

SOLUCIONARIO DEL SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

I ciclo 2025

Desarrollo

(56 puntos)

A continuación se le presentan cinco ejercicios, en cada uno de ellos responda lo que se le solicita. No asuma que un proceso es muy obvio o que es innecesario anotarlo.

1. [6 puntos] Estudie la convergencia **de una** de las siguientes series utilizando criterios de convergencia:

(a)
$$\sum_{n=361}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{n+1}}{(2n-1)!}$$

Solución. La serie $\sum_{n=361}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}}$ se puede estudiar con el criterio de comparación directa o al límite.

- Note que $n \geq 361$, entonces $\sqrt{n} \geq 19$ y $n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n} \geq n^{\frac{3}{5}}$. Se concluye que

$$\frac{19}{n^{\frac{3}{5}}} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}} \Rightarrow \sum_{n=361}^{+\infty} \frac{19}{n^{\frac{3}{5}}} \leq \sum_{n=361}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}}$$

Observe que $\sum_{n=361}^{+\infty} \frac{19}{n^{\frac{3}{5}}} = 19 \cdot \sum_{n=361}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{5}}}$ es una p -serie divergente. Por el criterio de comparación directa se concluye que $\sum_{n=361}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}}$ es divergente.

- Tome $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}}$ y $b_n = \frac{1}{n}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{-9}{10}} + 1} = 1$$

Como el límite es distinto de cero y $\sum_{n=361}^{+\infty} \frac{1}{n}$ es una p -serie divergente entonces por el

criterio de comparación al límite se concluye que $\sum_{n=361}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{5}} + n\sqrt{n}}$ es divergente.

Para la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{n+1}}{(2n-1)!}$ se procede a estudiar la convergencia con el criterio de la razón tomando $a_n = \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{n+1}}{(2n-1)!}$ y $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} ((n+1)!)^2 2^{n+2}}{(2n+1)!}$, de donde

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} ((n+1)!)^2 2^{n+2}}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^n (n!)^2 2^{n+1}}{(2n-1)!}} \right| = \frac{((n+1)!)^2 \cdot 2^{n+2} \cdot (2n-1)!}{(n!)^2 \cdot 2^{n+1} \cdot (2n+1)!} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2}{(2n+1)(2n)} = \frac{2(n+1)^2}{4n^2 + 2n}$$

Con lo que se obtiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)^2}{4n^2 + 2n} = \frac{1}{2} < 1$. Por tanto, por el criterio de la razón, la serie converge. ■

2. Considere la serie $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n!(n+3)}$

(a) [6 puntos] Calcule el radio de convergencia.

(b) [2 puntos] ¿Cuál es el dominio o intervalo de convergencia? **Justifique su respuesta.**

(c) [1 punto] Mencione un intervalo abierto donde $S'(x)$ sea convergente.

(d) [4 puntos] Se sabe que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} = x^2 e^x$ y $\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$. Calcule el valor de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+3}}{n!(n+3)}$

Solución. Tome $a_n = \frac{1}{n!(n+3)}$ y $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!(n+4)}$ de donde

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!(n+4)}}{\frac{1}{n!(n+3)}} \right| = \frac{n!(n+3)}{(n+1)!(n+4)} = \frac{n+3}{(n+1)(n+4)}$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+4)} = 0$$

El radio de convergencia de S es ∞ . Se concluye que la serie converge en $D = \mathbb{R}$. Además, un intervalo donde $S'(x)$ es convergente es cualquier intervalo $]a, b[$ tal que $]a, b[\subset D$.

Como $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} = x^2 e^x$, entonces

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+2}}{n!} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n!(n+3)}$$

y

$$\int_0^x u^2 e^u du = [e^u (u^2 - 2u + 2)]_0^x = e^x (x^2 - 2x + 2) - 2$$

Así, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n!(n+3)} = e^x (x^2 - 2x + 2) - 2$. Tomando $x = -4$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^{n+3}}{n!(n+3)} = e^{-4} ((-4)^2 - 2(-4) + 2) - 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (4)^{n+3}}{n!(n+3)} = 26e^{-4} - 2$$

■

3. [11 puntos] Considere la ecuación $F\left(\sqrt{x+y^2}, \frac{y^2}{z}\right) = 0$ que define implícitamente a $z = h(x, y)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en términos de las derivadas parciales de F . **No es necesario simplificar.**

