

## SOLUCIONARIO DEL TERCER EXAMEN PARCIAL I ciclo 2025

### Desarrollo

(52 puntos)

A continuación se le presentan cinco ejercicios, en cada uno de ellos responda lo que se le solicita. No asuma que un proceso es muy obvio o que es innecesario anotarlo.

1. [12 puntos] Usando multiplicadores de Lagrange y los procedimientos vistos en clase, encuentre el punto para el cual la función  $f(x, y, z) = x + y + z$  alcanza el máximo sujeto a la restricción  $9x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 36$ .

*Solución.* El Lagrangiano se define como:

$$L(\lambda, x, y, z) = x + y + z + \lambda (9x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 36)$$

Para determinar los extremos de  $f$  sujetos a la restricción dada se resuelve el siguiente sistema:

$$L_x = 0 \implies 1 + 18\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$L_y = 0 \implies 1 + 24\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$L_z = 0 \implies 1 + 8\lambda z = 0 \quad (3)$$

$$L_\lambda = 0 \implies 9x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 36 = 0 \quad (4)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se deduce que  $\lambda \neq 0$ , de lo contrario se obtendría una contradicción. Ahora bien, se despeja  $x$ ,  $y$  y  $z$  para sustituir en (4), observe:

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{18\lambda} \\ y = \frac{-1}{24\lambda} \\ z = \frac{-1}{8\lambda} \end{cases} \implies 9 \left( \frac{-1}{18\lambda} \right)^2 + 12 \left( \frac{-1}{24\lambda} \right)^2 + 4 \left( \frac{-1}{8\lambda} \right)^2 = 36$$

Simplificando y resolviendo la ecuación se tiene  $\frac{1}{9\lambda^2} = 36 \implies \lambda = \frac{\pm 1}{18}$ . Los críticos de  $L$  son:

$$P_1 \left( -1, \frac{-3}{4}, \frac{-9}{4} \right)_{\lambda = \frac{1}{18}} \quad \text{y} \quad P_2 \left( 1, \frac{3}{4}, \frac{9}{4} \right)_{\lambda = \frac{-1}{18}}$$

Como  $9x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 36$  es una región cerrada y acotada, entonces el máximo de  $f$  se alcanza en el punto que genere la imagen mayor:

$$f(P_1) = -4 \quad \text{y} \quad f(P_2) = 4$$

Por tanto, el máximo  $f$  se alcanza en  $P_2$ . ■

2. Considere el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max f(x, y) &:= x^2 + y^2 + y - 1 \\ \text{sujeta a } x^2 + y^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

con  $y > 0$  y  $x \geq 0$ .

(a) [3 puntos] Plantee las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

(b) [7 puntos] Resuelva el problema dado, utilizando los métodos visto en clase.

*Solución.* Se define la función de Lagrange como:

$$L(\lambda, x, y) = x^2 + y^2 + y - 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

donde

$$\begin{cases} L_x = 2x - 2x\lambda \\ L_y = 2y + 1 - 2y\lambda \\ L_\lambda = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

Considerando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para maximizar, se tiene:

$$\begin{array}{lll} x \geq 0 & x \cdot L_x = 0 & L_x \leq 0 \\ y \geq 0 & y \cdot L_y = 0 & L_y \leq 0 \\ \lambda \geq 0 & \lambda \cdot L_\lambda = 0 & L_\lambda \geq 0 \end{array}$$

Note que el problema dado establece que  $y \neq 0$ , por ende, los casos se reducen a:

- (1) Si  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  y  $\lambda = 0$ , se genera una contradicción dado que  $L_y = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$ .
- (2) Si  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces de  $L_\lambda = 0 \Rightarrow y = 1$  y  $L_y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$ . Además, al sustituir  $x = 0$  en  $L_x$  se cumple que  $L_x = 0$ . Con lo que se cumple todas las condiciones de KKT.
- (3) Si  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  y  $\lambda = 0$ , se genera una contradicción dado que  $L_x = 0 \Rightarrow x = 0$ .
- (4) Si  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  y  $\lambda \neq 0$ , entonces  $L_x = 0 \Rightarrow 2x(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ , y de  $L_y = 0 \Rightarrow 2y + 1 - 2y\lambda = 0 \Rightarrow 1 = 0$ , lo cual es una contradicción.

Por tanto, el único punto que satisface el problema dado es  $(0, 1)_{\lambda=\frac{3}{2}}$ . ■

3. Considere la siguiente integral doble:

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\frac{7}{4}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{\frac{7}{4}} f(x, y) dy dx + \int_2^{\frac{17}{4}} \int_{\sqrt{x-2}}^{\frac{7}{4}} f(x, y) dy dx$$

(a) [4 puntos] Dibuje y sombree la región de integración de  $I$ .

