, es:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{32.1}$$

siempre y cuando este límite exista. Nótese que si $x - a = h$, entonces $x = h + a$ y así $f(x) = f(a + h)$ y cuando x se aproxima a a, h se aproximará a 0. Entonces se puede enunciar, equivalentemente, la definifcón de una derivada como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \tag{32.2}$$

32.1.2. Derivabilidad y continuidad

[Teorema] Si una función f es derivable en $x = c$ entonces es continua en dicho valor. **Atención*: esto no es cierto en sentido contrario; es decir: que una función sea continua en $x = c$ no significa,** **necesariamente** que sea derivable en dicho valor.

[Teorema] Si una función no es continua en $x = c$, entonces no es derivable ne dicho valor. Una función f no es derivable en $x = c$ si:

- La gráfica tiene tangente vertical
- Es discontinua
- Si hay una esquina (pico) pronunciada o sutil

32.1.3. Reglas de derivación

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
- $(cf(x))' = cf'(x)$
- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ (sean f y g funciones derivables)
- $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$ (sean f y g funciones derivables)
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (sean f y g funciones derivables)
- $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (sean f y g funciones derivables)

[1] Extraído de Mena González, 2017 y Sancho Mora, 2014

32.1.4. Derivada de funciones especficas

- $[sen(x)]' = cos(x)$
- $[tan(x)]' = sec^2(x)$
- $[cot(x)]' = -csc^2(x)$
- $[a^x]' = a^x ln(a)$
- $[log_a(x)]' = \frac{1}{xln(a)}$
- $[cos(x)]' = -sen(x)$
- $[sec(x)]' = sec(x)tan(x)$
- $[csc(x)]' = -csc(x)cot(x)$
- $[e^x] = e^x$
- $[ln(x)]' = \frac{1}{x}$
- $f : [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; f(x) = arcsen(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f : [-1,1] \to [0,\pi]; f(x) = arccos(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f : \mathbb{R} \to]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[; f(x) = arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f : \mathbb{R} \to]0,\pi[; f(x) = arccot(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$
- $f :]-\infty,-1] \cup [1,+\infty] \to [0,\pi] - \{\frac{\pi}{2}\}; f(x) = arcsec(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $f :]-\infty,-1] \cup [1,+\infty] \to [\frac{-\pi}{1}, \frac{\pi}{2}] - \{0\}; f(x) = arcssc(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Definición 62 [Regla de la cadena]. Dadas dos funciones derivables f, g, se tiene que:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{32.3}$$

32.1.5. Primer y segunda derivada

32.1.5.1. Primera derivada: monotonía

Sea f una función derivable en $I =]a,b[$:

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es creciente en I.
- Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es decreciente en I.
- Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

32.1.5.2. Segunda derivada: concavidad

Sea f una función cuya segunda derivada existe en $I =]a,b[$:

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba (**convexa**) en I.
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo (**cóncava**) en I.

32.1.6. Regla de L'Hôpital

Considere dos funciones f, g derivables con $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I con $c \in I$ (excepto posiblemente en c). Si

- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$

Es decir, se tienen la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$ entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema aplica para límites laterales o bien si $x \to \pm\infty$ siempre y cuando se mantenga la forma indeterminada.

32.1.7. Convexidad y concavidad

Definición 63 [Función convexa]. Sea f una función univariable definida en el intervalo I. f es entonces una función convexa si $\forall a \in I, b \in I, \lambda \in (0,1)$:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \tag{32.4}$$

Entonces una función univariable definida en un intervalo es convexa si ningún segmento líneo que une dos puntos en la gráfica nunca queda por debajo de la gráfica.

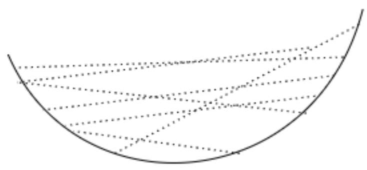


Figura 32.1: Una función convexa

Definición 64 [Función cóncava]. Sea f una función univariable definida en el intervalo I. f es entonces una función cóncava si $\forall a \in I, b \in I, \lambda \in (0,1)$:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \geq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \tag{32.5}$$

Entonces una función univariable definida en un intervalo es cóncava si ningún segmento líneo que une dos puntos en la gráfica nunca queda por encima de la gráfica.

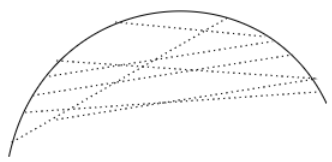


Figura 32.2: Una función cóncava

32.2. Funciones en varias variables

32.2.1. Diferenciales

Definición 65 [Derivada parcial]. Sea $f : \mathcal{D} \subseteq \mathrm{R^n} \to \mathrm{R}$ una función escalar en n variables reales, de manera tal que

$$z = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

entonces la derivada parcial de f respecto a x_i existe si y solo si existe el límite:

$$D_i f(X) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h}$$

Es decir, que si

$$g(x_i) = f(x_1, ..., x_n) \Rightarrow D_i f(X) = g'(x_i)$$

Hay varias maneras de denotar la derivada parcial de f respecto a x_i:

$$D_i f(X) = D_{x_i} f(X) = f_{x_i}(X) = f_i(X) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

Definición 66 [Derivadas parciales de orden superior]. Sea $f : D \rightarrow \mathrm{R}$ una función escalar en n variables reales y sean $n_1, n_2, ..., n_k \in \{1, 2, ..., n\}$. Se denota la derivada de orden k de f como:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_k} ... \partial x_{n_3} \partial x_{n_2} \partial x_{n_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{n_k}}(... \frac{\partial}{\partial x_{n_3}}(\frac{\partial}{\partial x_{n_2}}(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}))...)$$

También se escribe:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_k} ... \partial x_{n_3} \partial x_{n_2} \partial x_{n_1}} = f_{n_1, n_2, n_3, ..., n_k}$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_k} ... \partial x_{n_3} \partial x_{n_2} \partial x_{n_1}} = f_{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}}$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_k} ... \partial x_{n_3} \partial x_{n_2} \partial x_{n_1}} = D_{n_1, n_2, n_3, ..., n_k}$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_k} ... \partial x_{n_3} \partial x_{n_2} \partial x_{n_1}} = D_{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}}$$

Capítulo 33

Fundamentos matemáticos

Dado que la economía es el estudio de encontrar los mejores usos posibles para los recursos escasos, la optimización sujeta a restricciones será una constante a lo largo de la formación económica.

