Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Matemática Aplicada
MA-1023 Cálculo con Optimización

SOLUCIONARIO DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL

I ciclo 2025

Desarrollo (50 puntos)

Instrucciones. A continuación se le presentan 4 ejercicios, en cada uno de ellos responda lo que se le solicita. No asuma que un proceso es muy obvio o que es innecesario anotarlo.

1. **[10 puntos]** A continuación se presenta una integral.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

Estudie su convergencia y, en caso de que sea convergente, calcule su valor.

Solución. Note que si $x = 1$, entonces el integrando queda como $\frac{1}{0}$.
Por lo tanto, la integral es de segunda especie y se calcula de la siguiente manera:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{b\to 1^+} \int_b^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

Ahora se calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ usando la sustitución $x = u^2+1$, entonces $dx = 2u\,du$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2u\,du}{(u^2+1)\sqrt{u^2}} = \int \frac{2u}{(u^2+1)u}du = \int \frac{2}{u^2+1}du$$

$$= 2\arctan(u) + C = 2\arctan(\sqrt{x-1}) + C$$

Entonces,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{b\to 1^+} 2\arctan(\sqrt{x-1})\Big|_b^2$$

$$= \lim_{b\to 1^+} \Big(2\arctan(\sqrt{2-1}) - 2\arctan(\sqrt{b-1})\Big)$$

$$= 2\arctan(1) - 2\arctan(0) = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 2\cdot 0 = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la integral dada converge a $\dfrac{\pi}{2}$.

■

2. Resuelva lo siguiente:

   (a) **[7 puntos]** Demuestre mediante inducción matemática que

$$2(2)^2 + 3(2)^3 + 4(2)^4 + \ldots + n(2)^n = (n-1)2^{n+1}$$

   para $n \geq 2$

   (b) **[5 puntos]** Determine el valor de convergencia de la siguiente sucesión

$$a_n = \frac{(-1)^n(n-1) + n2^n}{2(2)^2 + 3(2)^3 + 4(2)^4 + \ldots + n(2)^n}$$

Solución.

(a) Iniciamos con $n = 2$

$$2(2)^2 = (2-1)2^{2+1} = 8$$

por lo que es verdadero para $n = 2$. Asumiendo la igualdad cierta queremos probar que

$$2(2)^2 + 3(2)^3 + 4(2)^4 + \ldots + n(2)^n + (n+1)2^{n+1} = (n)2^{n+2}$$

para esto vea que

$$\begin{aligned}
2(2)^2 + 3(2)^3 + 4(2)^4 + \ldots + n(2)^n + (n+1)2^{n+1} &\overset{H.I.}{=} (n-1)2^{n+1} + (n+1)2^{n+1} \\
&= 2^{n+1}(n-1+n+1) \\
&= 2^{n+1}(2n) \\
&= n2^{n+2}
\end{aligned}$$

(b) Usando la parte (a) tenemos

$$a_n = \frac{(-1)^n(n-1) + n2^n}{2(2)^2 + 3(2)^3 + 4(2)^4 + \ldots + n(2)^n} = \frac{(-1)^n(n-1) + n2^n}{(n-1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\frac{n}{n-1}$$

con esto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cancelto{0}{\left(\frac{-1}{2}\right)^n} + \frac{1}{2}\cancelto{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{2}$$

■

3. Considere la función $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

(a) **[4 puntos]** Calcule por definición la fórmula de Taylor con resto de Lagrange de la función f, de orden 3 y centro $a=0$. Debe indicar entre qué valores se ubica el $\theta=\theta_x$ del resto de Lagrange.

Sugerencia: puede usar sin verificación que:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\ ,\ f''(x)=\frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+1)^5}}\ ,\ f'''(x)=\frac{10}{27\sqrt[3]{(x+1)^8}}\ ,$$
$$f^{(4)}(x)=\frac{-80}{81\sqrt[3]{(x+1)^{11}}}\ ,\ f^{(5)}(x)=\frac{880}{243\sqrt[3]{(x+1)^{14}}}\ ,\ \ldots$$

(b) **[2 puntos]** Deduzca, de la parte anterior, la fórmula de Taylor con resto de Young de f de orden 3 y centro $a=0$.

(c) **[6 puntos]** Utilice el polinomio de Taylor del punto (a) para hallar una aproximación de $\sqrt[3]{2}$. Además, acote superiormente el error de la aproximación obtenida. ¿Cuántos decimales hay de exactitud? **Justifique su respuesta.**

(d) **[1 punto]** Plantee el desarrollo limitado de e^x de orden 1 y centro $a=0$.

(e) **[4 puntos]** Emplee los desarrollos limitados anteriores para calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}}{e^x-1}\right).$$

Solución.