(b) [5 puntos] Escriba  $I$  en el orden  $dx dy$ .

*Solución.* De la primera integral se cumple  $0 \leq x \leq 1$  y  $\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \frac{7}{4}$ , donde  $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ .

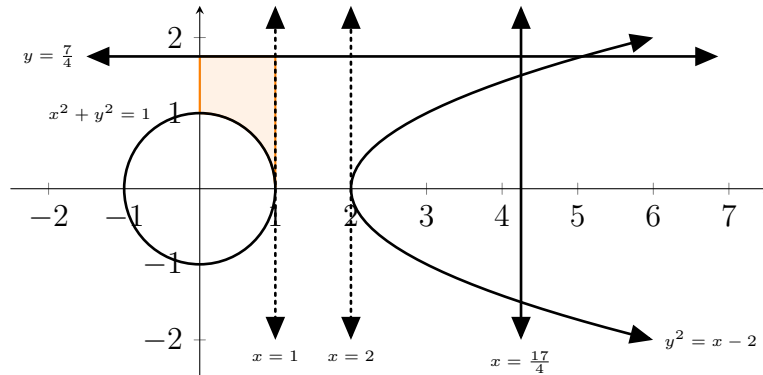


Figure 1: Región de integración de la primera integral de  $I$ .

Mientras, de la segunda integral se tiene  $1 \leq x \leq 2$  y  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ .

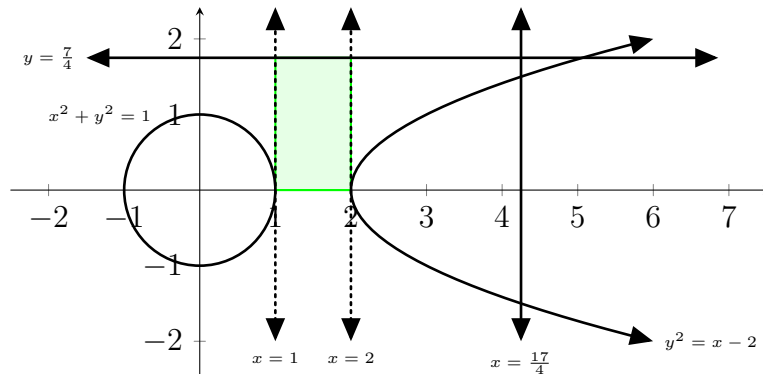


Figure 2: Región de integración de la segunda integral de  $I$ .

Por último, de la tercera integral  $2 \leq x \leq \frac{17}{4}$  y  $\sqrt{x-2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ , donde  $y = \sqrt{x-2} \Rightarrow y^2 = x-2$

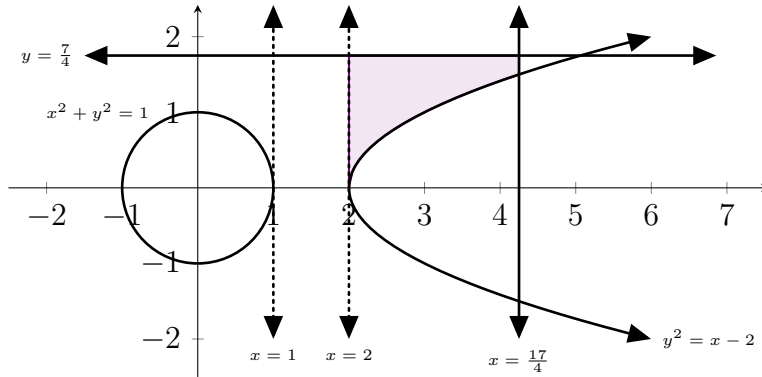


Figure 3: Región de integración de la tercera integral de  $I$ .

Así, la región de integración de  $I$  en el orden  $dydx$  se presenta en la figura (4). De aquí, se nota que la región de integración en el orden  $dx dy$  se debe dividir en tres regiones horizontales simples. Para esto se debe calcular la intersección entre  $x = \frac{17}{4}$  y  $y^2 = x - 2$  que se alcanza en  $y = \frac{3}{2}$ .