33.1. Nociones básicas sobre la optimización

Suponga un contexto de teoría del consumidor donde se busca maximizar el mayor nivel de utilidad posible sujeto a una restricción presupuestaria dada. Para el caso de dos bienes, una restricción presupuestaria tiene la forma:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

Recuerde que la función de utilidad no es más que una conveniente representación matemática de las preferencias del consumidor. En particular, lo que permite la figura de la función de utilidad son dos cosas particularmente relevante para nuestros efectos:

1. Asignar un orden de relación a las distintas posibles combinaciones de bienes que conforman una determinada cesta de consumo (x, y).
2. Introducir el instrumental matemático para la manipulación de las preferencias de los consumidores.

Si una función de utilidad lo que hace es valorar o "hacer un ranking"de las preferencias del consumidor (utilidad ordinal), entonces debe ser necesariamente que, ante una canasta de dos bienes, entonces: $U(x, y) = k$, donde k es una constante cualquiera. Es decir, que una determinada combinación de bienes x y y, debe generarmente un cierto nivel determinado de utilidad, por lo que en realidad lo que tenemos con las funciones de utilidad son niveles de utilidad, o en términos más matemáticos y formales: las funciones de utilidad son curvas de nivel.
Es así que entonces el problema de maximización del consumidor (y en general cualquier problema de maximización con restricciones) se traduce en encontrar la cesta o combinación de bienes, insumos, etc., que genere el mayor nivel de utilidad, producción, etc.
Es así que, en búsqueda de la función de utilidad con un mayor de nivel de utilidad posible, nos encontramos con que la curva de indiferencia que representa un mayor nivel de utilidad **posible**, es aquella que sea tangente a la restricción presupuestaria.
Observe que existen dos grandes posibilidades de asequibilidad de canastas dada una restricción: existen las canastas asequibles y las canastas no asequibles. El problema de la maximización u optimización consisten en alcanzar la máxima canasta asequible posible.

33.2. El argumento del arbitraje

Una de las maneras más intuitivas para entender la optimalidad, es por medio de los cambios en las situaciones iniciales. Si una persona o consumidor tiene una cierta dotación inicial (por el momento asúmase que la dotación es equivalente a un cierto nivel de ingreso por ahora indeterminado m) a partir de la cual decide adquirir una determinada cesta o conjunto de consumo, pregúntese: ¿ante algún cambio en que afecte el estado inicial, cambiaría el consumidor sus decisiones iniciales?

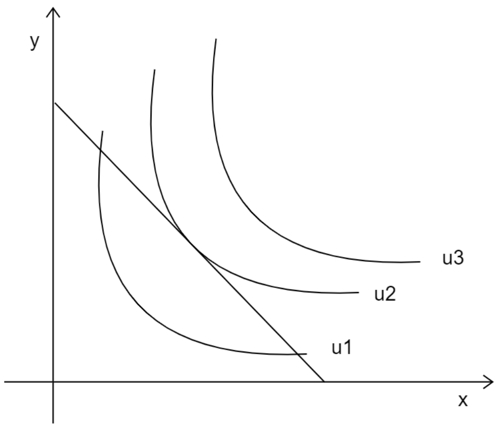


Figura 33.1: Posibles casos de funciones utilidad alcanzables (u1 y u2), inalcanzables (u3) y no óptimas (u1).

Figura 33.2: Posible asequibilidad dada la restricción.

Si ante el cambio en su situación el consumidor se percata de que ahora existe una nueva combinación de consumo que le otorga un mejor o diferente nivel de utilidad, entonces este consumidor debería ajustar sus decisiones de consumo ante las nuevas circunstancias.
Entonces, un conjunto de consumo se sabe que es óptimo, una vez que no sea posible encontrar otras combinaciones de consumo que otorguen un mayor nivel de utilidad. Por lo tanto, entiéndase que el examen o prueba de optimalidad consiste en la imposibilidad de encontrar una cesta de consumo que mejore la utilidad actual.
De ahora en adelante, cuando se hable de cambios marginales o infinitesimales o pequeños, por ejemplo en la variable x, se usará la notación dx. Entonces, suponga la siguiente situación: una persona consumidora tiene unas determinadas preferencias que generan una cierta función de utilidad que depende de dos productos: x y y. Ahora, esta persona adquiere entonces una combinación de consumo inicial dada su dotación inicial (ingreso). Dicha combinación de consumo (x, y), en particular, implica un consumo positivo tanto de x como de y. Ahora, suponga que esta persona consumidora desea cambiar su comportamiento: desea redistribuir un poco de su ingreso, para consumir más de x, sin embargo su ingreso no ha cambiado, por lo que para poder consumir más de x, tendrá que dejar de consumir de y.
Entonces, si se tiene un ingreso de m, se sabe que el consumo de x aumentará en $\frac{dm}{p_x}$ y el consumo de y disminuirá en $\frac{dm}{p_y}$.
Ahora, dado que los consumos de los bienes de x y de cambiarán, pues entonces es así que $U(x, y)$ también tiene que cambiar, ¿pero cuánto cambiará? Cambiará:

$$\Delta U = UMgdx + UMgdy \tag{33.1}$$

Sucede que entonces el cambio en la utilidad por el aumento en el consumo de x será de $UMgx \cdot \frac{dm}{p_x}$ y el cambio en la utilidad por la reducción en el consumo de y sería de $UMgy \cdot \frac{dm}{p_y}$.
Por lo tanto, sabiendo en cuánto cambia el consumo de x y el de y, el cambio neto en la utilidad de la persona consumidora ha de ser el siguiente:

$$\Delta U = UMgx \cdot \frac{dm}{p_x} + UMgy \cdot \frac{dm}{p_y} \tag{33.2}$$

O en otras palabras:

$$\Delta U = dm(\frac{UMgx}{p_x} + \frac{UMgy}{p_y}) \tag{33.3}$$

Por lo tanto, si el cambio neto en la utilidad total es positivo, significa que el ajuste (*rellocation*) en el consumo de x y de y, trajo una mejoría para la persona en términos de utilidad, significando así que entonces la decisión inicial no era óptima porque siempre hubo otra posible combinación que le generaría una mejor situación en términos de utilidad.
De tal manera que, la única manera en que la decisión inicial de consumo podría ser óptima, es si el cambio

neto en la utilidad total es no-positiva, es decir, menor o igual que cero.
Por lo tanto:

$$\Delta U \leq 0 \tag{33.4}$$

Es decir, que si la decisión de consumo inicial no fuera óptima, pequenos, infinitesimales aumentos en el consumo de x aumentarían la utilidad total de esta persona, incentivándola pues a seguir aumentando el consumo de x mientras deja de consumir y. Ahora, si esto es tan evidente, ¿podría esta persona seguir indeterminadamente aumentando su consumo de x? La respuesta es no.
Recuerde que una de las características de las utilidades es que existen utilidades marginales decrecientes: esto es, que al aumentar el consumo de una mercancía x, así consecuentemente también ha de disminuir la utilidad marginal de la siguiente unidad consumida de esa mercancía.
Por ende, este proceso de arbitraje no puede continuar indefinidamente, porque con cada unidad adicional de x consumida, así también es cada vez menor la utilidad que genera esa unidad adicional. Por ende, este proceso continúa hasta que los cambios en las utilidades marginales se igualen, por lo que se sabe que necesariamente en el óptimo debe ser que:

$$\frac{UMgx}{p_x} = \frac{UMgy}{p_y} \tag{33.5}$$

A esta ecuación se le conoce como la condición de no arbitraje, e implica que en el óptimo, la persona consumidora no ha de tener incentivos para modificar su decisión de consumo, y si recibiera una unidad adicional de ingreso (dotación), sería pues indiferente entre invertirla en consumir más de uno o de otro bien.

33.3. El problema de la programación

El problema económico de la maximización consiste en hallar una distribución de recursos escasos de manera ajustada a unos fines determinados o concretos para un momento particular. Matemáticamente, esto se traduce a determinar o encontrar los valores de ciertas variables que están sujetas a ciertas restricciones de manera que se maximice la función dada. Este planteamiento matemático del problema económico generalmente es conocido como el problema de la programación matemática.

33.3.1. Planteamiento formal del problema de programación

El problema de la programación es pues el de encontrar o escoger valores para n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ llamadas variables instrumentos, las cuales se encuentran representadas por el siguiente vector columna:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{33.6}$$

conocido como vector instrumento, el cual es un vector en un espacio Euclídeo de n dimensiones E^n.
Este vector es asequible si y solo si satisface todas las restricciones impuestas al problema de maximización, y el conjunto de todos los vectores asequibles forma un conjunto de oportunidad X, el cual a su vez, es un subespacio de E^n.
La función objetivo es un resumen matemático del objetivo del problema. Es una función de valor real de las variables instrumentos:

$$F = F(\vec{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{33.7}$$

La cual, se asume, es continuamente diferenciable.
Entonces, el problema general de programación matemática es pues entones escoger un vector instrumento del conjunto de oportunidad X, que maximice el valor de la función objetivo:

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x}} \quad & F(\vec{x}) \\ \text{sujeto a} \quad & x \in \vec{X} \end{aligned} \tag{33.8}$$

donde $\vec{X}$ es un subconjunto de espacio Euclídeo E^n.
Generalmente, aunque esto no siempre será así, en los problemas de programación clásica, las restricciones

son tipo ecuaciones, en contraposición a inecuaciones:

$$\begin{pmatrix} g_1(x) = & g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = & b_1 \\ g_2(x) = & g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(x) = & g_n(x_1, x_2, ..., x_n) = & b_n \end{pmatrix}$$

en donde las funciones $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), ..., g_n(\vec{x})$ son funciones n dimensionales continuamente diferenciables de las variables instrumentos, y se conocen bajo el nombre de funciones restricción, y los parámetros $b_1, b_2, ..., b_n$ son números reales llamados *contantes de las restricciones.*
Ahora, de una manera más sencilla, la expresión matricial de las restricciones puede ser escrita de forma vectorial:

$$g(\vec{x}) = \vec{b} \tag{33.9}$$

en donde g y b son los vectores columna n dimensionales: $g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, los problemas clásicos de programación (maximización) consisten en maximizar una función objetivo dada sujeta a restricciones de igualdad:

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x}} \quad & F(\vec{x}) \\ \text{sujeto a} \quad & g(\vec{x}) = b \end{aligned} \tag{33.10}$$

Todo lo visto anteriormente resume los problemas de programación clásicos de tipo lineal, en donde las restricciones son de tipo ecuaciones, es decir, igualdades. Sin embargo, también en común toparse con problemas de programación (maximización) no lineal, en donde ahora pueden aparecer dos nuevos tipos de restricciones:

1. Restricciones de no-negatividad

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{33.11}$$

   Que en forma vectorial se puede representar:

$$\vec{x} \geq 0 \tag{33.12}$$

   En donde 0 es un vector columna de 0's.

2. Restricciones de tipo inecuaciones

$$\begin{pmatrix} g_1(x) = & g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq & b_1 \\ g_2(x) = & g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \leq & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(x) = & g_n(x_1, x_2, ..., x_n) \leq & b_n \end{pmatrix} \tag{33.13}$$

   Que en forma vectorial se puede representar:

$$g(\vec{x}) \leq \vec{b} \tag{33.14}$$

Aquí las funciones $g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), ..., g_n(\vec{x})$ se asume que son funciones continuamente diferenciables y las constantes restricción $b_1, b_2, ..., b_n$ se asume que son números reales dados.
Por tanto, los problemas de programación no lineal consisten en maximizar una función objetivo dada mediante la elección de variables no negativas sujetos a restricciones de desigualdad.

$$\begin{aligned} \max_{\vec{x}} \quad & F(\vec{x}) \\ \text{sujeto a} \quad & g(\vec{x}) \leq b, \quad \vec{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{33.15}$$

Se asume que en los problemas de programación con n variables instrumento y m restricciones, tanto el número de variables n, como de restricciones m, es infinito y específicamente $n > m$, y la diferencia $n - m$ es conocido como el número de grados de libertad del problema de maximización.