(a) Primero se calcula el polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $a=0$:

$$\begin{aligned}T_3(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3\\&=\sqrt[3]{0+1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{(0+1)^2}}x+\frac{\frac{-2}{9\sqrt[3]{(0+1)^5}}}{2!}x^2+\frac{\frac{10}{27\sqrt[3]{(0+1)^8}}}{3!}x^3\\&=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}.\end{aligned}$$

Luego, la fórmula de Taylor de orden 3 y centro $a=0$, con resto de Lagrange es:

$$\begin{aligned}f(x)&=T_3(x)+R_3(x)\\&=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+\frac{f^{(4)}(\theta_x)}{4!}x^4\\&=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+\frac{-80}{4!\cdot 81\sqrt[3]{(\theta_x+1)^{11}}}x^4\\&=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+\frac{-10}{243\sqrt[3]{(\theta_x+1)^{11}}}x^4\end{aligned}$$

donde θ_x es algún número entre el centro $a=0$ y x.

(b) La fórmula de Taylor de orden 3 y centro $a = 0$, con resto de Young es:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_3(x) + R_3(x) \\ &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3) \end{aligned}$$

donde la o es para $x \to 0$.

(c) Se desea aproximar $\sqrt[3]{2} = f(1)$ con $T_3(1)$, o sea:

$$\begin{aligned} T_3(1) &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1^2}{9} + \frac{5 \cdot 1^3}{81} \\ &= \frac{104}{81} \approx 1.28395061\,. \end{aligned}$$

Así, se obtiene:

$$\sqrt[3]{2} \approx \frac{104}{81} \approx 1.28395061\,.$$

El error de esta aproximación es:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= |R_3(1)| \\ &= \left| \frac{-10}{243\sqrt[3]{(\theta_1+1)^{11}}} \cdot 1^4 \right| \\ &= \frac{10}{243\sqrt[3]{(\theta_1+1)^{11}}} \end{aligned}$$

con θ_1 es algún número entre el centro $a = 0$ y $x = 1$.
Para acotar el error, se realiza lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta_1 \leq 1 &\implies 243\sqrt[3]{(0+1)^{11}} \leq 243\sqrt[3]{(\theta_1+1)^{11}} \leq 243\sqrt[3]{(1+1)^{11}} \\ &\implies \frac{10}{243\sqrt[3]{(0+1)^{11}}} \geq \frac{10}{243\sqrt[3]{(\theta_1+1)^{11}}} \geq \frac{10}{243\sqrt[3]{(1+1)^{11}}} \\ &\implies \frac{10}{243} \geq \frac{10}{243\sqrt[3]{(\theta_1+1)^{11}}} = \varepsilon_3\,. \end{aligned}$$

Así, una cota superior para el error ε_3 es $\frac{10}{243}$. Como esta es menor que 10^{-1}, entonces, la aproximación obtenida es exacta hasta su primer decimal por el tamaño del error y porque hasta el primer decimal no se redondeó, o sea, que $\sqrt[3]{2} = 1.2...$ muestra dígitos exactos.

(d) El desarrollo limitado de e^x de orden 1 y centro $a = 0$ es:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

donde la o es para $x \to 0$. Dado de memoria o con un cálculo sumamente sencillo.

(e) Se tiene:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}}{e^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+o(x^3)-1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}}{1+x+o(x)-1}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5x^3}{81}+o(x^3)}{x+o(x)}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\left(\frac{5x^2}{81}+x^2o(1)\right)}{x(1+o(1))}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5x^2}{81}+x^2o(1)}{1+o(1)}\right)\\
&= \frac{0+0}{1+0}\\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

■

4. Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes; en el caso de que sean convergentes calcule el valor de convergencia.

   (a) **[6 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{7}{5}\right)^{-n+1}$

   (b) **[5 puntos]** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

Solución.

(a) Note que la serie es geométrica, pues

$$S=\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{7}{5}\right)^{-n+1}=\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{-n}=\frac{7}{5}\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{7}\right)^{n}=\frac{7}{5}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^{n}$$

Como $r=\dfrac{-5}{7}\approx -0,7142\ldots$ es un valor entre -1 y 1, entonces S es convergente. Por otro lado, el valor de convergencia es dado por:

$$S=\frac{7}{5}\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^{n}=\frac{7}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^{n+3}=\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{-5}{7}\right)^{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-5}{7}\right)^{n}=\frac{-25}{49}\cdot\frac{1}{1-\frac{-5}{7}}=\frac{-25}{84}$$

Por tanto, el valor de convergencia de la serie es de $\dfrac{-25}{84}$.

(b) Para estudiar la convergencia de la serie se utiliza

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}=-\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}&=-\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\\&=-\left(b_2-\lim_{n\to+\infty}b_n\right)\\&=-\left(\sqrt{2}-\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\right)\\&=-\sqrt{2}+\infty=+\infty\end{aligned}$$

con $b_n=\sqrt{n}$. Se concluye que la serie es del tipo telescópica divergente.

■

La Matemática es el lenguaje en el que los dioses hablan con la gente.
Platón.