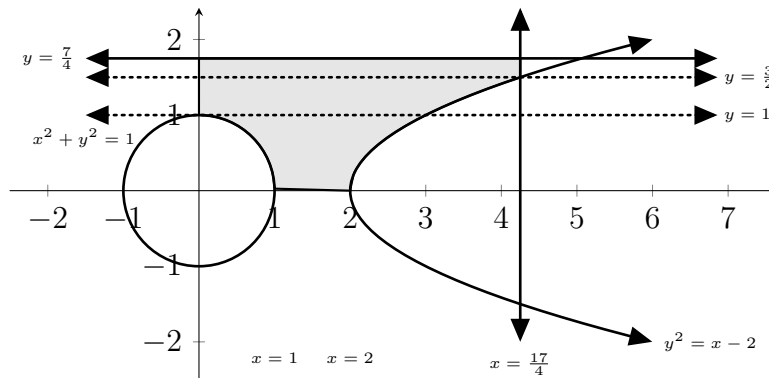


Figure 4: Región de integración de  $I$ .

De las tres regiones de la figura (4) los límites de integración se obtienen de la siguiente manera:

- La primera región es dada por  $\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{7}{4}$  y  $0 \leq x \leq \frac{17}{4}$
- La segunda región es dada por  $1 \leq y \leq \frac{3}{2}$  y  $0 \leq x \leq y^2 + 2$
- La tercera región es dada por  $0 \leq y \leq 1$  y  $\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq y^2 + 2$

Por tanto, la integral quedaría de la forma:

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{y^2+2} f(x, y) dx dy + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_0^{y^2+2} f(x, y) dx dy + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{4}} \int_0^{\frac{17}{4}} f(x, y) dx dy$$

■

4. Sea  $M = \iint_R \text{sen}(x) + \text{cos}(x) dA$ , donde  $R$  es la región en el primer cuadrante que contiene al origen, y limitada por las curvas  $y = \text{cos}(x)$ ,  $y = \text{sen}(x)$ ,  $y = 0$ . Considere el cambio de variable:  $u = \text{cos}(x) - y$ ,  $v = \text{sen}(x) - y$ .

(a) [2 puntos] Dibuje y sombree la región  $R$ .

(b) [3 puntos] Bajo el cambio de variable anterior verifique que el Jacobiano corresponde a  $\frac{1}{\text{cos}(x) + \text{sen}(x)}$

(c) [6 puntos] Calcular la integral  $M$  usando el cambio de variable dado.

*Solución.* La región de integración viene dada por Ahora, el jacobiano es dado por:

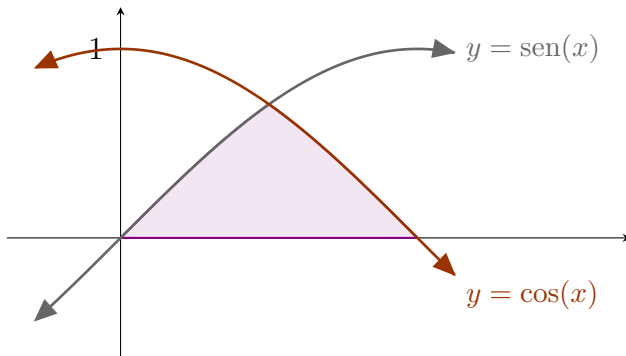


Figure 5: Región  $R$ .

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\text{sen}(x) & -1 \\ \text{cos}(x) & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\text{sen}(x) + \text{cos}(x)}$$

La nueva región de integración se obtiene observando que:

$$y = \text{cos}(x) \implies u = 0$$

$$y = \text{sen}(x) \implies v = 0$$

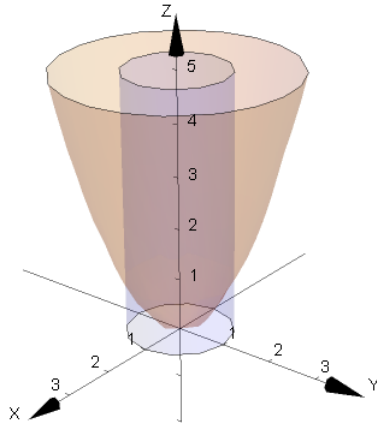
$$y = 0 \implies \begin{cases} u = \text{cos}(x) \\ v = \text{sen}(x) \end{cases} \implies u^2 + v^2 = 1$$

También, como la región se encuentra en el primer cuadrante se tiene que  $y \leq \text{cos}(x)$  y  $y \leq \text{sen}(x)$ , donde se deduce  $u \geq 0$  y  $v \geq 0$ . Entonces, la región de integración en las variables  $uv$  se ubica en el primer cuadrante y está limitada por el círculo unitario. Luego,

$$\begin{aligned} M &= \iint_R (\text{sen}(x) + \text{cos}(x)) dA \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 1 \cdot r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \int_0^1 r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