33.4. Método de los multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange es uno de los métodos de resolución de problemas de programación lineal más poderosos. Para introducir este método, piense en el caso más básico de maximización con un grado de libertad, en donde hay dos variables y una sola restricción:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & F(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a} \quad & g(x_1, x_2) = b \end{aligned} \tag{33.16}$$

Asúmase por el momento que existe en efecto una solución local para el problema, y dicha solución tiene la forma: $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, en el cual en particular, la derivada no está indefinida. Este supuesto es:

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x^*) \neq 0 \tag{33.17}$$

Entonces, dado el supuesto anterior, debe ser que el diferencial total ha de ser:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 = 0 \tag{33.18}$$

Ajustando, dicha expresión queda de la forma:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \tag{33.19}$$

Y despejando x_2 en términos de x_1 queda:

$$x_2 = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}}x_1 \tag{33.20}$$

O sea:

$$x_2 = h(x_1)$$

$$\frac{dh}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}}$$

Sabiendo este valor de x_2, se abre una posiblidad nueva con respecto al problema de optimización: plantear el problema de optimización sin restricción de la forma:

$$\max_{x_1} \quad F(x_1, h(x_1)) \tag{33.21}$$

Una condición de primer orden para obtener un máximo local sería entonces:

$$\frac{dH}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dh}{dx_1} = 0 \tag{33.22}$$

Tomando la función objetivo $F(x_1, x_2)$, y haciendo su derivada total:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 \tag{33.23}$$

Igualando el diferencial total a 0, se obtiene:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 \tag{33.24}$$

Y de lo anterior, se obtiene que la pendiente de la función objetivo es:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{contorno} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} \tag{33.25}$$

Sin embargo, la pendiente de la función de restricción es:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{restricción} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \tag{33.26}$$

Por lo tanto, una condición de primer orden para encontrar un máximo implica entonces la tangencia en la solución, en la cual la pendiente del contorno (función objetivo) ha de ser igual a la pendiente de la función de restricción:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{contorno} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{restricción} \tag{33.27}$$

Note que esta restricción es una condición muy similar a la idea de la condición de no arbitraje. La pendiente de la función objetivo (contorno de la función) es una relación entre los cambios marginales de las variables instrumentos en cuestión, que dependiendo del contexto, pueden interpretarse estas variables instrumento como bienes, factores de producción, ocio y trabajo, etc., de manera que se está ante una valoración subjetiva de bienes o de insumos por parte de un agente o empresa, lo cual debe ser igual a la valoración objetiva (relación de precios del mercado).
De no cumplirse esta igualdad, se estaría frente a un escenario en el cual cambiando ligeramente las cantidades de las variables instrumentos, se obtendría una mejora de la utilidad o de los beneficios o de lo que sea la variable objetivo. Cuando no haya igualdad entre estas pendientes no habrá igualdad entre la valoración objetiva y la valoración subjetiva de las variables instrumentos, de forma que cabría buscar mejores posiciones o resultados vendiendo o comprando (intercambiando) la asignación inicial (dotación) de dichas variables instrumentos hasta que no sea posible seguir mejorando.
Es decir, que el único punto o momento en el cual no habría un incentivo para cambiar la asignación de las variables instrumentos será cuando las valoraciones subjetiva y objetiva sean iguales y coincidan, puesto que toda posiblidad de ganancia ya habrá sido agotada.

Definición 67. Extremos con restricciones: sea $f : D \subseteq R^n \to R$ una función escalar y sean $g_1, g_2, ..., g_p$ funciones $\mathcal{D} \to \mathcal{R}$ funciones escalares tal que:

$$\mathcal{R} : g_1(X) = 0 \wedge g_2(X) = 0 \wedge ... \wedge g_p(X) = 0$$

se dice que $\{(\mathcal{X}_0)$ es un:

- Máximo local sujeto a las restricciones $\mathcal{R}$ si:

$$f(\mathcal{X}_0 + h) - f(X_o) \leq 0, donde \quad X_0 \in \mathcal{R} \wedge X_0 + h \in \mathcal{R} \wedge h \approx \vec{0}$$

- Máximo local estricto sujeto a las restricciones $\mathcal{R}$ si:

$$f(\mathcal{X}_0 + h) - f(X_o) < 0, donde \quad X_0 \in \mathcal{R} \wedge X_0 + h \in \mathcal{R} \wedge h \approx \vec{0}$$

- Mínimo local sujeto a las restricciones $\mathcal{R}$ si:

$$f(\mathcal{X}_0 + h) - f(X_o) \geq 0, donde \quad X_0 \in \mathcal{R} \wedge X_0 + h \in \mathcal{R} \wedge h \approx \vec{0}$$

- Mínimo local estricto sujeto a las restricciones $\mathcal{R}$ si:

$$f(\mathcal{X}_0 + h) - f(X_o) > 0, donde \quad X_0 \in \mathcal{R} \wedge X_0 + h \in \mathcal{R} \wedge h \approx \vec{0}$$

A los extremos sujetos a restricciones también se le conoce bajo el nombre de extremos condicionados, restringidos o ligados.

Definición 68. Multiplicadores de Lagrange: sean $f, g_1, g_2, ..., g_n$ funciones $D \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$. Se dice entonces la función de Lagrange (o lagrangeano) $\mathcal{L} : \mathcal{D} \to \mathrm{R}$ asociada a f bajo las restricciones:

$$g_1(\vec{X}) = 0, g_2(\vec{X}), ..., g_p(\vec{X}) \tag{33.28}$$

corresponde a:

$$\mathcal{L}(\vec{X}) = f(\vec{X}) + \lambda_1 g_1(\vec{X}) + \lambda_2 g_2(\vec{X}) + ... + +\lambda_n g_n(\vec{X}) \tag{33.29}$$

donde los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los llamados multiplicadores de Lagrange.
Entonces, optimizar una función $z = f(\vec{X})$ bajo las restricciones $g_1(\vec{X}), g_2(\vec{X}), ..., g_n(\vec{X})$ es equivalente a optimizar la función de Lagrange (lagrangeano) $\mathcal{L}$.