Solución. Para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ se procede de manera implícita, observe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Se define $u(x, y) = \sqrt{x+y^2}$ y $v(y, z) = \frac{y^2}{z}$, entonces

$$F_x = F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x = \frac{F_u}{2\sqrt{x+y^2}} + F_v \cdot 0 = \frac{F_u}{2\sqrt{x+y^2}}$$

$$F_y = F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = \frac{yF_u}{\sqrt{x+y^2}} + \frac{2y}{z}F_v$$

$$F_z = F_u \cdot u_z + F_v \cdot v_z = F_u \cdot 0 - \frac{y^2}{z^2}F_v = -\frac{y^2}{z^2}F_v$$

Ahora,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{F_u}{2\sqrt{x+y^2}}}{-\frac{y^2}{z^2}F_v} = \frac{z^2 F_u}{2y^2 \sqrt{x+y^2} F_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{yF_u}{\sqrt{x+y^2}} + \frac{2y}{z}F_v}{-\frac{y^2}{z^2}F_v} = \frac{yz^2 F_u + 2yz\sqrt{x+y^2} F_v}{y^2 \sqrt{x+y^2} F_v}$$

■

4. Considere la función $f(x, y, z) = \frac{2^{x^2+y^2+z^2}}{\ln(2)}$

- (a) [6 puntos] Verifique que $\nabla f(x, y, z) = (x \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1}, y \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1}, z \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1})$
- (b) [4 puntos] Calcule la derivada direccional en el punto $P(1, 1, 1)$ y en la dirección $\vec{v} = (0, 2, 0)$.
- (c) [2 puntos] Calcule el valor mínimo de la derivada direccional en $P(1, 1, 1)$.
- (d) [1 punto] ¿Cuál es la dirección donde se alcanza el valor máximo de la derivada direccional?

Solución. Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2^{x^2+y^2+z^2+1} \cdot \ln(2) \cdot 2x}{\ln(2)} = 2x \cdot 2^{x^2+y^2+z^2} = x \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2^{x^2+y^2+z^2+1} \cdot \ln(2) \cdot 2y}{\ln(2)} = 2y \cdot 2^{x^2+y^2+z^2} = y \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{2^{x^2+y^2+z^2+1} \cdot \ln(2) \cdot 2z}{\ln(2)} = 2z \cdot 2^{x^2+y^2+z^2} = z \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1}\end{aligned}$$

entonces

$$\nabla f(x, y, z) = (x \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1}, y \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1}, z \cdot 2^{x^2+y^2+z^2+1})$$

Ahora, $\nabla f(P) = (2^4, 2^4, 2^4) = (16, 16, 16)$ y $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{2}(0, 2, 0) = (0, 1, 0)$. Entonces,

$$D_{\vec{w}}f(P) = \nabla f(P) \bullet \vec{w} = (16, 16, 16) \bullet (0, 1, 0) = 16$$

El valor mínimo de la derivada direccional en P es

$$-\|\nabla f(P)\| = -\sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = -\sqrt{259}$$

y el valor máximo se alcanza en la dirección $\nabla f(P) = (16, 16, 16)$. ■

5. Considere la función $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$.

(a) [9 puntos] Calcule todos los puntos críticos de f .

(b) [5 puntos] Clasifique el punto $(-1, -1)$ utilizando el criterio de la Hessiana.

Solución. Se calcula el gradiente de f , observe:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (4x^3 - 2(x + y), 4y^3 - 2(x + y))$$

Se debe resolver $\nabla f(x, y) = \vec{0}$; es decir,

$$\begin{cases} 4x^3 - 2(x + y) = 0 & \Rightarrow 4x^3 = 2(x + y) \\ 4y^3 - 2(x + y) = 0 & \Rightarrow 4y^3 = 2(x + y) \end{cases}$$

entonces $x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$. De la ecuación $4x^3 - 2(x + y) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 4x^3 - 2(x + y) = 0 & \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \\ & \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \\ & \Rightarrow 4x(x - 1)(x + 1) = 0 \\ & \Rightarrow x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Como $x = y$, entonces los puntos críticos son: $(0, 0)$, $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

Por otro lado, se calcula la matriz Hessiana, observe:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

entonces $H_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$. Note que $\Delta_1 = 14 > 0$ y $\Delta_2 = 192 > 0$, con lo que se concluye que $H_f(-1, -1)$ es positiva y en $(-1, -1)$ se alcanza un mínimo. ■