■

5. [10 puntos] Utilice coordenadas cilíndricas para calcular:  $\int_0^1 \left\{ e^{y^2} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \left( e^{x^2} \int_0^{x^2+y^2} 1 dz \right) dx \right\} dy$



*Sugerencia:* Si lo requiere, puede utilizar  $\int_0^1 we^w dw = 1$

*Solución.* Note que la integral se reescribe como

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \int_0^{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dz dx dy$$

donde  $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ ,  $-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 0$  y  $0 \leq y \leq 1$ ; con  $-\sqrt{1-y^2} = x \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$  y  $z = x^2 + y^2$ . Entonces,

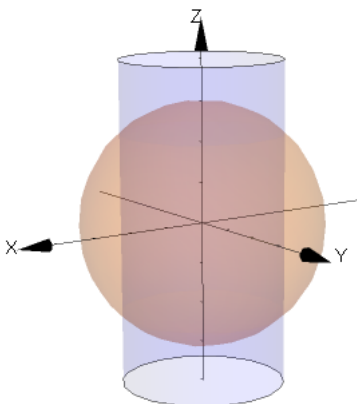
$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq r^2 \end{cases}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \int_0^{x^2+y^2} e^{x^2+y^2} dz dx dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} e^{r^2} r dz dr d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \int_0^{r^2} e^{r^2} r dz dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r^3 e^{r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 we^w dw \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

■

**Pregunta opcional.** Una esfera de radio  $a$  y centrada en el origen, tiene un hueco cilíndrico de radio  $b$ , cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera, y  $a > b$ . Como se muestra en la figura:



[6 puntos] Muestre que el volumen de la porción que resta de la esfera es

$$V = \frac{4\pi}{3} (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}$$

*Solución.* El ejercicio se puede resolver utilizando coordenadas esféricas o cilíndricas.

Si se realiza con coordenadas cilíndricas para obtener el volumen buscado, se resta el volumen de la esfera con el volumen de la parte cilíndrica. Recuerde que si la esfera tiene radio  $a$ , entonces su volumen corresponde a  $\frac{4\pi a^3}{3}$ . Mientras, el volumen de la parte cilíndrica se contempla que  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq b$  y  $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$  donde

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz dr d\theta &= 4\pi \int_0^b \int_0^{\sqrt{a^2 - r^2}} r dz dr \\ &= 4\pi \int_0^b r \sqrt{a^2 - r^2} dr \\ &= 4\pi \left[ \frac{-1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^b \\ &= \frac{4\pi}{3} \left( - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} + a^3 \right) \end{aligned}$$

El volumen buscado corresponde a

$$V = V_{\text{esfera}} - V_{\text{parte cilíndrica}} = \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{4\pi}{3} \left( - (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} + a^3 \right) = \frac{4\pi}{3} (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}$$

Para el estudio con coordenadas esféricas se contempla que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ; y  $\phi_0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  donde  $\phi_0$  es la inclinación de la intersección superior del cilindro con la esfera, formando el triángulo de la figura (6).

donde se obtiene que  $\cos(\phi_0) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  y  $\cot(\phi_0) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ . También,  $b \csc(\phi) \leq r \leq a$  donde

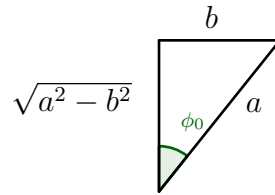


Figure 6: Caption

$b \csc(\phi)$  es el cilindro en coordenadas esféricas. El volumen de la porción de esfera es dado por

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{b \csc(\phi)}^a r^2 \operatorname{sen}(\phi) dr d\phi d\theta = 4\pi \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\phi) \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{b \csc(\phi)}^a d\phi \\
 &= \frac{4\pi}{3} \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\phi) (a^3 - b^3 \csc^3(\phi)) d\phi \\
 &= \frac{4\pi}{3} \left( a^3 \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\phi) d\phi - b^3 \int_{\phi_0}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2(\phi) d\phi \right) \\
 &= \frac{4\pi}{3} (a^3 \cos(\phi_0) - b^3 \cot(\phi_0)) \\
 &= \frac{4\pi}{3} \left( a^3 \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} - b^3 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \\
 &= \frac{4\pi}{3} \sqrt{a^2 - b^2} (a^2 - b^2) \\
 &= \frac{4\pi}{3} (a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

■

*La Matemática es el lenguaje en el que los dioses hablan con la gente.*  
Platón.