Es decir, $f(X_0)$ es un punto crítico crtico con restricciones entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tales que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(X_0) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i}(X_0) + ... + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(X_0) = 0$$

o lo que es lo mismo, X_0 es un punto crítico condicionado si es solución del sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1}(X) = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2}(X) = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{x_n}(X) = 0 \\ g_1(X) = 0 \\ g_2(X) = 0 \\ \vdots \\ g_n(X) = 0 \end{cases}$$

33.5. Criterio de la segunda derivada con restricciones

Existen numerosos criterios que permiten clasificar los puntos críticos en un problema de maximización o programación. En particular, para el contexto económico es fundamental comprender el criterio de la segunda derivada.

Definición 69. Considere el problema de optimizar $z = f(X)$ bajo las restricciones: $g_1(X) = 0, g_2(X) = 0, ..., g_p(X) = 0$. Y sea:

$$\mathcal{L}(X) = f(X) + \lambda_1 g_1(X), +\lambda_2 g_2(X) + ... + +\lambda_p g_p(X)$$

el lagrangeano correspondiente.
Suponiendo que X_0 es un punto crítico, entonces X_0 es solución al sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1}(X) & = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2}(X) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{L}_{x_n}(X) & = 0 \\ g_1(X) & = 0 \\ g_2(X) & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ g_n(X) & = 0 \end{cases}$$

Se obtiene que:

$$d^2\mathcal{L} = d^2 f + \lambda_1 d^2 g_1 + \lambda_2 d^2 g_2 + ... + \lambda_p d^2 g_p$$

y las restriciones $g_m(X) = 0$ generan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \nabla g_1(X_0) \cdot dX = 0 \\ \nabla g_2(X_0) \cdot dX = 0 \\ \vdots \\ \nabla g_p(X_0) \cdot dX = 0 \end{cases}$$

entonces, después de aplicar las condiciones anteriores a $d^2 L(X_0)$ se obtienen los siguientes criterios:

- Si $\forall dX \approx \vec{0}, d^2\mathcal{L}(X_0) < 0 \Rightarrow f(X_0)$es un máximo local
- Si $\forall dX \approx \vec{0}, d^2\mathcal{L}(X_0) > 0 \Rightarrow f(X_0)$ es un mínimo local
- Si $d^2\mathcal{L}(X_0)$ cambia de signo siendo $dX \approx \vec{0}$ entonces $f(X_0)$ es un punto silla condicionado. Es decir, si $d^2\mathcal{L}(X_0) > 0$ algunas veces, pero otras veces $d^2\mathcal{L} < 0$.
- Si $\exists dX \approx \vec{0}, d^2\mathcal{L}(X_0) = 0$, entonces no hay criterio para clasificar el punto X_0.

33.6. Optimización en economía

33.7. El caso de más de una variable de elección

Usualmente, la optimización aprendida hasta ahora, ha consistido en funciones con una única variable de elección, es decir, con funciones de la forma $y = f(x)$. Sin embargo, en la teoría microeconómica es necesario dar el paso hacia formas funcionales cuyas funciones objetivos involucren dos o más variables de elección. Para empezar, siempre es recomendable primero estudiar el caso más básico, una función objetivo con dos variables de elección de la forma $z = f(x, y)$, las cuales son todavía graficables. Una generalización al caso de n variables de elección implica perder la posiblidad de graficar estas funciones, por lo que primero se empezará viendo el caso de dos variables.

33.7.1. Valores extremos en funciones de dos variables

En las funciones de una única variable de elección, un valor extremo (máximo o mínimo) usualmente es presentado como la cima o el valle de una función en una gráfica de dos dimensiones. Ahora, con funciones de dos variables de elección de la forma $z = f(x, y)$ se pasará a gráficas de tres dimensiones.

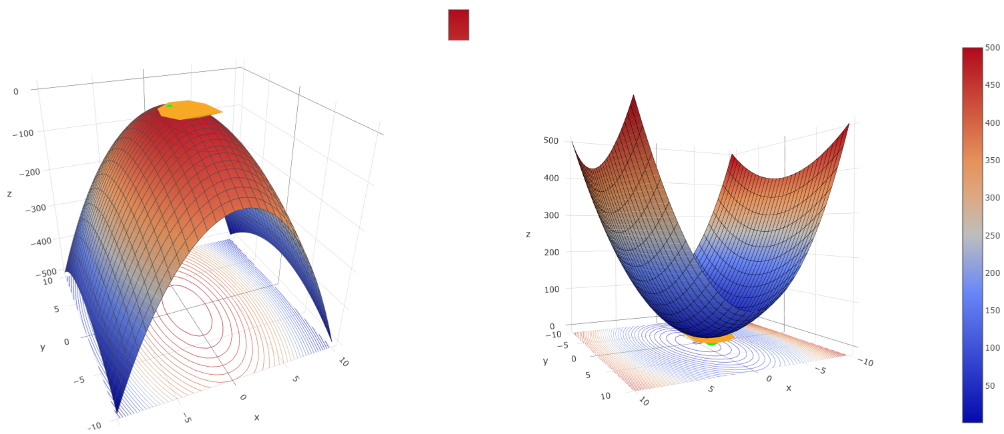


Figura 33.3: En el primer diagrama el punto constituye un máximo mientras que en el segundo constituye un mínimo.

33.7.2. Condición de primer orden

Para una función $z = f(x, y)$ la condición de primer orden **necesaria** para un extremo (ya sea un máximo o un mínimo) es $dz = 0$. Pero dado que ahora z es una función con múltiples variables indepedientes, dz es ahora un diferencial total. Así que la condición de primer orden es

$$dz = 0 \qquad \text{para arbitrarios valores de } dx \text{ y } dy \text{ ambos distintos de cero} \tag{33.30}$$

Un extremo ha de ser un punto estacionario, y en un punto estacionario, dz es una aproximación al verdadero cambio Δz, el cual debe ser cero para arbitrarios dx y dy, ambos distintos de cero. Así, en un caso de dos variables, el diferencial total sería

$$dz = f_x dx + f_y dy \tag{33.31}$$

Para poder satisfacer la condición $dz = 0$ es **necesario y suficiente** que las dos derivadas parciales f_x y f_y sean simultáneamente iguales a cero. Así, dicha condición se puede replantear de la siguiente manera:

$$f_x = f_y = 0 \qquad \vee \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0\right] \tag{33.32}$$

33.7.3. Condición de segundo orden

33.7.3.1. Concavidad y convexidad

33.8. El Teorema de Karush-Kuhn-Tucker

33.8.1. Un ejemplo en dos variables

[1]Considere un consumidor cuyas preferencias sobre canastas de bienes $(x, y) \in \mathrm{R}^2$ están dadas por la función de utilidad de tipo Cobb-Douglas:

$$(x, y) = x^\theta y^{1-\theta}$$

con $\theta \in (0,1)$. Sea m el ingreso del consumidor y p_x, p_y los precios unitarios de los bienes x, y respectivamente. Suponga que, por un tema de escasez, el consumidor no puede consumir más de de $\overline{x}$ del bien x.

1. Plantee el problema de optimización del consumidor.
2. Escriba el Lagrangiano asociado al problema de optimización.
3. Derive las condiciones de primer orden usuales.
4. Plantee la condición de holgura complementaria y analice los diferentes casos bajo los cuáles esta se cumple.

Solución

1. El problema del consumidor es:

$$\begin{aligned} \max_{(x,y)\in\mathrm{R}^2} \quad & x^\theta y^{1-\theta} \\ \text{sujeto a} \quad & p_x x + p_y y = m \\ & x \leq \overline{x} \end{aligned} \tag{33.33}$$

2. Sean $\lambda, \mu, \in \mathrm{R}$, constantes con $\mu \geq 0$ (por el teorema). El lagrangiano asociado al problema es:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) = x^\theta y^{1-\theta} + \lambda(m - p_x x - p_y y) + \mu(\overline{x} - x)$$

3.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} : \theta(\frac{y}{x})^{1-\theta} - \lambda p_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} : (1-\theta)(\frac{x}{y})^{\theta} - \lambda p_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} : m - p_x x - p_y y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} : \overline{x} - x \geq 0$$

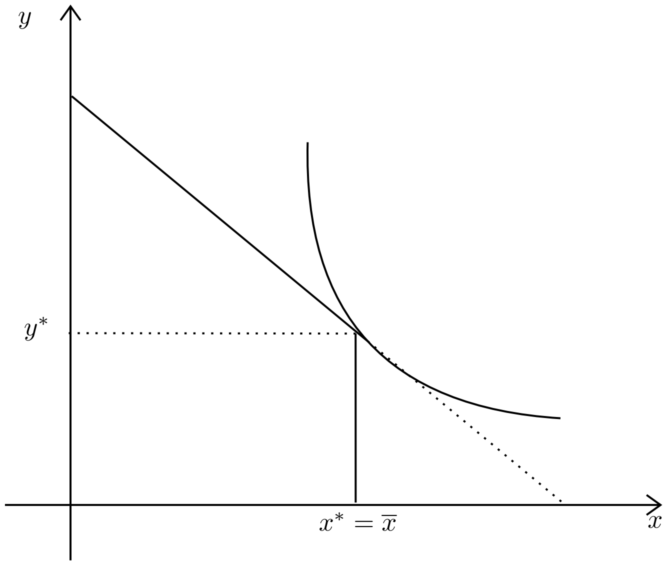
4. La condición de holgura complementaria es:

$$\mu(\overline{x} - x) = 0$$

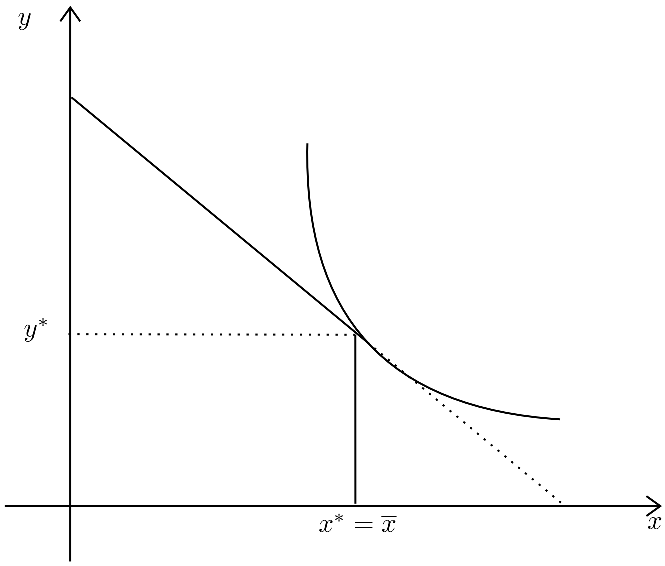
A partir de la cual, nace la posibilidad de analizar casos:

a) Caso: $\overline{x} - x = 0 \wedge \mu = 0$
Note que esto implica que $\overline{x} = x$. Es decir, que el consumo de x es exactamente igual al máximo que fue impuesto por la restricción adicional, sin embargo, dado que $\mu = 0$, la utilidad marginal por consumir una unidad adicional de ese bien restringido es 0, entonces la restricción no es vinculante, porque el consumidor de todos modos ya consumía en el nuevo punto de la restricción, y no tiene interés en consumir más allá de ese punto, por lo que la restricción adicional no está condicionando realmente al consumidor.

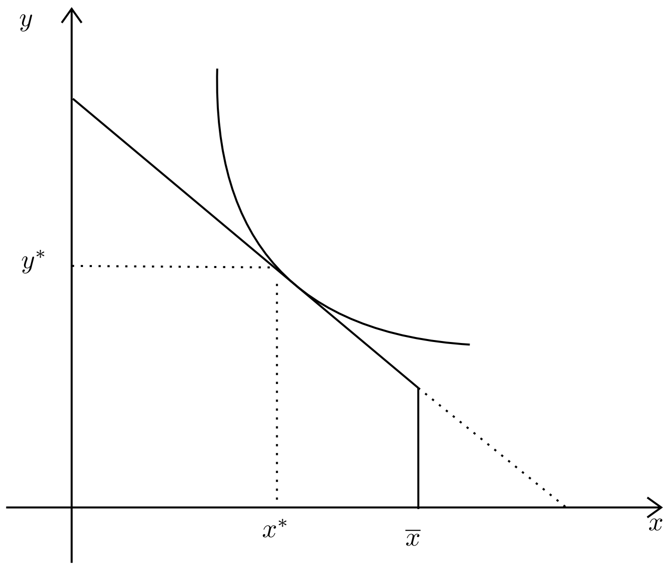
[1]Ejemplo tomado de **OrtegaBarrantes.**



b) Caso: $\overline{x} - x = 0 \wedge \mu > 0$ Note que esto implica que $\overline{x} = x$. Es decir, que el consumo de x es exactamente igual al máximo que fue impuesto por la restricción adicional, sin embargo, dado que $\mu > 0$, la utilidad marginal por consumir una unidad adicional de ese bien restringido es positiva, por lo que el consumidor sí obtendría una utilidad adicional por consumir más de ese bien adicional, sin embargo ya está consumiendo lo más que puede, que es $\overline{x}$, por lo que en este caso la restricción sí es vinculante.



c) Caso: $\overline{x} - x > 0 \wedge \mu = 0$ Note que esto implica que $\overline{x} \geq x$. Es decir, que el consumo de x es menor al máximo que fue impuesto por la restricción adicional, de modo que a pesar de que haya una restricción adicional no afecta en lo absoluto a este consumidor, porque él desea consumir menos de lo que se impuso como máximo a consumir que es $\overline{x}$.



y
y^*
x^*
$\overline{x}$
x

Capítulo 34

Un algoritmo para los problemas de maximización en economía

[1] El siguiente es un somero repaso de pasos o instrucciones a seguir para encontrar los óptimos a un problema de maximización con restricción:

1. Escoger una entrada cualquiera del vector de bienes, insumos, etc., x_k.
2. Resolver la ecuación: $\frac{f'(\vec{x})}{x_i} = \frac{f'(\vec{x})}{x_k}$ para cada variable x_i en términos de x_k, $x_i(x_k)_{i=1}^{i=n}$.
3. Evaluar $x_i(x_k)$ en la restricción del problema y resolver para $x_k(\vec{p}, k)$, en donde k es el término constante al cual está igualada la restricción del problema, la cual variará dependiendo del contexto del problema de maximización.

[1] Véase Zevelev, 2017

Capítulo 35

Funciones homogéneas y el teorema de Euler

35.1. Funciones homogéneas

Definición 70 [Funciones homogéneas]. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea[1] de grado k si:

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{35.1}$$

En otras palabras:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{35.2}$$

Importante: todas las funciones lineales son homogéneas de grado 1, mas no todas las funciones homogéneas de grado 1, son lineales. Por ejemplo: $f(x, y) = \sqrt{xy}$ es homogénea de grado 1 mas no lineal.

Por ejemplo, en economía, las funciones de beneficios y de costos derivadas de la función de producción, son homogéneas. Lo mismo pasa con las funciones de demanda derivadas de las funciones de utilidad.

Así, por ejemplo, una función de la forma $y = ax^k$, es homogénea de grado k. Una función de la forma $y = x^3 + 3x^2$ no es homogénea. En el caso de las funciones multivariables, por ejemplo, $y = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}$ es homogénea de grado $k_1 + k_2 + k_3$. Es decir: *una suma de monomios de grado k, es homogénea de grado k, mas una suma de monomios de diferentes grados no es homogénea.*

¿Por qué son importantes las funciones homogéneas en economía? Piense, por ejemplo, en una función de producción homogénea de grado 1:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \forall \lambda > 1$$

Si se toma $\lambda = 2$, esto significaría que si la empresa duplica simultáneamente todos los insumos empleados para producir, esto duplicaría la cantidad de producción total generada. Si fuera el caso que $\lambda = 3$, al triplicar simultáneamente todos los insumos, el producto total final también se triplicaría. Así, esta función de producción exhibiría retornos constantes a escala.

Pero, si la función de producción fuese homogénea de grado k, con $k > 1$, entonces diríamos que la función exhibe rendimientos crecientes a escala, lo cual signicaría que al multiplicar por un escalar λ simultáneamente todos los insumos de la producción, la producción crecerían en un factor mayor que λ.

Por el contrario, si la función es homogénea de grado k con $k < 1$, se dice que exhibe rendimientos decrecientes a escala, por lo cual, al magnificar todos los insumos simultáneamente en un factor λ, la producción crecería en un factor menor que λ. [Teorema de Euler] Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una diferencial en x y homogénea de grado k, entonces $\nabla f(x) \cdot x = kf(x)$.

Demostración. Fíjese x. Considere la función $H(\lambda) = f(\lambda x)$. Esta es una función compuesta, $H() = f \circ G(\lambda)$, donde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $G(\lambda) = \lambda x$.

Haciendo la regla de la cadena:

$$DH(\lambda) = DF(G(\lambda))DG(\lambda)$$

Si se evalúa la expresión anterior cuando $\lambda = 1$ se obtiene que:

[1] Consulte Sobel, s.f.

$$DH(1) = \nabla f(x) \cdot x \tag{35.3}$$

Por otro lado, se sabe por lo homogeneidad que $H(\lambda) = \lambda^k x$. Diferenciando la expresión del lado derecho se obtiene que:

$$DH(\lambda) = k\lambda^{k-1} f(\lambda x) \tag{35.4}$$

Y, evaluando $\lambda = 1$ se obtiene que:

$$DH(1) = kf(x) \tag{35.5}$$

Y, haciendo la igualación $DH(1) = DH(10$ finalmente se comprueba el teorema:

$$\nabla f(x) \cdot x = kf(x) \tag{35.6}$$

□

Una función de costos homogéa de grado 1 implica que si los costos de todos los insumos empleados en la producción se multiplican por un factor λ, costos totales se multiplican por un factor λ,

Las funciones de demanda de la persona consumidora son homogéneas de grado 0, lo cual quiere decir que, dada una función de demanda que depende depende de precios e ingreso $x_k(\vec{P}, m)$, si tanto los precios como el ingreso son multiplicados por un factor λ, entonces la restricción presupuestaria se mantiene intacta.

Parte VI

Bibliografía

Bibliografía

Adamson Badilla, M. (2019). Teoría Microeconómica I.

Arrow, K., Chenery, H., Minhas, B., & Solow, R. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, *43*(3), 225-250. %5Curl%7Bhttps://www.jstor.org/stable/1927286?origin=crossref%7D

Arrow, K., & Debreu, G. (1954). Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica*, *22*(3), 265-290. %5Curl%7Bhttps://www.jstor.org/stable/1907353?origin=crossref%7D

Berck, P., Sydsaeter, K., & Strom, A. (2005). *Economist's Mathematical Manual* (4.ª ed.). Springer.

Dixit, A. K. (1990). *Optimization in Economic Theory* (2.ª ed.). Oxford University Press.

Gao, F. (2016). Monopoly. %5Curl%7Bhttp://www.sfu.ca/~gaofengg/monopoly.pdf%7D

Geanakoplos, J. (s.f.). Kenneth Arrow's Contributions to General Equilibrium. %5Curl%7Bhttps://www.econometricsociety.org/sites/default/files/inmemoriam/arrow_geanakoplos.pdf%7D

Hardy, G., Littlewood, J., & Pólya, G. (1934). *Inequalities.* Cambridge Press University.

Intriligator, M. D. (2002). *Mathematical Optimization and Economic Theory* (Vol. 39). Society for Industrial and Applied Mathematics.

Jehle, G. A., & Remy, P. J. (2000). *Advanced Microeconomic Theory* (2.ª ed.). Pearson.

Levin, J., & Milgrom, P. (s.f.-a). Consumer Theory. %5Curl%7Bhttps://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20202/Consumer%20Theory.pdf%7D

Levin, J., & Milgrom, P. (s.f.-b). Producer Theory. %5Curl%7Bhttps://web.stanford.edu/~jdlevin/Econ%20202/Consumer%20Theory.pdf%7D

Mankiw, N. G. (2012). *Principios de Economía* (6.ª ed.). Cengage Learning.

Mas Colell, A., Green, J., & Whinston, M. D. (1995). *Microeconomic Theory.* Oxford University Press.

Mas Colell, A., Green, J., & Whinston, M. D. (1997). *Solutions Manual for Microeconomic Theory.* Oxford University Press.

Mena González, D. (2017). Cálculo I: Derivada.

Mena González, D., & Rodríguez Ramírez, K. (s.f.). *Funciones I: Precálculo.*

Miller, N. H. (2006). Monopoly. %5Curl%7Bhttps://nmiller.web.illinois.edu/documents/notes/notes9.pdf%7D

Miller, R. G., & Meiners, R. E. (1997). *Microeconomía* (3.ª ed.). McGraw-Hill.

Monge, M. V. (2021). Leontief functions of two variables. A new perspective. *Análisis Económico*, *36*(93), 159-166. https://doi.org/\url{10.24275/uam/azc/dcsh/ae/2021v36n93/Monge}

Monge Alfaro, M. (19.08.2020). Demandas Marshallianas para n variables. %5Curl%7Bhttps://youtu.be/JtmRUfkwcmM%7D

Ortega Barrantes, J. A. (2022). *EC3201 Laboratorio 0: Repaso de Karush Kuhn Tucker.*

Robles Cordero, E. (2007). *Las curvas de indiferencia de la Función Leontief: Manual para el dibujo de la función Leontief.* %5Curl%7Bhttps://www.dropbox.com/s/slmobr9c5ac8t5h/Capitulos.rar?dl=0&file_subpath=%2FManual+para+el+dibujo+de+la+funci%C3%B3n+Leontief.pdf%7D

Robles Cordero, E. (s.f). *Libro de Ejercicios Resueltos.* %5Curl % 7Bhttps : / / www . dropbox . com / s / slmobr9c5ac8t5h/Capitulos.rar?dl=0%7D

Romero Aguilar, R. (2019). *EC3201 - Teoría Macroeconómica 2.*

Sancho Mora, L. (2014). *Cálculo I.*

Sobel, J. (s.f.). Econ 205 - Slides from Lecture 10. %5Curl%7Bhttps://econweb.ucsd.edu/~jsobel/205f10/notes10.pdf%7D

Sullivan, M. (1997). *Precálculo* (4.ª ed.). Pearson-Educación.

Varian, H. R. (1992). *Análisis Microeconómico* (3.ª ed.). Antoni Bosch.

Varian, H. R. (2010). *Microeconomía Intermedia* (8.ª ed.). Antoni Bosch.

Vicuña, J. M. (2017). Cómo se escribe una ecuación de demanda? — Microeconomía — Libertelia. %5Curl%7Bhttps://www.youtube.com/watch?v=cfb7MZUd0R4%7D

Violet Robinson, J. (s.f.-a). market equilibrium: economics. %5Curl%7Bhttps://www.britannica.com/topic/market%7D

Violet Robinson, J. (s.f.-b). market: economics. %5Curl%7Bhttps://www.britannica.com/topic/market%7D

Zevelev, A. A. (2017). Closed Form Solutions in Economics. %5Curl%7Bhttps://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2354226%7D

Zuluaga Uribe, M. (2015). Oferta y demanda: una crítica a la tijera de Marshall. %5Curl%7Bhttps://www.mises.org.es/2015/02/oferta-y-demanda-una-critica-a-la-tijera-de-marshall/#:~:text=La%20tijera%20de%20Marshall%20es%20un%20instrumento%20demasiado%20simplificado%2C%20r%C3%ADgido,que%20se%20entrelazan%20y%20autorregulan.%7D

Zurita, F., & Vial, B. (2011). *Microeconomía*.